1. Fonctions harmoniques II

1.1. **Solution fondamentale et fonction de Green.** Étant donnée $x \neq y \in \mathbf{R}^d$, on pose

$$\Gamma(x,y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log|x-y| & \text{si } d=2, \\ \frac{1}{d(2-d)w_d}|x-y|^{2-d} & \text{si } d \geq 3. \end{cases}$$

Cette fonction est appelée la solution fondamentale de l'équation de Laplace. La fonction $x \mapsto \Gamma(x,y)$ est harmonique.

Proposition 1.1 (Formule de représentation de Green)**.** *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Pour chaque $y \in \Omega$,*

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} (u(x)\partial_{n_x}\Gamma(x,y) - \Gamma(x,y)\partial_{n_x}u(x))\, ds(x) + \int_\Omega \Gamma(x,y)\Delta u(x)\, dx.$$

Preuve. On pose $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{B(y,\epsilon)}$ et on utilise la deuxième identité de Green :

$$\int_{\Omega_\epsilon} (v\Delta u - u\Delta v)dx = \int_{\partial\Omega_\epsilon} (v\partial_n u - u\partial_n v)\, ds(x),$$

pour les fonctions u et $x \mapsto v(x) := \Gamma(x-y)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} \Gamma\Delta u\, dx &= \int_{\partial\Omega_\epsilon} (\Gamma\partial_n u - u\partial_n\Gamma)\, ds \\ &= \int_{\partial\Omega} (\Gamma\partial_n u - u\partial_n\Gamma)\, ds(x) - \underbrace{\int_{S(y,\epsilon)} (\Gamma\partial_n u - u\partial_n\Gamma)\, ds(x)}_{\longrightarrow 0 - u(y)}. \end{aligned}$$

♣

Corollary 1.2. *Soit u une fonction harmonique sur Ω. Alors u est de classe C^∞.*

Preuve. Pour chaque boule $B(y,r) \subset \Omega$, la proposition précédente montre que

$$u(y) = \int_{S(y,r)} (u(x)\partial_n\Gamma(x,y) - \Gamma(x,y)\partial_n u(x))\, ds(x).$$

Il suffit maintenant de vérifier que les fonctions $y \mapsto \Gamma(x,y), y \mapsto \partial_{n_x}\Gamma(x,y)$ sont lisses pour $x \in S(y,r)$. ♣

Proposition 1.3. *Soit $y \in \Omega$. Soit $h_y \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ une fonction harmonique. Pour $x \neq y$, posons*

$$G(x,y) = \Gamma(x,y) + h_y(x).$$

On a alors

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} (u\partial_n G - G\partial_n u)\, ds + \int_\Omega G\Delta u\, dx.$$

Preuve.

Exercice 1.

♣

Si la fonction $G(x,y)$ est définie pour chaque $x \neq y$, s'annule pour chaque $x \in \partial\Omega$, elle est appelée fonction de Green de Ω.

Nous ne prouverons pas le théorème suivant.

Théorème 1.4. *Si Ω est un domaine borné dont la frontière est suffisamment régulière, alors il existe une fonction de Green sur Ω.*

Exemple 1.5 (Fonction de Green la boule $B(0,R)$)**.** *Étant donné $y \in \mathbf{R}^d$, posons*

$$\bar{y} = \begin{cases} \frac{R^2}{|y|^2} y & si\ y \neq 0, \\ \infty & si\ y = 0. \end{cases}$$

La fonction de Green de la boule $B(0,R)$ est

$$G(x,y) = \begin{cases} \Gamma(|x-y|) - \Gamma(\frac{|y|}{R}|x-\bar{y}|) & si\ y \neq 0, \\ \Gamma(|x|) - \Gamma(R) & si\ y = 0. \end{cases}$$

Exercice 2. *Soit $G(x,y)$ la fonction de Green de la boule $B(0,R)$. Montrez que*

$$\partial_{n_x} G(x,y) = \frac{R^2 - |y|^2}{dw_d R|x-y|^d}.$$

Le noyau de Poisson de la boule $B(0,R)$ est

$$P(x,r) = \partial_{n_x} G(x,y) = \frac{R^2 - |y|^2}{dw_d R|x-y|^d}.$$

Théorème 1.6. *Soit $f \in C^0(S(0,R))$. La fonction $u : \overline{B(0,R)} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$u(y) = \begin{cases} \int_{S(0,R)} P(x,y)\, ds(x) & si\ y \in B(0,R), \\ f(y) & si\ y \in S(0,R) \end{cases}$$

est harmonique sur $B(0,R)$ et continue sur $\overline{B(0,R)}$.

- Jusqu'à maintenant nous avions montrez qu'une fonction harmonique peut être représentée par une telle formule. Ce théorème est plus puissant, il montre en particulier que chaque fonction continue sur la sphère admet une extension harmonique dans la boule.

Preuve. On a déjà montré que si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, alors cette formule est vérifiée. En particulier, en utilisant $u(x) = 1$, on déduit que pour chaque $y \in B(0,R)$,

$$\int_{S(0,R)} P(x,y)\, ds(x) = 1.$$

En d'autres mots $P(x,y)\, ds(x)$ est une mesure de probabilité sur la sphère $S(0,R)$. Lorsque y s'approche de $y_o \in S(0,R)$, la mesure $P(x,y)\, ds(x)$ tend vers une mesure de Dirac en y_0. ♣

1.2. **Le noyau de Poisson en dimension $d = 2$.** Dans ce cas, l'analyse complexe permet une intuition supplémentaire.

Étant donné $\xi \in \mathbb{D}$, l'application $T = T_\xi : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ définie par

$$T_\xi(z) = \frac{z + \xi}{\overline{\xi} z + 1}$$

est un biholomorphisme tel que $T(0) = \xi$ dont l'inverse est $T_{-\xi}$. Soit $u \in C^2(\mathbb{D}) \cap C^0(\overline{\mathbb{D}})$ une fonction harmonique. La précomposition de u par un biholomorphisme est aussi harmonique. Il découle donc de la propriété de la moyenne que

$$u(\xi) = u \circ T(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} u \circ T \, ds.$$

Exercice 3. *Montrez que*

$$\int_{S^1} u \circ T_\xi \, ds = \int_{S^1} u(z) |T'_{-\xi}(z)| \, ds(z).$$

On calcule facilement

$$T'_\xi(z) = \frac{1 - |\xi|^2}{(\overline{\xi} z + 1)^2}.$$

En particulier, pour $z \in S^1$,

$$|T'_{-\xi}(z)| = \frac{1 - |\xi|^2}{(1 - \overline{\xi} z)(1 - \xi \overline{z})} = \frac{1 - |\xi|^2}{(1 - \overline{\xi} z - \xi \overline{z} + |\xi|^2)} = \frac{1 - |\xi|^2}{|\xi - z|^2}.$$

On déduit donc

$$u(\xi) = \int_{S^1} u(z) \frac{1 - |\xi|^2}{2\pi |\xi - z|^2}.$$

Qui fait apparaître de nouveau le noyau de Poisson.

Exercice 4. *Écrivez le noyau de Poisson du disque de rayon R en coordonnées polaires.*

1.3. **La propriété de la moyenne caractérise les fonctions harmoniques.**

Théorème 1.7. *Une fonction continue $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique si et seulement si pour chaque boule $B(y, r) \subset \Omega$,*

$$u(y) = \frac{1}{d w_d r^{d-1}} \int_{S(y,R)} u \, ds.$$

Preuve. Définissons $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ par

$$\phi(t) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{t^2 - 1}\right) & \text{si } t < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La constante c est choisie de telle sorte que $\int_{\mathbf{R}^d} \phi(|x|) \, dx = 1$. La fonction $x \mapsto \phi(|x|)$ est lisse. Étant donné $f \in L^1(\Omega)$, on définit une régularisation de f par la convolution

$$f_r(y) = \frac{1}{r^d} \int_\Omega f(x) \phi(|x - y|/r) \, dx.$$

Pour la fonction donnée u donnée dans l'énoncé du théorème, on obtient en utilisant l'intégration polaire

$$\begin{aligned} u_r(y) &= \frac{1}{r^d}\int_{B(y,r)} u(x)\phi(|x-y|/r)\,dx \\ &= \frac{1}{r^d}\int_{\alpha=0}^{r}\left(\phi(\alpha/r)\int_{S(y,r)} u(x)\,ds(x)\right)d\alpha \\ &= \frac{1}{r^d}\int_{\alpha=0}^{r}\phi(\alpha/r)u(y)dw_d\alpha^{d-1}d\alpha \end{aligned}$$

En posant $\beta = \alpha/r$ on obtient

$$u_r(y) = u(y)\int_{\beta=0}^{1}\phi(\beta)dw_d\beta^{d-1}d\beta = u(y)\int_{B(0,1)}\phi(|x|)\,dx = u(y).$$

La fonction u est donc égale à sa régularisation. En particulier, elle est de classe C^∞. En utilisant la preuve de la propriété de la moyenne (Théorème 1.2), on voit

$$\int_{B(y,r)}\Delta u = \int_{\partial B(y,r)}\partial_\nu u\,ds = r^{d-1}\partial_r\left(r^{1-d}\int_{\partial B(y,r)} u\,ds\right).$$

Or la fonction u vérifie la propriété de la moyenne par hypothèse. Donc

$$\int_{\partial B(y,r)} u\,ds = r^{d-1}dw_d u(y).$$

D'où

$$\partial_r\left(r^{1-d}\int_{\partial B(y,r)} u\,ds\right) = 0.$$

On a donc finalement $\int_{B(y,r)}\Delta u = 0$ pour chaque boule $B(y,r)\subset\Omega$. ♣

Exercice 5. *Étant donnée $u, v \in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, montrez la deuxième identité de Green :*

$$\int_{\Omega_\epsilon}(v\Delta u - u\Delta v)dx = \int_{\partial\Omega_\epsilon}(v\partial_n u - u\partial_n v)\,ds(x),$$

Exercice 6.

- *Déterminez la fonction de Green du demi plan supérieur*

$$\mathbb{H} = \{z\in\mathbb{C} \,:\, im(z) > 0\}.$$

- *Peut-on en déduire une formule représentant les valeur d'une fonction harmonique $u \in C^0(\overline{\mathbb{H}})\cap C^2(\mathbb{H})$ à partir des valeurs de u sur l'axe réel ?*

Exercice 7. *Montrez que si u est harmonique et bornée sur $\Omega\setminus\{p\}$, alors u admet une extension harmonique sur Ω.*