1. Fonctions harmoniques

Soit Ω un domaine de $\mathbf{R}^d$. Rappelons que l'opérateur de Laplace est défini par

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}.$$

Cet opérateur est elliptique d'ordre deux.

Définition 1.1. *Une fonction $u \in C^2(\Omega)$ est harmonique si $\Delta u = 0$.*

La proposition suivante montre que l'opérateur de Laplace est invariant par rotation.

Exercice 1. *Soit $T \in O(d)$ une transformation orthogonale de $\mathbf{R}^d$. Étant donnée une fonction $u \in C^2(\Omega)$, montrez que la fonction $u \circ T : T^{-1}(\Omega) \to \mathbf{R}$ vérifie*

$$\Delta(u \circ T) = (\Delta u) \circ T.$$

Propriété de la moyenne. Commençons par quelques rappels. La mesure de la boule unité $B \subset \mathbf{R}^d$ est

$$w_d = \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}.$$

La mesure de la sphère unité $S = \partial B \subset \mathbf{R}^d$ est dw_d. En fait, il existe sur S une unique mesure de probabilité $d\sigma$ Borelienne invariante sous l'action du groupe orthogonal $O(d+1)$. La mesure standard sur la sphère est donc $ds = dw_d d\sigma$. L'intégrale d'une fonction

$$u : S(y,r) = \partial B(y,r) \to \mathbf{R}$$

est

$$\int_{S(y,r)} u(z)\, ds(z) = dw_d r^{d-1} \int_S u(y + rz)\, d\sigma.$$

En particulier, si la fonction u est continue en y, on a

$$\lim_{r \to 0} r^{1-d} \int_{S(y,r)} u(z)\, ds(z) = dw_d u(y).$$

Théorème 1.2. *Soit u une fonction harmonique sur un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^d$. Alors pour chaque boule fermée $\overline{B(y,R)} \subset \Omega$,*

$$u(y) = \frac{1}{|\partial B(y,R)|} \int_{\partial B(y,R)} u(z)\, ds(z)$$
$$u(y) = \frac{1}{|B(y,R)|} \int_{\overline{B}(a,R)} u.$$

Proof. Définissons $f : (0,R] \to \mathbb{R}$ par

$$f(r) = \int_{\partial B(y,r)} \partial_\nu u\, ds.$$

En utilisant les propriétés de l'intégration sur la sphère, on obtient

$$\begin{aligned} f(r) &= dw_d r^{d-1} \int_S \partial_r u(y+rz)\, d\sigma \\ &= dw_d r^{d-1} \partial_r \int_S u(y+rz)\, d\sigma \\ &= r^{d-1} \partial_r \left(r^{1-d} \int_{\partial B(y,r)} u\, ds \right). \end{aligned}$$

Or, du théorème de divergence-flux appliqué au champ de vecteurs ∇u, on obtient

$$f(r) = \int_{B(y,r)} \Delta u = 0.$$

En particulier, pour chaque $r \in (0, R)$

$$R^{1-d} \int_{\partial B(y,R)} u\, ds = r^{1-d} \int_{\partial B(y,r)} u\, ds \to dw_d u(y).$$

Ce qui complète la preuve de la première formule. ♣

Remarque 1.3. *Une fonction $u \in C^2(\Omega)$ est sous-harmonique si $\Delta u \geq 0$. Une fonction $u \in C^2(\Omega)$ est sur-harmonique si $\Delta u \leq 0$. Une fonction sous-harmonique est bornée supérieurement par sa moyenne alors qu'une fonction sur-harmonique est bornée inférieurement par sa moyenne.*

Théorème 1.4 (Principe du maximum)**.** *Soit u une fonction harmonique sur un domaine Ω. Si u atteint son maximum ou son minimum sur Ω, alors u est constante.*

Proof. Soit $a \in \Omega$ un maximum de u. Soit $B(a,r) \supset \Omega$. Si il existe un point $x \in B(a,r)$ tel que $u(x) < u(a)$ alors par continuité la moyenne de u sur $B(a,r)$ sera inférieur à $u(a)$. Ceci contredit le théorème de la valeur moyenne. La fonction u est donc constante sur $B(a,r)$. Ceci montre que l'ensemble $u^{-1}(a)$ est ouvert. Puisque cet ensemble est aussi fermé, il est nécessairement tout Ω. ♣

Exercice 2. *Soit Ω un domaine borné. Si $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ est harmonique dans Ω. Montrez que u atteint son minimum et son maximum sur $\partial\Omega$. Qu'en est-il si le domaine n'est pas borné?*

Cet exercice est important. Il montre que la solution du problème de Dirichlet

$$\Delta u = 0, \text{ sur } \Omega, \tag{1.1}$$

$$u = f \text{ sur } \partial\Omega \tag{1.2}$$

est unique si f est continue et Ω est borné.

1.1. **Opérateur de Laplace-Beltrami sur une surface.** Soit $\phi : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to S \subset \mathbf{R}^d$ une surface paramétrée lisse. Les fonctions $E, F, G : \Omega \to \mathbf{R}$ sont définies par

$$E = |\phi_x|^2, F = \phi_x \cdot \phi_y, G = |\phi_y|^2.$$

La matrice $g = \begin{matrix} E & F \\ F & G \end{matrix}$ est appelée première forme fondamentale, elle représente pour chaque $(x,y) \in \Omega$ le produit scalaire sur l'espace tangent à S au point $\phi(x,y) \in S$ (i.e. la métrique

Riemannienne). Étant donné une fonction lisse $h : S \to \mathbf{R}$, posons $f = h \circ \phi$. L'opérateur de Laplace–Beltrami est défini par

$$\Delta_\phi(h) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}(\partial_x, \partial_y)\sqrt{|g|}g^{-1}\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

Théorème 1.5. *Soit $\phi : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to S \subset \mathbf{R}^d$ une surface paramétrée lisse. Soit $\psi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ un difféomorphisme. Soit $\tilde{\phi} = \phi \circ \psi$ un deuxième paramétrage de la surface. Alors,*

$$\Delta_{\tilde{\phi}}(h \circ \tilde{\phi})(\tilde{x}, \tilde{y}) = \Delta_\phi(h \circ \phi)(x, y)$$

où $(x, y) = \psi((\tilde{x}, \tilde{y})$.

Ceci montre que l'opérateur ne dépend essentiellement que de la surface, pas du paramétrage choisi.

Exemple 1.6. *Expression du Laplacien en coordonées polaire.*

Holomorphie.

Théorème 1.7. *Soient $\Omega, \tilde{Omega}$ des domains de $\mathbf{R}^2$ identifié au plan complexe. Si $\phi : u + iv : \tilde{Omega} \to \Omega$ est un biholomorphisme, alors la première forme fondamentale donnée par $E = G = 2u_x^2$ et $F = 0$.*

Exercice 3. *Soient $\Omega, \tilde{Omega}$ des domains de $\mathbf{R}^2$ identifié au plan complexe. Montrez qu'un difféomorphisme $\phi : u + iv : \tilde{Omega} \to \Omega$ biholomorphisme, si et seulement si il préserve l'orientation et est une équivalence conforme, c'est-à-dire: $F = 0$ et $E = G$.*

Exercice 4. *L'opérateur de Laplace est-il invariant par translation et par homothétie?*

Exercice 5.

(1) *Discuter les fonctions harmoniques en dimension $d = 1$.*
(2) *Vérifiez que la fonction définie par $f(x) = |x|^{2-d}$ sur $\Omega = \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ est harmonique. Sur ce même domaine, la fonction $g(x) = x_1|x|^{2-d}$ est-elle harmonique ?*
(3)

Exercice 6. *Prouvez la propriété de la moyenne dans le cas $d = 2$.*

Exercice 7. *Prouvez la propriété de la moyenne pour le volume dans les cas $d = 2, 3$.*

Exercice 8. *Montrez qu'il existe des domaines pour lequels le problème de Dirichlet admet plusieurs solutions.*

Exercice 9. *Montrez que les zeros d'une fonctions harmoniques ne sont jamais isolés.*

Exercice 10. *Soit B la boule unité de $\mathbf{R}^d$ et S sa frontière.*

(1) *Montrez que la mesure de Lebesgue de B est $w_d := \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}$.*
(2) *Calculez quelques valeurs de w_d.*

Exercice 11. *Calculer une expression de l'opérateur de Laplace sur la sphère S^2.*