ENCORE DES GROUPES

ALEXANDRE GIROUARD

1. Groupe de permutation

Soit E un ensemble. L'ensemble

$$\mathrm{Sym}(E) = \{\text{bijections } \alpha : E \to E\}.$$

muni de la composition est un groupe appelé *groupe symétrique sur* E. Son élément neutre est la fonction identité. Quand $E = \{1, 2, \cdots, n\}$ on note aussi ce groupe $\mathrm{Sym}(n)$.

Question 1.1.
- *Combien y-t-il d'éléments dans Sym(n) ?*
- *Est-ce que Sym(n) est Abélien ?*

On peut écrire une permutation sous forme d'une table :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \cdots & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

Définition 1.2. *Soit $2 \leq d \leq n$. Une permutation $\alpha \in Sym(n)$ est appelé un d-*cycle *si il existe une partie $X_\alpha \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ de cardinalité d telle que :*
- *pour chaque $i \in \{1, 2, \cdots, n\} \setminus X_\alpha$, $\alpha(i) = i$,*
- *les éléments de X_α sont permuté de manière cyclique par α.*

On appelle alors X_α le support *de α.*

Proposition 1.3. *Chaque permutation $\alpha \in Sym(n)$ s'écrit comme le produit de cycles dont les supports sont disjoints.*

Exercice 1.4. *Montrez que cette décomposition est unique, à ordre des cycles près.*

Exercice 1.5. *Un 2-cycle est aussi appelé une* transposition. *Montrez que chaque permutation peut être représenté par un produit de 2-cycles. Cette représentation est-t-elle unique ?*

2. Groupes de matrices

On notera $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Lorsque muni du produit matriciel, les ensembles suivants sont des groupes dont l'élément neutre est la matrice identité.

- Le *groupe linéaire général*
$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, A \text{ est inversible}\}.$$
- Le *groupe linéaire spécial*
$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, \det(A) = 1\}$$
et aussi
$$SL(n, \mathbb{Z}) = \{A \in M_n(\mathbb{Z}) \,:\, \det(A) = 1\}.$$
- Le *groupe orthogonal*
$$O(n) = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, AA^T = 1\right\}.$$

Exercice 2.1. *Est-ce que les sous-ensembles de $M_n(\mathbb{R})$ suivants sont des groupes lorsque muni de la multiplication matricielle ?*

- *L'ensemble des matrices dont le déterminant est 2.*
- *L'ensemble des matrices triangulaires supérieures.*
- *L'ensemble des matrices orthogonales dont le déterminant est 1.*