TRANSFORMATIONS DE MÖBIUS II

ALEXANDRE GIROUARD

13. Transitivité

Proposition 13.1. *Soient* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ *trois points distincts. Soient* $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ *trois points distincts. Il existe une unique transformation de Möbius* T *telle que*

$$T(z_j) = w_j \quad \textit{pour } j = 1, 2, 3.$$

14. Cercles généralisés

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r >$, un *cercle* est un ensemble de la forme

$$C = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - z_0| = r\}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Une droite est un ensemble de la forme

$$L = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - a| = |z - b|\}.$$

Définition 14.1. *Un* cercle généralisé *est un cercle* C *ou une droite à laquelle on ajoute l'infini* $L \cup \{\infty\}$.

Puisque la confusion régnait en classe, voici quelques détails.

Lemme 14.2. *Soient* $a, c \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{C}$. *L'équation*

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$$

représente un cercle si et seulement si $a \neq 0$ *et* $ac - b\bar{b} < 0$.

Démonstration. Observons que

$$\begin{aligned} az\bar{z} + bz + bz + \bar{b}\bar{z} + c &= a\left(z + b/a\right)\left(\bar{z} + \bar{b}/a\right) + c - b\bar{b}/a \\ &= a\left|z + b/a\right|^2 + c - b\bar{b}/a. \end{aligned}$$

L'équation $az\bar{z} + bz + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$ est donc équivalente à

$$a^2\left|z + b/a\right|^2 + ac - b\bar{b} = 0.$$

En particulier, elle représente un cercle si et seulement si $ac - b\bar{b} < 0$. $\square$

Théorème 14.3. *Soit T une transformation de Möbius et $\tilde{C}$ un cercle généralisé. Alors $T(C)$ est aussi un cercle généralisé.*

Démonstration. On a vu au cours précédent que T s'écrit comme la composition de translations, rotations, dilatations et de l'inversion $z \mapsto 1/z$. Il suffit donc de prouver le théorème pour $T(z) = 1/z$.

(Cas 1) $\tilde{C}$ est un cercle qui ne passe pas par l'origine.

Il est donc représenté par une équation de la forme

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$$

avec $ac - b\bar{b} < 0$ et $a, c \neq 0$. Posons $w = T(z) = 1/z$, de telle sorte que pour un point $w \in T(C)$ on ait

$$a + b\bar{w} + \bar{b}w + cw\bar{w} = 0.$$

Comme $a, c \neq 0$, cette équation représente aussi un cercle ne passant pas par l'origine.

(Cas 2) $\tilde{C}$ est un cercle qui passe par l'origine.

Il est donc représenté par une équation de la forme

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} = 0$$

avec $a, b \neq 0$. Pour $z \neq 0$, posons $w = T(z) = 1/z$, de telle sorte que

$$a + b\bar{w} + \bar{b}w = 0.$$

cette équation représente une droite ne passant pas par l'origine. D'autre part $T(0) = \infty$.

(Cas 3) $\tilde{C} = L \cup \{\infty\}$ est une droite généralisée.

On procède de manière similaire...

□

Exercice 14.4. *Trouvez $f(C)$ dans les cas suivants :*

(1) *(a)* $f(z) = 1/z$ *et* $C = \{x + iy \,:\, x + y = 1\} \cup \{\infty\}$.
(2) *(b)* $f(z) = iz/(z-1)$ *et* $C = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
(3) *(c)* $f(z) = iz/(z-1)$ *et* $C = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$.
(4) *(d)* $f(z) = (z+1)/(z-1)$ *et* $C = \mathbb{R} cup \{\infty\}$.

Exercice 14.5. *Montrez que la transformation*

$$f(z) = \frac{2z+3}{z-4}$$

envoie le cercle $|z-2i| = 2$ *sur le cercle* $|8z + (6+11i)| = 11$.

Exercice 14.6. *Trouvez toutes les transformation de Möbius qui envoient l'ensemble* $\{0, 1, \infty\}$ *vers lui même et montrez qu'elles forment un sous-groupe isomorphe à* S_3.