INTRODUCTION AUX GROUPES

ALEXANDRE GIROUARD

0. Groupes

La notion de groupe est l'une des notions les plus importantes et omniprésente des mathématiques modernes.

Définition 0.1. *Un* groupe *est un ensemble G muni d'une opération binaire $G \times G \to G$ notée $(g,h) \mapsto gh$ vérifiant :*

- *Pour chaque $f, g, h \in G$, $(fg)h = f(gh)$.*
- *Il existe $\boldsymbol{e} \in G$ tel que pour chaque $g \in G$, $\boldsymbol{e}g = g\boldsymbol{e}$*
- *Pour chaque $g \in G$, il existe g^{-1} tel que $gg^{-1} = g^{-1}g = \boldsymbol{e}$.*

- L'élément $\mathbf{e}$ est unique. On l'appelle *élément neutre* du groupe.
- L'inverse g^{-1} est aussi unique.

Exercice 0.2. *Soit G un groupe. Montrez que pour chaque $g, h \in G$ $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.*

Quelques exemples et non-exemples

0.1. **Les nombres.**

$\nearrow$ L'ensemble des nombres entier $\mathbb{Z}$ muni de l'addition est un groupe dont l'élément neutre est 0.

$\nearrow$ De même pour $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

$\searrow$ L'ensemble des entiers positifs $\mathbb{N}$ muni de l'addition n'est pas un groupe. Pourquoi ?

$\nearrow$ L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres réels positifs muni de la multiplication est un groupe dont l'élément neutre est 1.

$\nearrow$ De même pour les ensembles de nombres positifs $\mathbb{Q}_+$ et $\mathbb{R}_+$.

Exercice 0.3.

– *L'ensemble des nombres entiers pairs* $2\mathbb{Z} = \{2k \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ *muni de l'addition est-t-il un groupe ?*
– *Et si on le muni de la multiplication ?*

Exercice 0.4. *Est-ce que l'ensemble* $\mathbb{C}^*$ *des nombres complexes non nuls est un groupe lorsque muni de la multiplication ?*

0.2. **Isométries.** Notre but : montrer que les isométries du plan forment un groupe.

Définition 0.5. *Une application* $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *est appelée une* isométrie *si elle préserve les distances :*

$$\text{pour chaque } p, q \in \mathbb{R}^2, \quad |\psi(p) - \psi(q)| = |p - q|.$$

Étant données deux isométries ψ et ϕ on note $\phi\psi = \phi \circ \psi$ la composition de ψ par ϕ. C'est aussi une isométrie.

Exemples : Les translations, les rotations et les réflexions sont des isométries.

Exercice 0.6. *Soit* ψ *une isométrie du plan. Si trois points* x, y, z *n'appartenant pas à une même droite sont fixés par* ψ*, montrez que* ψ *est l'identité. C'est-à-dire que pour chaque* $p \in \mathbb{R}^2$*,* $\psi(p) = p$.

Proposition 0.7. *Chaque isométrie* $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *est la composition d'une rotation (ou d'une réflexion) par une translation. En d'autres mots, il existe une translation* T *et une rotation (ou une réflexion)* R *telle que*

$$\psi = T \circ R.$$

Démonstration. Soit $p = \psi(0)$. Considérons la translation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $T(p) = 0$. On a alors $T \circ \psi(0) = 0$.

Puisque $T \circ \psi$ est une isométrie, le point $q = T \circ \psi(1, 0)$ est aussi à distance 1 de l'origine. Soit R une rotation autour de l'origine telle que $R(q) = (1, 0)$. On a alors

$$R \circ T \circ \psi(1, 0) = (1, 0).$$

L'isométrie $\phi = R \circ T \circ \psi$ fixe donc l'origine ainsi que le point $(1, 0)$. De deux choses l'une :

(1) $\phi(0, 1) = (0, 1)$: par l'exercice précédent ϕ est l'identité.

(2) $\phi(0,1) = (0,-1)$. Soit ρ la réflexion par rapport à l'axe horizontal. L'isométrie $\rho \circ \phi$ fixe donc l'origine ainsi que les points $(1,0)$ et $(0,1)$. C'est donc l'identité. On déduit de $\rho \circ \phi = \mathrm{Id}$ que $\phi = \rho$.

□

Proposition 0.8. *L'ensemble Isom* $(\mathbb{R}^2)$ *des isométries muni de la composition est un groupe. Son élément neutre est l'application identité* $Id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Démonstration.

- La composition de deux isométries est une isométrie.
- La composition d'applications est associative.
- Pour chaque $\psi \in \mathrm{Isom}\,(\mathbb{R}^2)$
$$\psi \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ \psi = \psi.$$
- La proposition précédente implique que chaque isométrie est une bijection dont l'inverse est aussi une isométrie.

□

0.3. **Les groupes diédraux.** L'ensemble des isométries d'un n-gone régulier est *le groupe diédral d'ordre* $2n$. On le note D_n. Il est composé de n rotations et de n réflexions.

Exercice 0.9. *Calculez les tables de Cayley des groupes* D_3 *et* D_4.