1. Introduction

Définition 1.1. *Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation impliquant une fonction inconnue $u : \Omega \to \mathbf{R}$, où $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ est un ouvert de dimension $d \geq 2$, et ses dérivées. En d'autres mots, le problème le plus général de la théorie des équations aux dérivées partielles est d'étudier les solutions d'une équation de la forme*

$$F(x, Du(x), D^{(2)}u(x), \cdots, D^{(n)}u(x)) = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Ici la notation $D^{(n)}u$ signifie simplement l'ensemble des dérivées partielles d'ordre n. Par *étudier les solutions* on entend plusieurs choses. Par exemple:

(1) Donner une formule explicite pour une solution. Ceci est souvent impossible.
(2) Prouver l'existence d'une solution.
(3) Décider de l'unicité de la solution. Ceci ne sera en général possible que si des conditions supplémentaires sont imposées.
(4) Étudier la stabilité des solutions.
(5) Étudier la régularité des solutions. Sont-t-elles lisses ?

L'ordre d'une EDP est l'ordre de la dérivée la plus haute de la fonction inconnue y apparaissant. Si la fonction F est linéaire par rapport à u et à ses dérivées, on dit de l'équation qu'elle est linéaire.

1.1. Quelques exemples.

Dans ce cours, Ω sera toujours un domaine de l'espace Euclidien $\mathbf{R}^d$ suffisement régulier pour que la formule de divergence-flux soit vérifiée[1].

1.1.1. *Équation de Laplace.*

L'équation de Laplace sur Ω est

$$\Delta u = 0.$$

Une fonction qui vérifie cette équation est dite harmonique. Étant donnée une fonction $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, le problème de Dirichlet est

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ sur } \Omega, \\ u &= f \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.1}$$

En d'autres mots, on cherche une extension harmonique d'une fonction prescrite sur le bord du domaine considéré.

L'équation de Laplace est elliptique d'ordre deux.

1.1.2. *Équation des ondes.*

Soit Ω un domaine de $\mathbf{R}^2$. Sur l'ouvert $\Omega \times (0, \infty)$ de $\mathbf{R}^3$ on considère une fonction $(t, x) \mapsto u(t, x)$ dont on imagine qu'elle représente le déplacement vertical du point $x \in \Omega$ au temps $t > 0$. L'équation des ondes est

$$\partial_{tt} u = \Delta u.$$

Si on pense à Ω comme à la membrane d'un tambour, il est naturel d'imposer la condition au bord

$$u(t, x) = 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega.$$

[1] Voir Exercice 1.

Pour qu'une solution soit spécifiée de manière unique, on devra aussi donner une position initiale et une vitesse initiale

$$u(0,x) = f(x) \text{ pour } x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$u_t(0,x) = g(x) \text{ pour } x \in \Omega. \tag{1.3}$$

L'équation des ondes est hyperbolique d'ordre deux.

1.1.3. *Équation de la chaleur et de la diffusion.* Cette fois, on pense au domaine Ω en tant qu'un milieu où un produit chimique se propage. Pensez par exemple à une goutte d'encre dans de l'eau. Une concentration initiale $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est donnée. L'évolution dans le temps est alors prescrite par l'équation de la chaleur :

$$\partial_t u = \Delta u. \tag{1.4}$$

Cette fois encore, pour que la solution soit déterminée, il faudra donner une condition au bord. Par exemple, si on imagine que la diffusion à lieu dans une région hermétique, on imposera $u(x,t) = 0$ pour chaque $x \in \partial\Omega$ et chaque t. L'équation (1.4) est aussi un modèle pour la propagation de la chaleur. Dans ce cas, la fonction u représente la température.

L'équation de la chaleur est parabolique d'ordre deux.

1.1.4. *Équations de Cauchy–Riemann.* Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction

$$f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$$

est dite analytique si pour chaque point $p \in \Omega$, il existe une boule $B(p,r) \subset \Omega$ où f s'exprime par une série entière :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-p)^k.$$

La fonction f est analytique si et seulement si elle vérifie les équations de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y,$$
$$u_y = -v_x.$$

Ces équations forment un système d'EDP d'ordre un.

1.1.5. *Surfaces minimales.* Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ un domaine borné. L'aire du graphe d'une fonction $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ est donnée par

$$A(f) := \int_{\overline{\Omega}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

Étant donné une fonction $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ on cherche parmi les fonctions $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ qui sont égales à g sur $\partial\Omega$ une fonction dont le graphe est d'aire minimale. Si f est une telle fonction, alors pour chaque $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{D})$ on aura

$$A(f) \leq A(f + \epsilon\phi) \quad \forall \epsilon > 0.$$

En particulier,

$$\frac{d}{d\epsilon} A(f + \epsilon\phi)|_{\epsilon=0} = 0.$$

Après un peu de calcul on arrive à

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{f_x}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}} \right) \phi_x + \left(\frac{f_y}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}} \right) \phi_y = 0.$$

En utilisant l'intégration par partie, on déduit

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\partial_x \left(\frac{f_x}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{f_y}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}} \right) \right) \phi = 0.$$

Comme $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{D})$ est arbitraire, on conclut que

$$\partial_x \left(\frac{f_x}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{f_y}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}} \right) = 0. \tag{1.5}$$

C'est l'équation des surfaces minimales. Une solution de cette équation n'est pas nécessairement un minimum de l'aire. C'est plutôt un point stationnaire. Cette équation exprime le fait qu'une surface minimale est une surface dont la courbure moyenne est nulle. C'est une équation non-linéaire d'ordre deux.

1.2. **Classification des équations linéaires d'ordre deux.**

1.3. **Séparation des variables et spectre de Dirichlet.** Soit Ω un ouvert borné du plan. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_{tt} u(t,x) = \Delta u(t,x) & \text{pour } x \in \Omega, t > 0, \\ u(0,x) = A(x), \quad \partial_t u(0,x) = B(x) & \text{pour } x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0 & \text{pour } x \in \partial\Omega, t \geq 0, \end{cases}$$

où A, B sont des fonctions données. Si on tente de résoudre ce problème par séparation des variables, c'est-à-dire en cherchant une solution de la forme $u(t,x) = T(t)f(x)$, on obtient

$$T''(t)f(x) = T(t)\Delta f(x).$$

Il existe donc une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} T'' + \lambda T &= 0, \\ \Delta f + \lambda f &= 0 \\ f(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Un des buts du cours est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.2 (Théorème spectral pour le problème de Dirichlet)**.** *Les valeurs propres du problème de Dirichlet sur Ω :*

$$\begin{cases} \Delta f + \lambda f = 0 & \textit{sur } \Omega, \\ f = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

forment une suite positive divergente (appelée spectre de Dirichlet)

$$0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \cdots \nearrow \infty.$$

Les valeurs propres y sont répétées selon leur multiplicité. De plus, il existe une base hilbertienne $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $L_2(\Omega)$ dont les fonctions sont lisses et vérifient

$$\Delta f_k + \lambda_k f = 0.$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on obtient une famille de solutions de l'équation des ondes :

$$(t,x) \mapsto u_k(t,x) := \left(a_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k}t\right) + b_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k}t\right)\right) f_k(x) \qquad (a_k, b_k \in \mathbb{R}).$$

Cette solution correspond à une vibration de la membrane dont la fréquence est $\sqrt{\lambda_k}$. On cherchera à représenter une solution de l'équation des ondes sous la forme

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k}t\right) + b_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k}t\right)\right) f_k(x).$$

En particulier, on obtiendra dans ce cas

$$A(x) = u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x),$$

$$B(x) = \partial_t f(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\lambda_k} f_k(x),$$

les coefficients $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont déterminés par les représentations de A et B dans la base hilbertienne $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Remark 1.3. *La méthode que nous venons de présenter demande bien sûr à être justifiée.*

Géométrie spectrale. D'un point de vue physique, la géométrie spectrale s'intéresse aux liens qui existent entre la forme d'un domaine Ω d'une part, et d'autre part les modes de vibration de celui-ci. Mathématiquement, on cherchera donc à découvrir des liens entre des quantités géométriques (aire, courbure, connexité, etc) et les valeurs propres. Pour donner un exemple concret, citons deux résultats très classiques que nous démontrerons plus tard dans ce cours.

Théorème 1.4 (H. Weyl)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné dont le spectre de Dirichlet est donné par la suite (λ_k). Alors*

$$\lambda_k \sim \frac{4\pi^2 k^{2/d}}{(c_d|\Omega|)^{2/d}} \qquad \text{avec } k \to \infty,$$

où $c_d = \pi^{d/2}/\Gamma(d/2+1)$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 1.5 (R. Courant)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine euclidien borné. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base de fonctions propres pour le problème de Dirichlet. Le nombre de domaines nodaux de f_k ne dépasse pas k.*

Exercice 1. *Un domaine est un ouvert connexe de $\mathbf{R}^d$. Dans ce cours, on travaillera toujours avec des domaines Ω suffisamment réguliers*[2] *pour que la formule de divergence-flux soit*

[2] Ce sera le cas par exemple si Ω est un domaine dont l'adhérence est compacte et la frontière est lisse par morceau.

vérifiée: pour chaque champ de vecteurs V de classe $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,

$$\int_\Omega \operatorname{div} V(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} V(z) \cdot \nu(z)\, dz. \tag{1.6}$$

Le membre de gauche ne pose pas de problème particulier, il s'agit de l'intégrale de Lebesgue (ou de Riemann). Le membre de droite est plus subtil, le sens à y donner dépend du contexte. Par exemple si $\partial\Omega$ est une courbe ($d = 2$) ou une surface ($d = 3$), elle peut être calculée à l'aide de l'intégrale curviligne telle que vous l'avez vue dans votre cours d'analyse vectorielle.

Soit $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$

(1) *Montrez la première formule de Green:*

$$\int_\Omega v\Delta u + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u = \int_{\partial\Omega} v(z)\partial_{\nu(z)} u(z)\, dz. \tag{1.7}$$

Exercice 2. *Trouvez quelques exemples de fonctions harmoniques.*

Exercice 3. *Montrez l'unicité de la solution du problème de Dirichlet.*

Exercice 4. *Soit $g : S^1 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Posons*

$$X_g = \{f \in C^\infty(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})\}.$$

Supposons que $f \in X_g$ minimise la fonction $I : X_g \to \mathbb{R}$ définie par

$$I(f) = \int_{\mathbb{D}} |\nabla f|^2.$$

En imitant ce qui a été fait plus haut, déduisez une EDP qui sera vérifiée par f.

Exercice 5. *Montrez que $\lambda > 0$.*

Exercice 6. *Calculez le spectre de Dirichlet d'un intervalle $(0, L)$ et vérifiez la lois de Weyl dans ce cas.*

Exercice 7. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Le* support *d'une fonction continue $f \in C(\Omega)$ est l'ensemble*

$$supp(f) = adh\Big\{x \in \Omega \,\Big|\, f(x) \neq 0\Big\}.$$

Rappelons que l'ensemble des fonctions lisses à support compact sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est

$$C_0^\infty(\Omega) = \Big\{f \in C^\infty(\Omega) \,\Big|\, \exists K \text{ compact}, \ \ supp(f) \subset K \subset \Omega\Big\}.$$

Une suite de fonctions $(\eta_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est appelée suite régularisante *si pour chaque $k \in \mathbb{N}$,*

(1) $\eta_k(x) \geq 0$ *pour chaque* $x \in \mathbb{R}^n$,
(2) $supp\,(\eta_k) \subset \overline{B(0, 1/k)}$,
(3) $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_k\, dx = 1$.

Soit η_k une suite régularisante. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrez que pour chaque ouvert $\mathcal{O}$ contenant l'origine,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathcal{O}} f(x)\eta_k(x)\, dx = f(0).$$

Exercice 8. *Calculez le spectre de Dirichlet d'un rectangle $(0, 1) \times (0, L)$.*