QUELQUES EXERCICES

ALEXANDRE GIROUARD

Exercice 17.1.

(1) *Soient G et H deux groupes. Montrez que l'ensemble*

$$G \times H = \{(g,h) \,:\, g \in G, h \in H\}$$

muni de l'opération

$$(g_1,h_1)(g_2,h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$$

est un groupe. C'est le produit *de G et H.*

(2) *Montrez que l'application $\phi : G\times H \to G$ définie par $\phi(g,h) = g$ est un homomorphisme.*

(3) *Quel est son noyau ?*

Exercice 17.2.

(1) *Un* automorphisme *d'un groupe G est un isomorphisme de G avec lui même. Soit $Aut(G)$ l'ensemble des automorphismes de G. Montrez que cet ensemble muni de la composition est un groupe.*

(2) *Quels sont les automorphismes de $\mathbb{Z}$?*

(3) *Quels sont les automorphismes de $\mathbb{Z}_n$?*

(4) *Étant donné $g \in G$, montrez que la conjugaison $\phi_g : G \to G$ définie par $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ est un automorphisme.*

(5) *Définissons $\Psi : G \to Aut(G)$ par $\Psi(g) = \phi_g$. Montrez que Ψ est un homomorphisme.*

(6) *Quel est le noyau de Ψ ?*

Exercice 17.3. *Soit p un nombre premier. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Utilisez le groupe des unités de l'anneau $\mathbb{Z}_p$ pour montrer que $a^{p-1}-1$ est divisible par p.*

Exercice 17.4. *Soit $\phi : G \to H$ un homomorphisme de groupe. Soit $K = ker(\phi)$.*

(1) *Montrez que si $g'K = gK$, alors $\phi(g') = \phi(g)$.*

(2) *Définissons $\psi : G/K \to H$ par $\psi(gK) = \phi(g)$. Montrez que ψ est un homomorphisme.*

(3) *Montrez que cet homomorphisme est injectif.*

(4) *En déduire que le groupe* G/K *est isomorphe au groupe* $\phi(G)$.