RELATIONS D'ÉQUIVALENCE. ENFIN $\mathbb{Z}_p$!

ALEXANDRE GIROUARD

6. Relation d'équivalence

Soit E un ensemble. Un sous-ensemble $R \subset E \times E$ est appelé une *relation d'équivalence* s'il vérifie les conditions suivantes :

(1) pour chaque $a \in E$, $(a, a) \in R$,
(2) si $(a, b) \in R$ alors $(b, a) \in R$,
(3) si $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$ alors $(a, c) \in R$.

On notera aRb plutôt que $(a, b) \in R$. Diverses autres notations seront utilisées selon le contexte : $a \sim b$, $a \cong b$, $a \equiv b$ et même $a = b$.

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. La *classe d'équivalence de* $a \in E$ est le sous-ensemble

$$[a] = \{b \in E \,:\, a \sim b\}.$$

Une *partition* de E est une famille de sous-ensembles non-vides disjoints de E dont l'union est E.

Proposition 6.1. *Soit une relation d'équivalence sur un ensemble E. Les classes d'équivalence forment une partition de E.*

Exercice 6.2. *Montrez que pour chaque partition P d'un ensemble E, il existe une relation d'équivalence dont les classes sont les sous-ensembles de cette partition.*

6.1. Quelques exemples.

– Sur tout ensemble, l'égalité est une relation d'équivalence.
– Sur $M_n(\mathbb{R})$,
$$A \sim B \Leftrightarrow \exists T \in GL(n, \mathbb{R}) : B = TAT^{-1}$$
– Soit E l'ensemble des polygones dans le plan $\mathbb{R}^2$, la relation :
$$A \sim B \Leftrightarrow \text{il existe } \psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) \text{ telle que } \psi(A) = B$$
est une relation d'équivalence.

Exercice 6.3. *Soit E un ensemble. Est-ce que $R = E \times E$ est une relation d'équivalence ? Si oui, quelles sont ses classes d'équivalence ?*

Exercice 6.4. *Est-ce que $a \sim b \Leftrightarrow a \leq b$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$? Si oui, quelles sont ses classes d'équivalence ?*

Exercice 6.5. *Soit D une droite du plan $\mathbb{R}^2$ contenant l'origine. Montrez que la relation*

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in W$$

est une relation d'équivalence. Interpréter géométriquement les classes d'équivalence de cette relation.

7. Le groupe $\mathbb{Z}_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que

$$n\mathbb{Z} = \{nk \, : \, k \in \mathbb{Z}\}$$

est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation d'équivalence

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in n\mathbb{Z}.$$

L'ensemble des classes d'équivalence de cette relation est noté $\mathbb{Z}_n$.

Exercice 7.1. *Montrez que*

$$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], \cdots, [n-1]\}.$$

Sur $\mathbb{Z}_n$ on définit une opération de la manière suivante:

$$[a] + [b] = [a + b].$$

L'opération sur les classes est définie en utilisant des représentants des classes, il faut donc vérifier que cette définition ne dépend pas du choix des représentants. Si $[a'] = [a]$ et $[b'] = [b]$, on doit voir que $[a' + b'] = [a + b]$. Or, $[a'] = [a]$ signifie $a \sim b$. C'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a' = a + nk$. De même, il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $b' = b + nl$. On a donc

$$a' + b' = (a + nk) + (b + nl) = a + b + n(k + l).$$

Ceci signifie que $a' + b' \sim a + b$.

Proposition 7.2. *L'ensemble $\mathbb{Z}_n$ muni de l'opération $[a] + [b] = [a + b]$ est un groupe. Son élément neutre est $[0]$.*

Démonstration.

– Puisque $[0] \in \mathbb{Z}_n$, cet ensemble n'est pas vide.

– Soit $[a], [b], [c] \in \mathbb{Z}$. On utilise la définition de l'opération :

$$\begin{aligned}
([a]+[b])+[c] &= [a+b]+c \\
&= [(a+b)+c] = [a+(b+c)] \quad \text{par transitivité de l'addition dans } \mathbb{Z} \\
&= [a]+[b+c] \\
&= [a]+([b]+[c]).
\end{aligned}$$

– $[0]+[a] = [0+a] = [a]$ et $[a]+[0] = [a+0] = [a]$.
– $[a]+[-a] = [a+(-a)] = [0]$ et $[-a]+[a] = [(-a)+a] = [0]$.

$\square$

Ce groupe est abélien.

Exercice 7.3.
– *Quel est le sous-groupe de $\mathbb{Z}_7$ engendré par $[4]$?*
– *Quel est le sous-groupe de $\mathbb{Z}_8$ engendré par $[4]$?*
– *Quels sont tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}_7$?*
– *Quels sont tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}_8$?*

Exercice 7.4. *Montrez que le groupe $\mathbb{Z}_4$ est isomorphe à un sous-groupe du groupe dihédral D_4.*

Exercice 7.5. *Dressez la liste de tous les sous-groupes de S_3. Certains de ces sous-groupes sont-t-ils isomorphes entre eux ?*