THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
EXERCICES 2

Exercice 1. *Soit* ϕ *un homomorphisme d'un groupe* G *vers* $\mathbb{C}^*$.

- *Si* G *est fini, montrez que* $|\phi(g)| = 1$ *pour chaque* $g \in G$.
- *Donnez un exemple montrant que ceci n'est pas necessairement vrai si* G *est infini.*
- *Y a-t-l des groupes infinis pour lesquelles ceci reste vrai ?*

Exercice 2. *Soit* G *un groupe abélien fini. Montrez que l'ensemble de ses caractères est fini.*

Exercice 3. *Soit* G *un groupe abélien fini. Montrez que l'ensemble* $\hat{G}$ *de ses caractères est aussi un groupe abélien lorsque muni du produit ponctuel :étant donnés* $\chi, \eta \in \hat{G}$,$\chi \cdot \eta : G \to \mathbb{C}^*$ *est défini par*

$$(\chi \cdot \eta)(g) = \chi(g)\eta(g).$$

Exercice 4. *On note*

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{Z} \, : \, |z| = 1\}$$

muni de sa structure multiplicative. Soit $f : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ *un homomorphisme de groupe.*

- *Montrez que si* f *est continue, alors il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que*

$$f(x) = \exp\left(\frac{2\pi i k x}{T}\right) \quad \forall x.$$

- *Si* f *n'est pas continue, est-ce que cette affirmation reste vraie ?*