TRANSFORMATIONS DE MÖBIUS

ALEXANDRE GIROUARD

12. Transformation de Möbius

On pose $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Le symbole ∞ n'a pas le sens habituel, c'est un symbole qu'on manipulera formellement. On aurait tout aussi bien pu le noter $\heartsuit$.

Étant donnés quatre nombres complexes $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$ on définit l'application $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ par :

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

avec les règles de manipulation $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$ et $\infty/\infty = 1$.

Remarque 12.1. *Si $c \neq 0$:*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \textit{pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\},$$
$$T(-d/c) = \infty, \ \textit{ et } T(\infty) = a/c.$$

Si $c = 0$:

$$T(z) = \frac{az+b}{d} \qquad \textit{pour } z \in \mathbb{C} \textit{ et } T(\infty) = \infty.$$

Si on représente les nombres a, b, c, d par une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

alors la condition $ad - bc \neq 0$ s'exprime simplement $\det(A) \neq 0$. C'est-à-dire que la matrice A est dans $GL_2(\mathbb{C})$.

On notera T_A la transformation de Möbius associée à la matrice $A \in GL_2(\mathbb{C})$.

Exemple 12.2. *Considérons $f(z) = \frac{z+2}{z}$, $g(z) = \frac{z+1}{z-1}$ et $h(z) = \frac{3z-1}{z+1}$. Montrons que $f(g(z)) = h(z)$.*

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, $g(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *et donc*

$$f(g(z)) = \frac{g(z)+2}{g(z)} = \frac{\frac{z+1}{z-1}+2}{\frac{z+1}{z-1}} = \frac{3z-1}{z+1} = h(z),$$

Aussi, $g(1) = \infty$ *et donc* $f(g(1)) = f(\infty) = 1 = h(1)$. *De plus,* $g(-1) = 0$ *et donc* $f(g(-1)) = f(0) = \infty = h(\infty)$. *Finalement* $g(\infty) = 1$, *d'où* $f(g(\infty)) = f(1) = 3 = h(\infty)$.

Exemple 12.3. *Les translations, les rotations et les réflexions sont des transformations de Möbius préservant le point* ∞. *L'inverstion* $1/z$ *est une transformation de Möbius.*

Il est clair que si on remplace a, b, c, d par les multiples $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d$ (ou $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) alors la transformation de Möbius associée ne change pas. La proposition suivante montre que c'est la seule manière de modifier les coefficients qui ne change pas la transformation.

Proposition 12.4. *Soient* $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ *tels que*

$$(ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0.$$

Supposons que

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}.$$

Alors, il existe un nombre $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tel que*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.5. *Soient*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ et } g(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

deux transformations de Möbius. Montrez que la composition $f \circ g$ *est la transformation de Möbius*

$$T(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$$

où les coefficients A, B, C, D *sont donnés par le produit matriciel*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

N'oubliez pas de faire attention aux divisions par zéros et au symbole ∞.

Théorème 12.6.

(1) *Une transformation de Möbius est une bijection de* $\mathbb{C}_\infty$.

(2) *L'ensemble* $\mathcal{M}$ *des transformations de Möbius muni de la composition est un groupe. Son élément neutre est l'application identité* $T(z) = z$. *L'inverse d'une transformation de Möbius*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

est donné par

$$T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}.$$

Remarque 12.7. *L'application* $\phi : GL_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}$ *définie par*

$$\phi(A) = T_A$$

est un homomorphisme. Cet homomorphisme est surjectif, mais pas injectif puisque pour chaque $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $T_{\lambda I} = T_I$ *est l'identité.*

Exercice 12.8. *Trouvez un sous-groupe de* $\mathcal{M}$ *isomorphes à* $\mathbb{Z}$.

Exercice 12.9. *Soit* T *une transformation de Moebius. Montrez qu'il existe des coefficents* a, b, c, d *tels que* $ad - bc = 1$ *tels que*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Exercice 12.10. *Soit* $f(z) = \frac{2z+1}{3z+4}$. *Exprimez* f *par une composition de rotations, dilatations, translations et inversions complexes.*

Exercice 12.11.

(1) *Quel est l'ordre du sous-groupe de* $\mathcal{M}$ *engendré par*

$$T(z) = \frac{1}{iz}?$$

(2) *Quel est l'ordre du sous-groupe de* $\mathcal{M}$ *engendré par*

$$T(z) = \frac{1}{\pi z}?$$