10. La conjecture de Pólya

On note les spectres de Dirichlet et Neumann d'un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ suffisement régulier par

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$
$$0 = \mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots$$

La loi de Weyl nous apprend que

$$\mu_k \sim \frac{4k\pi}{|\Omega|} \sim \lambda_k \quad \text{lorsque } k \to \infty.$$

Conjecture 10.1 (Conjecture de Pólya)**.** *Pour chaque k,*

$$\mu_k \leq \frac{4k\pi}{|\Omega|} \leq \lambda_k.$$

Il découle des inégalités de Faber–Krahn et de Szegő-Weinberger que cette conjecture est vérifiée pour $k = 1$. Elle est aussi vérifiée pour $k = 2$, sous l'hypothèse supplémentaire que Ω est simplement connexe dans le cas de μ_2.

Définition 10.2. *On dit d'un domaine Ω qu'il pave le plan si $\mathbb{R}^2$ peut être recouvret par des copies isométriques de $\overline{\Omega}$ qui ne s'intersectent que sur leurs frontières.*

Exercice 1. *Montrez que chaque triangle et chaque quadrilatère pave le plan.*

Théorème 10.3 (Pólya (1960) et Kellner (1966))**.** *Si Ω pave le plan, alors*

$$\mu_k \leq \frac{4k\pi}{|\Omega|} \leq \lambda_k.$$

Exercice 2. *Cherchez et lire l'article de Kellner.*