ENCORE DES EXERCICES

Les exercices marqués d'une étoile $\star$ sont optionels. Si vous désirez qu'ils soient corrigés, rendez-les à Alexandre Girouard. Ces exercices sont aussi sujet à examen.

Exercice 18.1. *($\star$) Soit G un groupe dont tous les éléments g vérifient $g^2 = e_G$. Montrez que G est abélien.*

Exercice 18.2. *($\star$) Soit G un groupe. Soit H un sous-groupe de G. Montrez que si l'indice de H dans G est deux, alors H est normal.*

Exercice 18.3. *($\star$) Soit G un groupe et E un ensemble non vide.*

(1) *Donnez à l'ensemble $M(E,G)$ des fonctions de E dans G la structure d'un groupe.*
(2) *Si G est abélien, ce nouveau groupe l'est-t-il aussi ?*
(3) *Si E ne contient qu'un élément, montrez que $M(E,G)$ est isomorphe à G.*
(4) *Si $E = \{1,2\}$ montrez que $M(E,G)$ est isomorphe au produit direct $G \times G$.*
(5) *Si G est simple, le groupe $M(E,G)$ l'est-t-il aussi ?*

Exercice 18.4. *Soit $G = GL_n(\mathbb{R})$ et $H = SL_n(\mathbb{R})$.*

(1) *Montrez que H est un sous-groupe normal de G.*
(2) *Montrez que G/H est isomorphe au groupe multiplicatif des nombres réels non-nuls.*

Exercice 18.5. *Soient G, H, K des groupes. Soient $\phi : G \to H$ et $\psi : H \to K$ des homomorphismes.*

(1) *Montrez que la composition $\psi \circ \phi$ est aussi un homomorphisme.*
(2) *Si ϕ et ψ sont des isomorphismes, montrez que $\psi \circ \phi$ est un isomorphisme.*
(3) *Montrez que*

$$ker(\psi \circ \phi) = \phi^{-1}(ker(\psi))$$

(4) *Si ϕ et ψ ne sont pas des isomorphismes, est-ce qu'il se peut que $\psi \circ \phi$ soit un isomorphisme ?*

Exercice 18.6. *($\star$) Cet exercice fait suite à l'exercice 17.2. Un automorphisme $x \mapsto \phi_g(x) = gxg^{-1}$ est appelé un* automorphisme interne.

(1) *Montrez que l'ensemble Inn(G) des automorphismes internes est un sous-groupe normal de Aut(G).*
(2) *Soit $Z(G)$ le centre du groupe G. Montrez que $G/Z(G)$ est isomorphe à Inn(G).*

Exercice 18.7. *($\star$) Soit V un espace vectoriel réel de dimension n finie.*

(1) *Montrez que l'ensemble $GL(V)$ des applications linéaires inversibles de V dans lui-même est un groupe lorsque muni de la composition.*
(2) *Montrez que ce groupe est isomorphe à $GL_n(\mathbb{R})$. Pensez à utiliser une base de V !*

Exercice 18.8. *Soit H et K des sous-groupes d'un groupe G. Supposons que*

- $HK = G$,
- $H \cap K = \{e_G\}$
- *chaque $h \in H$ et $k \in K$ vérifient $hk = kh$.*

Montrez que G est isomorphe au produit direct $H \times K$.