SOUS-GROUPES NORMAUX ET GROUPES QUOTIENT

ALEXANDRE GIROUARD

15. Conjugaison et sous-groupes normaux

Soit G un groupe. Deux éléments $x, y \in G$ sont *conjugués* si il existe $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$. La *classe de conjugaison* d'un élément $x \in G$ est l'ensemble

$$[x] := \{hxh^{-1} \, : \, h \in g\}.$$

Proposition 15.1. *La relation "être conjugué" est une relation d'équivalence.*

Deux sous-groupes H et H de G sont *conjugués* si il existe $g \in G$ tel que $K = gHg^{-1}$.

Définition 15.2. *Un sous-groupe $H < G$ est* normal *si pour chaque $g \in G$,*

$$gHg^{-1} = H.$$

On notera $H \lhd G$ pour indiquer que H est un sous-groupe normal de G.

Exemple 15.3. *Si G est Abélien, ses sous-groupes sont tous normaux.*

Exemple 15.4. *Soit $G = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$. Le sous-groupe $H = \{e, (12)\}$ n'est pas normal. Prenons par exemple $g = (123)$, on aura*

$$gH = \{(123), (123)(12)\} = \{(123), (13)\}$$

$$gHg^{-1} = \{(123)(132), (13)(132)\} = \{e, (23)\}.$$

Donc $gHg^{-1} \neq H$.

Proposition 15.5. *Soit H un sous-groupe de G. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *H est un sous-groupe normal de G,*
(2) *Pour chaque $g \in G$, $gHg^{-1} \subset H$.*
(3) *Pour chaque $g \in G$, $gH = Hg$.*

Exercice 15.6. *Montrez que le centre d'un goupe est un sous-groupe normal.*

Proposition 15.7. *Soit $\phi : G \to H$ un homomorphisme de groupes. Le* noyau *de ϕ est*

$$ker(\phi) = \{g \in G \,:\, \phi(g) = e_H\}.$$

C'est un sous-groupe normal.

Démonstration.
(1) C'est un sous-groupe.
(2) Il est normal. Soit $g \in G$, il faut montrer que si $x \in \ker(\phi)$ alors $gxg^{-1} \in \ker(\phi)$. En effet :

$$\phi(gxg^{-1}) = \phi(g)\overbrace{\phi(x)}^{e}\phi(g^{-1}) = \phi(gg^{-1}) = \phi(e) = e_H.$$

□

Exercice 15.8. *Soit $\phi : G \to H$ un homomorphisme. Montrez les choses suivantes :*

(1) *Pour chaque $g \in G$, $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$.*
(2) *L'image $\phi(G)$ est un sous-groupe de H.*
(3) *Montrez que ϕ est injectif si et seulement si $ker(\phi) = \{e_G\}$.*

16. Groupes quotients

Commençons par deux exemples où tout fonctionne très bien.

Exemple 16.1. *Soit $V = \mathbb{R}^3$ et W un sous-espace vectoriel de W de dimension 2. Sur V on définit une relation d'équivalence par $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in W$.*

On a vu que V est un groupe Abélien dont l'opération est $+$ et l'élément neutre est $0 \in V$. La classe d'équivalence $[x]$ est la classe latérale

$$[x] = \{x + y \,:\, y \in W\} = x + W.$$

C'est le "plan parallèle" à W contenant x.

L'ensemble des classes latérales est noté V/W. Sur cet ensemble on définit une opération $+$ par

$$[x] + [y] = [x + y].$$

Cette opération est bien défini. En effet, si $[x] = [x']$ et $[y] = [y']$ alors $x \sim x'$ et $y \sim y'$. Ceci signifie qu'il existe $w_x, w_y \in W$ tel que $x' - x = w_x$ et $y' - y = w_y$. On a donc

$$[x'] + [y'] = [x' + y'] = [x + y + \underbrace{(w_x - w_y)}_{\in W}] = [x + y].$$

L'ensemble des classes latérales V/W est un groupe Abélien.

(1) *Il est non-vide puisque $[0] \in V/W$.*
(2) *L'associativité de l'opération découle de celle l'opération dans V.*
(3) *L'élément neutre est $[0]$.*
(4) *L'inverse de $[x]$ est $[-x]$.*

Ce groupe est le groupe quotient de V par W.

Exemple 16.2. *Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, on a définit sur $\mathbb{Z}$ une relation d'équivalence $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in n\mathbb{Z}$. L'ensemble des classes d'équivalence de cette relation est un groupe, nous l'avons noté $\mathbb{Z}_n$. Tout comme dans l'exemple précédent, on aurait pu noter l'ensemble des classes d'équivalence $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$.*

Passons a une construction un peu plus abstraite. Soit G un groupe Abéllien dont l'opération est $+$ et le neutre est 0. Soit H un sous-groupe de G. Soit G/H l'ensemble des classes latérales de H dans G :

$$G/H = \{x + H \,:\, x \in G\}.$$

Sur G/H on définit une opération $+$ par

$$(x + H) + (y + H) = (x + y) + H.$$

De la même manière que dans les deux exemples précédent, on voit que cette opération est bien définie. En effet, si $x + H = x' + H$ et $y + H = y' + H$, alors il existe h_x et h_y tel que $x' = x + h_x$ et $y' = y + h_y$ et donc

$$(x' + y') + H = (x + y + h_x + h_y + H) = x + y + H.$$

L'ensemble G/H muni de cette opération est un groupe. C'est le groupe quotient de G par H. En effet :

(1) Il est non-vide puisque $[0] \in G/H$.
(2) L'associativité de l'opération découle de celle l'opération dans V.
(3) Son élément neutre est $[0]$.
(4) L'inverse de $[x]$ est $[-x]$.

Exemple 16.3. *Soit $G = \mathbb{Z}_6$, considérons le sous-groupe $H = \{0, 2, 4\}$. Ses classes lattérales sont*

$$\begin{aligned} 0 + H &= H, \\ 1 + H &= \{1, 3, 5\}. \end{aligned}$$

Le groupe G/H est donc constitué de ses deux éléments. Il est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$.

Le cas général. Notre but est de généraliser cette construction aux groupes qui ne sont pas Abéliens. Soit H un sous-groupe d'un groupe G dont l'opération est noté gh et l'élément neutre est 1. Notons G/H l'ensemble des **classes lattérales**[1] de H dans G.

Lemme 16.4. *Soit H un sous groupe normal de G. Si $x'H = xH$ et $yH = y'H$ alors*

$$(x'y')H = xy.H$$

Démonstration. Il existe $h_x, h_y \in H$ tels que $x' = xh_x$ et $y' = yh_y$. On aura donc

$$\begin{aligned} x'y'H = x'yh_xH &= x'yH \\ &= x'Hy \quad \text{par normalité} \\ &= xh_xHy \\ &= xHy = xyH \quad \text{par normalité.} \end{aligned}$$

□

Théorème 16.5. *Soit H un sous-groupe normal de G. L'ensemble des classes latérales de H dans G est noté G/H. L'opération*

$$G/H \times G/H \to G/H$$

définie par

$$(xH)(yH) = xyH$$

en fait un groupe.

---

[1]comme H est normal dans G, ses classes gauches et droites coincident

Démonstration. Cet ensemble n'est pas vide. Le fait que l'opération est bien définie découle du lemme précédent. D'autre part

(1) Étant donnés $xH, yH, zH \in G/H$,
$$\begin{aligned}((xH)(yH))zH &= (xyH)zH = ((xy)z)H \\ &= (x(yz))H = xH(yz)H = xH((yH)(zH)).\end{aligned}$$
(2) La classe H est l'élément neutre.
(3) L'inverse de gH est $g^{-1}H$.

□

Exercice 16.6.
(1) *Montrez que*
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \, : \, \theta \in [0, 2\pi[, b \in \mathbb{C} \right\}$$
est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.
(2) *Montrez que*
$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \, : \, b \in \mathbb{C} \right\}$$
est un sous-groupe normal de H.
(3) *Montrez que* K *n'est pas un sous-groupe normal de* $GL_2(\mathbb{C})$.
(4) *Soit* $h \in H$. *Montrez qu'il existe* $\theta \in [0, 2\pi[$ *tel que*
$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in hK.$$
(5) *Montrez que* H/K *est isomorphe à* $SO(1)$.

Exercice 16.7. *Soit* H *un sous-groupe normal d'un groupe* G. *On définit une application*
$$\pi : G \to G/H$$
par
$$\pi(g) = gH.$$

– *Montrez que* π *est un homomorphisme surjectif.*
– *Quel est le noyau de* π *?*

Exercice 16.8. *Soit* H *un sous-groupe d'un groupe* G. *Montrez que* H *est normal si et seulement si* H *est le noyau d'un homomorpshime.*