SOUS-GROUPES ET ISOMORPHISMES. LE THÉORÈME DE CAYLEY

ALEXANDRE GIROUARD

3. Sous-groupes

Définition 3.1. *Soit G un groupe. Un sous-ensemble $H \subset G$ est un sous-groupe si la restriction de l'opération de G à H fait de celui-ci un groupe. On notera alors $H < G$.*

Exemple 3.2.
- *Le sous-groupe* trivial $\{e\} < G$.
- $G < G$.
- $2\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$.

Lemme 3.3. *Soit G un groupe. Si un sous-ensemble non vide H de G vérifie*

$$\forall a, b \in H, \quad ab^{-1} \in H$$

alors H est un sous-groupe de G.

Lemme 3.4. *Soit G un groupe. Si un sous-ensemble non vide H de G vérifie*

$$\forall a, b \in H, \quad ab \in H$$
$$\forall a \in H, \quad a^{-1} \in H$$

alors H est un sous-groupe de G.

Exemple 3.5. *Soit G un groupe abélien. Alors $H = \{x : x^2 = e\}$ est un sous-groupe de G.*

Exercice 3.6. *Soit G un groupe abélien. Montrez que*

$$H = \{x^2 : x \in G\}$$

est un sous-groupe de G.

Exercice 3.7. *Soit H un sous-ensemble non vide* ***fini*** *d'un groupe G. Montrez que H est un sous-groupe de G si et seulement si*

$$\forall a, b \in H, \quad ab \in H.$$

Exemple 3.8. *Les sous-ensembles suivants sont des sous-groupes de $GL(n, \mathbb{R})$:*

- *Les matrices diagonales inversibles.*
- *$SL(n, \mathbb{R})$ et $SL(n, \mathbb{Z})$*
- *$O(n)$, $SO(n) = SL(n, \mathbb{R}) \cup O(n)$.*

Exercice 3.9. *Soit G un groupe. Le* centre *de G est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres éléments. C'est-à-dire :*

$$Z(G) = \{g \in G : \forall h \in G, gh = hg\}.$$

- *Montrez que le centre $Z(G)$ est un sous-groupe de G.*
- *Trouvez le centre des groupes $\mathbb{Z}$ et D_4.*

Exemple 3.10. *Soit a un élément d'un groupe G. Le sous-ensemble*

$$\langle a \rangle := \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

est un sous-groupe de G. C'est le sous-groupe engendré par *a.*

Définition 3.11. *L'*ordre *d'un groupe est sa cardinalité. L'ordre d'un élément a est l'ordre du sous-groupe engendré par a.*

Exemple 3.12. *L'ordre de chaque $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ est infini.*

Exercice 3.13. *Soit $\alpha \in [0, 1[$. Soit $R \in Isom(\mathbb{R}^2)$ une rotation d'angle $\alpha\pi$. Montrez que l'ordre de R est fini si et seulement si α est un nombre rationnel.*

4. Isomorphismes

Définition 4.1. *Soit G et $\bar{G}$ des groupes. Une bijection $\phi : G \to \bar{G}$ est un* isomorphisme *si*

$$\forall a, b \in G, \quad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$

Deux groupes sont dits isomorphes *si il existe un isomorphisme entre eux.*

Exemple 4.2. *L'application $\phi : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ définie par*

$$\phi(n) = 2n$$

est un isomorphisme.

Exemple 4.3. *Soit $G = \mathbb{R}$ muni de l'addition et $\bar{G} = \mathbb{R}_{>0}$ muni de la multiplication. L'application $\phi : G \to \bar{G}$ définie par*

$$\phi(x) = \exp(x)$$

est un isomorphisme.

Exemple 4.4. *Soit G un groupe. Pour chaque $g \in G$ l'application $\phi_g : G \to G$ définie par*

$$\phi_g(x) = gxg^{-1}$$

est un isomorphisme. On l'appelle la conjugaison par g.

5. Le théorème de Cayley

Les groupes de permutation sont très importants en théorie des groupes.

Théorème 5.1. *Chaque groupe G est isomorphe à un sous-groupe du groupe de ses permutations Sym(G).*

Démonstration. Étant donné $g \in G$, définissons l'application $T_g : G \to G$ par

$$T_g(x) = gx.$$

L'application T_g est une bijection. Montrons tout d'abord quelle est injective : Supposons que $T_g(x) = T_g(y)$. C'est-à-dire que $gx = gy$. En multipliant à gauche par g^{-1} on obtient $x = y$. Elle est aussi surjective puisque, étant donné $x \in G$, $T_g(g^{-1}x) = x$.

Comme T_g est une bijection, c'est un élément de $\mathrm{Sym}(G)$. Considérons

$$H = \{T_g \,:\, g \in G\} \subset \mathrm{Sym}(G).$$

Montrons que H est un sous-groupe de $\mathrm{Sym}(g)$.

- Comme $\mathbf{e} = T_e \in H$, H est non vide.
- Soient $T_g, T_h \in H$, alors $T_g \circ T_h = T_{gh} \in H$.
- Soit $T_g \in H$, alors $T_{g^{-1}} \in H$ est l'inverse de T_g. En effet,

$$T_{g^{-1}} \circ T_g = T_{g^{-1}g} = T_e = \mathbf{e},$$
$$T_g \circ T_{g^{-1}} = T_{gg^{-1}} = T_e = \mathbf{e}.$$

On définit $\phi : G \to H$ par

$$\phi(g) = T_g.$$

L'application ϕ est clairement surjective (par définition de H). Montrons qu'elle est injective. Si $\phi(g) = \phi(h)$ alors $T_g = T_h$. En particulier,

$$g = ge = T_g(e) = T_h(e) = he = h.$$

Aussi,

$$\phi(gh) = T_{gh} = T_g \circ T_h = \phi(g)\phi(h)$$

puisque pour chaque $x \in G$

$$T_{gh}x = (gh)x = g(T_h x) = T_g \circ T_h(x).$$

L'application ϕ est donc un isomorphisme. $\square$

Exercice 5.2. *Construire explicitement un isomorphisme entre le groupe dihédral D_3 et un sous-groupe de $S_6 = Sym\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.*