

**THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES**  
**EXERCICES 3**

**Exercice 1.** Soit  $x$  un élément d'ordre  $d$  dans un groupe abélien fini  $G$ . Soit  $\omega \in \mathbb{T}$  une racine  $d$ -ième de l'unité. Montrez qu'il y a exactement  $|G|/d$  caractères  $\chi \in \hat{G}$  tels que  $\chi(x) = \omega$ .

**Exercice 2.** Soit  $G$  un groupe abélien d'ordre  $n$ . Soit  $x \in G$ . Montrez que dans l'anneau de polynômes  $\mathbb{C}[X]$ , l'identité suivante est vérifiée :

$$\prod_{\chi \in \hat{G}} (1 - \chi(x)X) = (1 - X^d)^{n/d}.$$

**Exercice 3.** Soit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  des suites de nombres complexes. Montrez la formule d'Abel :

$$\sum_{n=m}^{m'} a_n b_n = \left( \sum_{n=m}^{m'} a_n \right) b_{m'} + \sum_{n=m}^{m'-1} \left( \sum_{k=m}^n a_k \right) (b_n - b_{n+1})$$