CLASSES LATÉRALES

ALEXANDRE GIROUARD

8. Classes lattérales d'un sous-groupe

Soit G un goupe et H un sous-ensemble de G. Étant donné $a \in G$, on notera

$$aH = \{ah \,:\, h \in H\},$$
$$Ha = \{ha \,:\, h \in H\}.$$

Lorsque H est un sous-groupe de G, aH est appelé la *classe latérale gauche de H contenant a.* De même Ha est la *classe latérale droite de H contenant a.*

Exemple 8.1. *Les classes latérales gauches du sous-groupe $H = \{(1),(13)\}$ de*

$$S_3 = \{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$$

sont :

$$(1)H = (13)H = H$$
$$(12)H = (132)H = \{(12),(132)\}$$
$$(23)H = (123)H = \{(23),(123)\}$$

Exemple 8.2. *Les classes latérales gauches de $H = \{id, \rho^2\}$ dans le groupe dihédral*

$$D_4 = \{id, \rho, \rho^2, \rho^3, R_1, R_2, R_3, R_4\}$$

sont ...

Exemple 8.3. *Les classes latérales gauches de $H = \{[0],[3],[6]\}$ dans le groupe cyclique $\mathbb{Z}_9$ sont ...*

Exercice 8.4. *Soit G le groupe multiplicatif des nombres complexes non-nuls.*

1. *Montrez que $H = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$ est un sous-groupe de G.*
2. *Montrez que les classes lattérales gauches de H dans G sont les cercles centrés en 0.*

Exercice 8.5. *Soit $G = GL(2, \mathbb{R})$ et $H = SL(2, \mathbb{R})$. Montrez que deux matrices $A, B \in GL(2, \mathbb{R})$ sont dans la même classe latérale gauche de H si et seulement si elles ont le même déterminant.*

Proposition 8.6. *Soit H un sous-groupe d'un groupe G. Soient $a, b \in G$. Alors,*

(1) $a \in aH$,
(2) $aH = H \iff a \in H$,
(3) $aH = bH \iff aH \cap bH \neq \emptyset$,
(4) $aH = bH\, a^{-1}b \in H$,
(5) $|aH| = |bH|$
(6) $aH = Ha \iff H = aHa^{-1}$,
(7) aH *est un sous-groupe de* H *si et seulement si* $a \in H$.

Démonstration. … □

Corollaire 8.7. *Soit H un sous-groupe d'un groupe G. Les classes latérales gauches de H forment une partition de G.*

Démonstration.

(1) Comme $a \in aH$, chaque classe latérale est non-vide.
(2) Le point (3) nous apprend qu'elles sont disjointes.
(3) Soit $a \in G$. Comme $a \in aH$, il est clair que l'union des classes latérales contient a. En d'autres mots, G est l'union des classes latérales de H.

□

Théorème 8.8 (Théorème de Lagrange)**.** *Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G. Alors l'ordre de H divise l'ordre de G.*

Démonstration. Comme les classes latérales de H forment une partition de G, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ et k classes latérales de H $a_1H, a_2H, \cdots, a_kH$ disjointes et telles que

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_kH.$$

Du fait que les ensembles a_jH soient disjoints on déduit

$$|G| = |a_1H| + |a_2H| + \cdots + |a_kH|.$$

Du point (5) de la proposition précédente, on déduit que pour chaque j, $|a_jH| = |H|$. On a donc $|G| = k|H|$. □

Exercice 8.9.

(1) *Soit G un groupe fini. Montrez que l'ordre de chaque élément $x \in G$ divise l'ordre de G.*
(2) *Soit G un groupe d'ordre premier. Montrez que les seuls-sous groupes de G sont $\{e\}$ et G.*
(3) *Soit G un groupe d'ordre p premier. Montrez que G est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$.*

Exercice 8.10. *Soit G un groupe et H un de ces sous-groupe. La cardinalité de l'ensemble des classes latérales de H dans G est appelé* indice de H dans G. *On le note $[G : H]$.*

(1) *Si G est un groupe fini, montrez que*
$$|G| = |H|[G : H].$$
(2) *Quel est l'indice du sous-groupe $H = \{(1), (13)\}$ dans S^3 ?*
(3) *Quel est l'indice du sous-groupe $19\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$?*