THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
EXERCICES 1

Théorème (Fermat 1640 – Euler 1754)
Un nombre premier $p \neq 2$ est somme de deux carrés si et seulement si $p \equiv 1 \bmod 4$.

Exercice 1. *Le but de ce premier exercice est de prouver ce théorème.*

La preuve de l'implication directe est facile.

*Il existe plusieurs preuves de la réciproque, la première étant bien sur celle d'Euler. Nous verrons ici une preuve très courte dû à Don Zagier (1951–**). Cette preuve a été publiée en 1990 dans un très court article intitulé "A One-Sentence Proof That Every Prime $p \equiv 1(mod\ 4)$ Is a Sum of Two Squares". Voici une traduction libre cette preuve :*

L'involution de l'ensemble fini $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \,:\, x^2 + 4yz = p\}$ définie par

$$(x, y, z) \mapsto \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z) & \text{si } x < y - z \\ (2y - x, y, x - y + z) & \text{si } y - z < x < 2y \\ (x - 2y, x - y + z, y) & \text{si } x > 2y \end{cases}$$

a exactement un point fixe, donc $|S|$ est impair et l'involution définie par $(x, y, z) \mapsto (x, z, y)$ a aussi un point fixe.

Votre exercice consiste à comprendre cette preuve et en particulier à vérifier les affirmations qui ont été faites.

(1) *Montrez que l'ensemble S est fini.*
(2) *Montrez que l'application est bien définie. En particulier, pourquoi suffit-il d'utiliser des inégalité stricte dans sa définition ?*
(3) *Montrez que c'est une une involution.*
(4) *Montrez que cette involution a exactement un point fixe. Vous devrez utilisez l'hypothèse $p \equiv 1 \bmod 4$.*
(5) *Montrez qu'un ensemble fini admettant une involution avev un seul point fixe est de cardinalité impaire.*
(6) *Montrez que chaque involution sur un ensemble de cardinalité impaire admet un point fixe.*

Exercice 2.

(1) *Montrez qu'il y a une infinité de premiers* $\equiv 5$ *mod 6.*

(2) *En utilisant le théorème de Fermat–Euler, montrez que si* p *divise* $x^2 + y^2$, *alors ou bien* p *divise* x *et* y, *ou bien* $p \equiv 1$ *mod 4.*

***Indication**: à la période d'exercices, j'ai indiqué une méthode pour résoudre ce problème en utilisant les entiers Gaussiens. Il y a une solution plus simple. Dans* $\mathbb{F}_p$, *multipliez* $x^2 + y^2$ *par l'inverse multiplicatif de* x. *Vous obtiendrez un élément d'ordre 4. Utilisez ensuite le théorème de Lagrange.*

(3) *En déduire que, si* N *est impair, tout diviseur premier* p *de* $N^2 + 4$ *est congru à* 1 *mod 4.*

(4) *Adapter la preuve d'Euclide pour montrer qu'il y a une infitnité de permiers congrus à 1 mod 4.*

Exercice 3. *Montrez que la convergence uniforme d'une suite de fonctions holomorphes implique que la limite est aussi holomorphe.*

Exercice 4. *Montrez les implications directes des affirmations suivantes de Fermat : Soit* p *un nombre premier.*

(1) *Si* $p \neq 3$, *alors l'équation* $p = x^2 + 3y^2$ *a une solution si et seulement si* $p \equiv 1$ *mod 6.*

(2) *Si* $p \neq 2$, *alors l'équation* $p = x^2 + 2y^2$ *a une solution si et seulement si* $p \equiv 1$ *ou 3 mod 8.*

Exercice 5. *Étant donnée* S *une partie finie de l'ensemble* P *des nombres premiers, on note* $N(S)$ *l'ensemble des nombres naturels dont la factorisation en facteurs premiers ne fait intervenir que des permiers de* S. *Montrez que*

$$\Pi_{p\in S}(1 - \frac{1}{p^s})^{-1} = \sum_{n\in N(S)} \frac{1}{n^s}.$$

Exercice 6. *Trouvez le rayon de convergence de la série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}.$$

Exercice 7. *Montrez que la limite*

$$\lim_{N\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{N}-\log(N)\right|$$

est finie.

Exercice 8. *On définit la* densité *d'un sous-ensemble $A \subset \mathbb{N}$ par*

$$d(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{\#\left(A\cap\{1,2,\cdots,n\}\right)}{n}.$$

Quelle est la densité des ensembles suivants :

(1) *Les entiers naturels $\mathbb{N}$.*
(2) *Les carrés $\{n^2 \,:\, n\in\mathbb{N}\}$.*
(3)* *Les nombres premiers P.*
4 *Les membres d'une progression arithmétique*

$$\{a+kN \,:\, k\in\mathbb{N}\}.$$

Exercice 9. *Soit N un entier non nul. Montrez qu'un nombre entier a est premier avec N si et seulement si a est inversible dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.*

Exercice 10. *Étant donné un caractère*

$$\chi : G(N) := (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}$$

montrez que la fonction L de Dirichlet

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

est holomorphe sur $Re(s)>1$.

Exercice 11. *Étant donné un charactère χ sur $G(N)$, montrez l'existence d'une fonction ψ_χ continue et bornée sur $Re(s)\geq 1$, holomorphe sur $Re(s)>1$ et telle que*

$$\sum_{p\in P}\frac{\chi(p)}{p^s}+\psi_\chi(s)$$

est une branche holomorphe du log *de $L(s,\chi)$ sur $Re(s)>1$.*