ENCORE DES EXERCICES

Les exercices marqués d'une étoile $\star$ sont optionels. Si vous désirez qu'ils soient corrigés, rendez-les à Alexandre Girouard. Ces exercices sont aussi sujet à examen.

Exercice 19.1. *Décidez de l'isomorphisme de chacune des paires de groupes parmi les suivants :*

$$\mathbb{R}/4\mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad D_4.$$

Exercice 19.2. *($\star$) Soit $U(32)$ le groupe des unités de $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$. Soit $H = \{[1], [17]\}$.*

(1) *Montrez que H est un sous-groupe abélien de $U(32)$.*
(2) *Quel est son indice ?*
(3) *Montrez que le groupe quotient $U(32)/H$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Exercice 19.3. *Dans le groupe Dihédral D_4, considérez le sous-groupe $H = \{e, R\}$ où R est une rotation d'angle π.*

(1) *Montrez que ce sous-groupe est normal.*
(2) *Donnez la table de multiplication du groupe quotient D_4/H.*

Exercice 19.4. *($\star$) Déterminez le groupe $Inn(D_4)$ des automorphismes internes du groupe Dihédral D_4. En particulier, donnez sa table de multiplication.*

Exercice 19.5. *Considérez l'application $\phi : S_3 \to GL_3(\mathbb{R})$ définie par permutation des colonnes de la matrice identité :*

$$\phi(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\phi(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi(13) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi(123) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi(132) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) *Montrez que ϕ est un homomorphisme.*
(2) *L'application $\psi : GL_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ définie par $\psi(A) = det(A)$ est aussi un homomorphisme. Quel est le noyau de l'homomorphisme*

$$\psi \circ \phi : S_3 \to \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ ?}$$

Exercice 19.6. *($\star$) Répétez l'exercice précédent pour S_4 et $GL_4(\mathbb{R})$.*