4. Espaces de Sobolev I

4.1. **Motivations.** Soit Ω un domaine borné de $\mathbf{R}^d$. Notre but à moyen terme sera d'étudier les solutions d'une équation de la forme

$$Lu = 0 \text{ sur } \Omega,$$
$$u = f \text{ sur } \partial\Omega,$$

où L est un opérateur elliptique d'ordre deux. La stratégie générale que nous utiliserons est la suivante :

(1) On remplace la notion de solution par une notion affaiblie de solution.
(2) Pour cette notion de solution faible, on prouve l'existence et l'unicité, à l'aide d'outils simple de l'analyse fonctionnelle.
(3) On utilise la structure du problème pour prouver qu'une solution faible est très régulière. Cette partie est difficile!
(4) Pour une solution régulière, on montre que la notion de solution faible coincide avec la notion de solution usuelle.

Motivation: le principe de Dirichlet. L'énergie de Dirichlet d'une fonction $u : C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ est

$$D(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

Exercice 1. *Montrez que l'énergie de Dirichlet est une fonction convexe.*

Proposition 4.1. *Soit f une fonction continue sur la frontière d'un domaine Ω borné. Supposons que la fonction $u \in C^2(\Omega)$ minimise l'énergie de Dirichlet parmi les fonctions coincidant avec f sur $\partial\Omega$. Alors u est une solution du problème de Dirichlet.*

Calcul des variations. On cherchera donc à montrer qu'un minimum existe. Soit u_n, une suite minimisante:

$$\lim_{n\to\infty} D(u_n) = c := \inf \{D(v) \,:\, v : \Omega \to \mathbf{R}, v = f \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

On déduit alors de la convexité que $D(\frac{u_n+u_m}{2}) \to c$ et donc

$$D(u_n - u_m) = 2D(u_n) + 2D(u_m) - 4D(\frac{u_n + u_m}{2}) \longrightarrow 0.$$

En particulier, la suite $(\nabla u_n) \in L^2(\Omega, \mathbf{R}^d)$ est de Cauchy. Comme L^2 est complet, elle converge vers une fonction $w = (w_1, \cdots, w_d) \in (L^2)^d$. La question est donc de garantir que w est le gradient d'une fonction u, et que celle-ci soit suffisement régulière.

4.2. **L'espace de Sobolev $W^{1,2}$.**

Définition 4.2. *Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ un ouvert et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Une fonction $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ est appelée une dérivée faible de u dans la direction e_i ($i = 1, 2, \cdots, d$) si pour chaque fonction $\phi \in C^1_0(\Omega)$,*

$$\int_\Omega \phi v \, dx = -\int_\Omega (\partial_i \phi) v \, dx.$$

On écrit alors $D_i u := v$. Une fonction u est dite faiblement dérivable si elle admet des dérivées faibles dans les directions $e_1, \cdots, e_d$.

Exercice 2. *Montrez l'unicité de la dérivée faible.*

Exercice 3. *Montrez que chaque fonction $u \in C^1(\Omega)$ est faiblement dérivable, et que ses dérivées faibles sont ses dérivées partielles.*

Lemme 4.3. *Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ est faiblement dérivable et si $B(x,\epsilon) \subset \Omega$, alors la régularisation u_ϵ vérifie*

$$\partial_i(u_\epsilon(x)) = (D_i u)_\epsilon(x).$$

Preuve. Comme u_ϵ est lisse, ses dérivées faibles coincident avec ses dérivées directionnelles. Donc,

$$\begin{aligned}
\partial_i(u_\epsilon(x)) &= \frac{1}{\epsilon^d}\int \frac{\partial}{\partial x_i}\phi(\frac{x-y}{\epsilon})u(y)\,dy \\
&= \frac{-1}{\epsilon^d}\int \frac{\partial}{\partial y_i}\phi(\frac{x-y}{\epsilon})u(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\epsilon^d}\int \phi(\frac{x-y}{\epsilon})D_i u(y)\,dy \qquad \longleftarrow (\text{ par definition de } D_i u) \\
&= (D_i u)_\epsilon(x).
\end{aligned}$$

♣

Théorème 4.4. *Soit $u, v \in L^2(\Omega)$. Alors $v = D_i u$ si et seulement si il existe une suite $(u_n) \subset C^\infty(\Omega)$ telle que pour chaque ouvert $\Omega' \subset\subset \Omega$*

$$u_n \to u, \quad \text{et} \quad \partial_i u_n \to v, \qquad \text{dans } L^2(\Omega').$$

Preuve. Soit $(u_n) \subset C^\infty(\Omega)$ est telle que pour chaque ouvert $\Omega' \subset\subset \Omega$

$$u_n \to u, \quad \text{et} \quad \partial_i u_n \to v, \qquad \text{dans } L^2(\Omega').$$

Étant donnée $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, il découle du changement de variable pour les fonctions lisses que

$$\int_\Omega \phi(\partial_i u_n)\,dx = -\int_\Omega (\partial_i \phi)u_n\,dx.$$

Il suffit alors de passer à la limite pour voir que $v = D_i u$. Ceci est possible car le support de ϕ est compact, et donc compris dans un ouvert $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Réciproquement, considérons $v = D_i u \in L^2(\Omega)$. Étant donné $\Omega' \subset\subset \Omega$, pour chaque $0 < \epsilon < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ on utilise le lemme suivant.

Lemme 4.5. *Si $u \in L^2(\Omega)$, alors $\lim_{\lim\to 0} \|u - u_\epsilon\|_{L^2} = 0$.*

Du lemme précédent on déduit aussi

$$\int_\Omega \phi(D_i u)_\epsilon\,dx = \int_\Omega \phi\partial_i(u_\epsilon)\,dx = -\int_\Omega (\partial_i\phi)u_\epsilon\,dx.$$

Ce qui complète la preuve. ♣

Définition 4.6. *L'espace de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ est l'ensemble des $u \in L^2(\Omega)$ qui sont faiblement dérivables et dont les dérivées faibles sont dans L^2. Cet espace est muni du produit scalaire*

$$(u,v) := (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^d (D_i u, D_i v)_{L^2}.$$

Proposition 4.7. *L'espace $W^{1,2}$ est complet.*

Proposition 4.8. *L'espace $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ est dense dans $W^{1,2}(\Omega)$.*

Preuve.

Exercice 4. *La preuve de la Proposition 4.8 est présentée à la page 162 du livre de J. Jost. Elle repose sur l'utlisation d'une partition de l'unité. Votre exercice est d'apprendre ce que sont les partitions de l'unité et de comprendre cette preuve.*

♣

Pour traiter les problèmes avec condition de Dirichlet à la frontière, nous utiliserons aussi un autre espace.

Définition 4.9. *L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,2}$.*

Théorème 4.10 (Inégalité de Poincaré)**.** *Pour chaque $u \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^2} \leq \left(\frac{|\Omega|}{w_d}\right)^{1/d} \|Du\|_{L^2}.$$

Exercice 5. *Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$ considérez la fonction $f_\alpha : (-1,1) \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \exp(-x) & \text{si } x > 0, \\ -(-x)^\alpha \exp(x) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- *Pour quelle valeurs de α cette fonction est-t-elle continue?*
- *Pour quelle valeurs de α cette fonction est-t-elle de classe C^1?*
- *Pour quelle valeurs de α a-t-on $f_\alpha \in W^{1,2}(\mathbb{R})$?*

Exercice 6. *Montrez que sur H_0^1, l'expression*

$$(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

définit un produit scalaire induisant une norme équivalente à celle qui est induite par le produit scalaire de $W^{1,2}$.

Exercice 7. *Montrez que les inclusions $H_0^1 \subset H^1 \subset L^2$ sont continues.*

Exercice 8. *Montrez que pour chaque $u \in H_0^1$,*

$$\|u\|_{L^2} \leq diam(\Omega)\|\nabla u\|_{L^2}.$$

C'est aussi une inégalité de Poincaré.

Exercice 9. *Pour se convaincre que la méthode mise en place fonctionne, lire la section 7.3 du livre de J. Jost.*

5. Plongements compacts

Théorème 5.1 (Rellich)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ un domaine borné. Alors, le plongement de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est une application compacte.*

Preuve. Soit B la boule unité de $H_0^1(\Omega)$. Notre but est de montrer que B est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. Il suffit de montrer que pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement de B par un nombre **fini** de boules de rayons ϵ dans $L^2(\Omega)$.

Considérons $\delta > 0$ qui sera précisé plus tard. Étant donnée $u \in B$, il existe par définition de $H_0^1(\Omega)$, une fonction $v \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que

$$\|u - v\|_{W^{1,2}}^2 = \|u - v\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{d} \|D_i u - D_i v\|_{L^2}^2 < \delta^2.$$

Estimons la distance dans $L^2(\Omega)$ entre cette fonction v et sa régularisation v_δ.

$$\begin{aligned}
\|v - v_\delta\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega \left(v(x) - \int_{|z|\le 1} \phi(z) v(x - \delta z)\, dz \right)^2 dx \\
&= \int_\Omega \left(\int_{|z|\le 1} \phi(z)(v(x) - v(x - \delta z))\, dz \right)^2 dx \\
&\le \int_\Omega \left(\int_{|z|\le 1} \phi(z) \int_{r=0}^{\delta|z|} |\partial_r v(x - rz/|z|)|\, dr\, dz \right)^2 dx \\
&= \int_\Omega \left(\int_{|z|\le 1} \phi(z)^{1/2} \left((\phi(z)^{1/2} \int_{r=0}^{\delta|z|} |\partial_r v(x - rz/|z|)|\, dr \right) dz \right)^2 dx \\
&\le \int_\Omega \int_{|z|\le 1} \phi(z) \left(\int_{r=0}^{\delta|z|} |\partial_r v(x - rz/|z|)|\, dr \right)^2 dz\, dx
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est une application de Cauchy-Schwarz, que l'on applique à nouveau pour obtenir

$$\begin{aligned}
\|v - v_\delta\|_{L^2}^2 &\le \int_\Omega \int_{|z|\le 1} \phi(z) \int_{r=0}^{\delta|z|} dr \int_{r=0}^{\delta|z|} |\partial_r v(x - rz/|z|)|^2\, dr\, dz\, dx \\
&\le \int_{|z|\le 1} \phi(z)\delta|z| \int_{r=0}^{\delta|z|} \int_\Omega |\partial_r v(x - rz/|z|)|^2\, dx\, dr\, dz \\
&\le \int_{|z|\le 1} \phi(z)\delta^2|z|^2 \int_\Omega |Dv|^2\, dx\, dz \\
&\le \delta^2 \int_\Omega |Dv|^2\, dx \le (\|u\|_{H^1} + \|u - v\|_{H^1})^2 \le \delta^2(1+\delta)^2.
\end{aligned}$$

Pour chaque $u \in B$, la fonction v_δ vérifie donc $\|u - v_\delta\|_{L^2} \le \delta + \delta^2(1+\delta)^2$.

Considérons la boule régularisée

$$B_\delta := \{v_\delta \,:\, v \in C_0^\infty(\Omega), d(v, B)_{W^{1,2}} < \delta\}$$

Étant donné $w = v_\delta \in B_\delta$,

$$\begin{aligned}|w(x)| &= \left|\int_{|z|\le 1} \phi(z) v(x-\epsilon z)\, dz\right| \\ &\le \sqrt{\int_{|z|\le 1} \phi(z)\, dz}\sqrt{\int_{|z|\le 1} v^2(x-\delta z)\, dz} = \|v\|_{L^2}^2 \le 1+\delta.\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 4.3 on obtient aussi pour chaque $i = 1, \cdots, d$,

$$\begin{aligned}|\partial_i w(x)| &= |\partial_i (v_\delta)(x)| = |(D_i v)_\delta(x)| \\ &= \left|\int_{|z|\le 1} \phi(z) D_i v(x-\delta z)\, dz\right| \\ &\le \|D_i v_n\|_{L^2} \le 1+\delta.\end{aligned}$$

Ceci implique l'équicontinuité de la boule régularisée B_δ. Du théorème de Arzela-Ascoli on déduit donc que cette boule est relativement compacte dans $C(\Omega)$. Elle est donc aussi relativement compacte dans L^2. ♣

Exercice 10. *Pour $\Omega = \mathbf{R}^d$, le plongement $H_0^1 \subset L^2$ est-t-il compact?*

6. Solutions faibles d'équations elliptiques

Sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbf{R}^d$, considérons des fonctions mesurables bornées

$$a^{ij}, b^j, c : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Supposons aussi la condition de symétrie $a_{ij} = a_{ji}$ vérifiée. On définit une fonction $I : W^{1,2}(\Omega) \to \mathbf{R}$ par

$$I(u) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x) D_i u(x) D_j u(x) + 2\sum_{j=1}^d b^j(x)(D_j u(x))u(x) + c(x)u(x)^2 \right) dx.$$

Exercice 11. *Montrez que I est continue.*

Étant donnée $\phi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}I(u+t\phi) &= I(u) \\ &\quad + 2t\int_\Omega \left(\sum_{i,j} a^{ij} D_i u D_j \phi + \sum_j b^j u D_j \phi + (\sum_j b^j D_j u + cu)\phi \right) dx + t^2 I(\phi).\end{aligned}$$

Si u minimise cette expression, alors pour chaque $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$2A(u,\phi) := \int_\Omega \left(\sum_j \left(\sum_i a^{ij} D_i u + b^j u \right) D_j \phi + (\sum_j b^j D_j u + cu)\phi \right) dx = 0. \tag{6.1}$$

Si les fonctions a^{ij} et b^j sont assez régulières (par exemple de classe C^1) et si $u \in C^2(\Omega)$, alors on peut intégrer par partie pour chaque $\phi \in C_0^\infty$ et ainsi obtenir

$$\sum_j \partial_j \left(\sum_i a^{ij} D_i u + b^j u \right) - \sum_j b^j D_j u - cu = 0. \tag{6.2}$$

Si on suppose de plus que la matrice $(a^{ij}(x))$ est définie positive pour chaque $x \in \Omega$ alors cette équation est elliptique.

Définition 6.1. *Une fonction $u \in W^{1,2}$ est une solution faible de l'équation elliptique* (6.2) *si elle vérifie* (6.1) *pour chaque $\phi \in H_0^1(\Omega)$.*

6.1. **Formulation abstraite du problème de Poisson.** Sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbf{R}^d$, considérons des fonctions mesurables bornées

$$a^{ij}, c : \Omega \to \mathbb{R}$$

vérifiant

A. Symétrie: pour chaque $x \in \Omega$, $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$.
B. Ellipticité uniforme: il existe $\lambda > 0$ tel que pour chaque $x \in \Omega$,

$$\sum_{ij} a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^d.$$

C. Les fonctions a^{ij} et c sont bornées.
C. La fonction c est positive.

On définit alors une forme bilinéaire $A : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$A(u,v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x)D_iu(x)D_jv(x) + c(x)u(x)v(x)\right) dx.$$

Définition 6.2. *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Une solution faible du problème de Poisson*

$$\sum_{j=1}^d \partial_j \left(\sum_{i=1}^d a^{ij}D_iu\right) - cu = f \ \textit{sur}\ \Omega,$$
$$u = 0 \ \textit{sur}\ \partial\Omega,$$

est une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant pour chaque $v \in H_0^1(\Omega)$

$$A(u,v) = (f,v)_{L^2}.$$

Exercice 12. *Montrez qu'il existe des constante $C, \lambda' > 0$ telle que pour chaque $u, v \in H_0^1$*

$$|A(u,v)| \leq C\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}, \qquad A(v,v) \geq \lambda'\|v\|^2_{H_0^1}.$$

Définition 6.3. *Sur un espace de Hilbert H, une application bilinéaire continue symétrique $A : H \times H \to \mathbf{R}$ est dite elliptique ou coercive s'il existe $\lambda' \geq 0$ telle que pour chaque $v \in H$,*

$$A(v,v) \geq \lambda'\|v\|^2.$$

Théorème 6.4. *Soit A une forme bilinéaire continue elliptique sur un espace de Hilbert H. Soit $L \in H^\star$. Soit V un sous-ensemble convexe fermé de H. Alors la fonction $J : V \to \mathbf{R}$ définie par*

$$J(v) := \frac{1}{2}A(v,v) + L(v)$$

atteint son unique minimum sur V.

Preuve. De l'ellipticité de A, on déduit

$$J(v) \geq \lambda \|v\|^2 - \|L\|\|v\|.$$

Soit $c := \inf\{J(v) \,:\, v \in V\} > -\infty$. Montrons qu'une suite minimisante $u_n \subset V$ est de Cauchy. Puisque V et J sont convexes,

$$c \leq J(\frac{u_n + u_m}{2}) = \overbrace{\frac{1}{2}J(u_n) + \frac{1}{2}J(u_m)}^{\to c} - \frac{1}{4}A(u_n - u_m, u_n - u_m).$$

On a donc $A(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$. L'ellipticité de A implique que $\|u_n - u_m\|$ tend aussi vers 0, d'où le fait que (u_n) soit de Cauchy et converge donc vers u. Puisque J est continue, on a $J(u) = \lim_J(u_n) = c$. ♣

Exercice 13. *Montre l'unicité du minimum u obtenu dans la preuve précédente.*

Exercice 14. *Si V est un sous-espace vectoriel fermé de H, montrez qu'il existe un unique $u \in V$ tel que pour chaque $v \in V$,*

$$A(u, v) + L(v) = 0.$$

Théorème 6.5. *Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ un domaine borné sur lequel des fonctions $a^{ij}, c : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions A,B,C,D sont données. Pour chaque $f \in L^2(\Omega)$, l'équation*

$$-\sum_j \partial_j \left(\sum_i a^{ij} D_i u + b^j u \right) + cu = f \tag{6.3}$$

admet une solution faible vérifiant $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Exercice 15. *La solution faible ainsi obtenu dépend-t-elle continûment de la fonction $f \in L^2$?*

Exercice 16. *Soit $\psi : \Omega' \to \Omega$ un difféomorphisme entre deux domaines bornés de $\mathbb{R}^d$, $\xi \mapsto x(\xi) = \psi(\xi)$. Pour chaque $i, j = 1, \cdots, d$, on définit*

$$g_{ij} := \partial_i \psi \cdot \partial_j \psi = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial x_d}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_d}{\partial \xi_j}.$$

(1) *Montrez que la matrice $g = (g_{ij})$ est définie positive.*
(2) *Soit $u \in C^2(\Omega)$ et $f \in C^0(\Omega)$ telles que $\Delta u = f$. Utilisez la formulation faible de cette équation pour montrer que*

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\sqrt{|g|} \sum_{i=1}^{d} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \right) = \sqrt{|g|} f.$$