8. Domaines nodaux

Soit Ω un domaine borné du plan dont le spectre de Dirichlet est $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots \nearrow \infty$. Soit (u_k) un base Hilbertienne de $L^2(\Omega)$ associée à ce spectre.

Théorème 8.1 (Courant)**.** *Le nombre de domaines nodaux de la fonction u_k est plus petit où égal à k.*

Exercice 1. *Montrez que le nombre de domaines nodaux d'une k-ième fonction propre peut être strictement inférieur à k.*

Exercice 2. *Cherchez quelques information sur les plaques de Chladni.*

En dimension 1, le nombre de domaines nodaux de u_k est k. Le théorème suivant montre que cette propriété n'est pas vraie en dimension plus grande.

Théorème 8.2 (Pleijel,1956)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, posons $N(k)$ le nombre de domaines nodaux maximal d'une k-ième fonction propre. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $k \geq n_0$,*

$$N(k) < k.$$

Exercice 3. *Le but de cet exercice est de démontrer le Théorème de Pleijel.*

(1) *Soit u une fonction propre associée à la valeur propre λ_n. Soit $\Omega_1, \cdots, \Omega_N$ les domaines nodaux de u. Montrez que pour chaque $k = 1, \cdots, N$,*

$$\lambda_n = \lambda_1(\Omega_k).$$

(2) *Vous devrez utiliser une inégalité isopérimétrique spectrale très classique, que nous démontrerons bientôt en classe.*

Théorème 8.3 (Faber, 1923 et Krahn, 1926)**.** *Soit Ω un domaine euclidien. On note $\Omega^\star$ la boule dont l'aire est celle de Ω. On a alors*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^\star).$$

Montrez que l'inégalité de Faber–Krahn s'exprime aussi

$$\frac{|\Omega|}{\pi j^2} \geq \frac{1}{\lambda_1(\Omega)},$$

où j est la plus petite racine positive de la fonction de Bessel J_0. Pensez à utiliser l'homogénéité des valeurs propres: pour chaque $c > 0$,

$$\lambda_k(c\Omega) = c^{-2}\lambda_k(\Omega).$$

(3) *Montrez que pour chaque $k = 1, \cdots, N$,*

$$\frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{|\Omega_k|}{\pi j^2}.$$

(4) *En déduire que*

$$\frac{N}{\lambda_n} \leq \frac{|\Omega|}{\pi j^2}.$$

(5) *Utilisez le théorème de Weyl, ainsi que la valeur explicite de j pour arriver à une contradiction.*

9. Asymptotique spectrale

Théorème 9.1 (Loi de Weyl)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné euclidien. Les valeurs propres de Dirichlet vérifient*

$$\lambda_k \sim \frac{4\pi^2}{\omega_d^{2/d}} \left(\frac{k}{|\Omega|} \right)^{2/d}, \qquad k \to \infty,$$

où $\omega_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)}$ est la mesure d'une boule de rayon 1 dans $\mathbb{R}^d$.

La preuve de ce théorème est présentée de manière très claire au Chapitre 3 du livre de Boulton et Levitin.

On y fait appel à une généralisation de l'exercice suivant.

Exercice 4. *Soit $0 = \mu_0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \nearrow \infty$ le spectre de Neumann d'un domaine borné régulier Ω. Montrez que*

$$\mu_k \leq \lambda_k.$$