ANNEAUX ET CORPS

ALEXANDRE GIROUARD

11. Anneaux

Un ensemble A muni de deux opérations binaires (notée $a+b$ et ab) est un *anneau* si l'ensemble A muni de l'opération $+$ est un groupe Abélien. C'est-à-dire que pour chaque $a, b, c \in A$:

(1) $a+b=b+a$,
(2) $(a+b)+c=a+(b+c)$,
(3) Il existe $0 \in A$ tel que $a+0=a$,
(4) Il existe $-a \in A$ tel que $a+(-a)=0$;

et aussi pour chaque $a, b, c \in A$:

(4) $a(bc)=(ab)c$
(5) $a(b+c)=ab+ac$ et $(b+c)a=ba+ca$.

Un anneau A est *commutatif* si pour chaque $a, b \in A$, $ab=ba$. Il est *unital* si il existe un élément $1 \in A$ tel que pour chaque $a \in A$, $1a=a=a1$. Dans ce cas,un élément a est appelé une *unité* si il existe $a^{-1} \in A$ tel que $aa^{-1}=a^{-1}a=1$.

Exercice 11.1. *Soit A un anneau unital.*

- *Montrez l'unicité de l'identié 1.*
- *Soit a une unité. Montrez que son inverse est unique.*

Proposition 11.2. *Soit A un anneau unital. L'ensemble $U(A)$ de ses unités muni de l'opération de multiplication est un groupe.*

11.1. Quelques exemples.

Exemple 11.3. *Les nombres entiers $\mathbb{Z}$ forment un anneau unital. Le groupe de ces unités est*

$$U(\mathbb{Z})=\{1,-1\}.$$

Ce groupe est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}_2$ des entiers modulo 2.

Exemple 11.4. *L'ensemble* $\mathbb{Z}_n$ *des entiers modulo* n *est un anneau unital. Ses unités sont*

$$U(\mathbb{Z}_n) = U(n) = \{[m] : \text{pgdc(m,n)=1}\}.$$

Exemple 11.5. *Soit* $M_2(\mathbb{Z})$ *l'ensemble des matrices* 2×2 *à coefficients entiers. Cet ensemble forme un anneau unital lorsque muni de l'addition et de la multiplication matricielle. Son élément multiplicatif neutre est la matrice identité.*

Exemple 11.6. *L'ensemble* $\mathbb{Z}[x]$ *des polynômes à coefficients entier est un anneau unital. Quelles sont ces unités ?*

Exemple 11.7. *L'ensemble*

$$C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$$

est muni des opérations d'addition et de multiplication terme à terme :

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad (fg)(x) := f(x)g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

C'est un anneau unital. Son élément neutre additif est la fonction identiquement nulle. Son élément neutre multiplicatif est la fonction identiquement égale à 1.

Proposition 11.8. *Soit* A *un anneau. Soient* $a, b \in A$.

(1) $a.0 = 0.a = 0$,
(2) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$,
(3) $(-a)(-b) = ab$.

De plus, si A *est unital*

(4) $(-1)a = -a$,
(5) $(-1)(-1) = 1$.

Exercice 11.9. *Prouvez les points 4 et 5.*

11.2. **Sous anneau.** Un sous-ensemble S d'un anneau A est appelé un *sous-anneau* si la restriction des opérations de A à S en fait un anneau.

Proposition 11.10. *Soit* A *un anneau. Un sous-ensemble* $S \subset A$ *est un sous-anneau de* A *si et seulement si* $S \neq \emptyset$ *et pour chaque* $a, b \in S$

(1) $ab \in S$ *et*
(2) $a - b \in S$.

Exemple 11.11. *Les sous-ensembles* $\{0\}$ *et* A *d'un anneau* A *sont des sous-anneaux.*

Exemple 11.12. *L'ensemble* $\{[0],[2],[4]\}$ *est un sous-anneau de* $\mathbb{Z}_6$.

Exemple 11.13. *Pour chaque* $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$ *est un sous-anneau de* $\mathbb{Z}$.

Exemple 11.14. *L'ensemble*

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$$

des entiers de Gauss *est un sous-anneau de l'anneau des nombres complexes* $\mathbb{C}$.

Exemple 11.15. *L'ensemble* $S = \{f \in C(\mathbb{R}) \,:\, f(3) = 0\}$ *est un sous-anneau de* $C(\mathbb{R})$.

Exercice 11.16. *Est-ce que ce sous-anneau est unital ?*

Exemple 11.17. *L'ensemble des matrices diagonales à coefficents entiers est un sous-anneau de l'anneau* $M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.

Exemple 11.18. *L'ensemble* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{a + b\sqrt{2} \,:\, a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ *est un sous-anneau de* $\mathbb{R}$.

12. Corps

Un *corps* est un anneau commutatif unital dont tous les éléments non nuls sont des unités.

Exemple 12.1. *Vous connaissez déjà* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$.

Exercice 12.2. *L'anneau* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *est un corp.*

Exercice 12.3. *L'ensemble*

$$\mathbb{Z}_3[i] = \{a + bi \,:\, a, b \in \mathbb{Z}_3\}$$

(où $i^2 = -1 \in \mathbb{Z}_3$*) est un corps.*