7. Le spectre de l'opérateur de Laplace

Exercice 1. *Calculez le spectre de l'opérateur de Laplace avec conditions de Dirichlet pour les domaines suivants:*

- *Un intervalle (a, b).*
- *Un rectangle*
- *Un disque de rayon r. Il faudra dans ce cas passer par une séparation des variables en coordonnées polaires. L'EDO obtenue est l'équation de Bessel.*

Les valeurs propres sont-elles simples? Certaines ont-elles une grande multiplicité?

Exercice 2. *Pour les rectangles et les disques, pouvez-vous prouver directement la loi de Weyl:*

$$\lambda_k \sim \frac{4\pi}{|\Omega|} k?$$

Exercice 3. *Pour les rectangles et les disques, pouvez vous prouvez directement la conjecture de Pólya :*

$$\lambda_k \geq \frac{4\pi}{|\Omega|} k?$$

Exercice 4. *Dessinez quelques domaines nodaux des fonctions propres calculées.*