4. Inégalité de Faber–Krahn

Le réarrangement sphérique d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est la boule $\Omega^\star$ de même mesure que Ω. Le théorème de Faber–Krahn est une inégalité isopérimétrique pour la première valeur propre de Dirichlet d'un domaine.

Théorème 4.1 (Faber–Krahn, 1920++)**.** *Pour chaque domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$,*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^\star).$$

Exercice 1. *Montrez que parmi les rectangles d'aire fixée, le carré maximise la première valeur propre.*

Exercice 2. *Étant donné un domaine borné Ω, notons $\Omega^{\star\star}$ un domaine constitué de deux boules disjointes de même mesure totale que Ω. Montrez que*

$$\lambda_2(\Omega) \geq \lambda_2(\Omega^{\star\star}).$$

Étant donnée une fonction lisse positive $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ s'annulant sur $\partial\Omega$, définissons

$$\Omega_t = \{x \in \Omega \,:\, f(x) > t\}.$$

Le réarrangement sphérique de f est la fonction $f^\star : \Omega^\star \to \mathbb{R}$ définie par

$$f^\star(x) = \sup\{t \,:\, x \in \Omega_t\}.$$

On acceptera sans démonstration que $f^\star \in H_0^1(\Omega^\star)$.

Lemme 4.2. *Soit u une fonction propre positive associée à $\lambda_1(\Omega)$. Alors*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \int_{\Omega^\star} |\nabla u^\star|^2,$$
$$\int_\Omega u^2 = \int_{\Omega^\star} (u^\star)^2.$$

La preuve de l'inégalité de Faber-Krahn découle alors directement de la caractérisation

$$\lambda_1(\Omega) = \min\{R(u)\, u \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Théorème 4.3. *Soit $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$, $h \in L^1(\Omega)$. Alors,*

$$\int_\Omega h(x)\, dx = \int_{t=-\infty}^{\infty} \left(\int_{f^{-1}(t)} h|\nabla f|\, da_t \right) dt,$$

où da_t est la mesure de longueur sur la courbe $f^{-1}(t)$, qui est un ensemble régulier pour chaque valeur régulière[1] t.

En classe, j'ai utilisé la formule de co-aire pour montrer

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \int_{\Omega^\star} |\nabla u^\star|^2.$$

Exercice 3. *En supposant que u et $u^\star$ sont régulières, montrez que*

$$\int_\Omega u^2 = \int_{\Omega^\star} (u^\star)^2.$$

[1] Il découle du théorème de Sard que les valeurs critiques forment un ensemble de mesure nulle.

Exercice 4. *Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, calculez*

$$\sup\{\lambda_k(\Omega) \,:\, \Omega \subset \mathbb{R}^2, |\Omega| = 1\},$$
$$\inf\{\mu_k(\Omega) \,:\, \Omega \subset \mathbb{R}^2, |\Omega| = 1\}.$$