

THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
EXERCICES 4

Exercice 1. Soient G, H des groupes abéliens finis. Montrez que

$$\widehat{G \times H} \cong \hat{G} \times \hat{H}.$$

Exercice 2. Montrez que $\hat{\hat{G}} \cong G$. (Pensez à plonger G dans $\hat{\hat{G}}$).

Exercice 3.

- (1) Explicitez $L(s, \chi_0)$ pour $N = 2, 3$.
- (2) Explicitez $L(s, \chi)$ pour $N = 3, 4$, lorsque $\chi \neq \chi_0$. Montrez directement que $L(1, \chi) \neq 0$.
- (3) Pour $N = 4$, et $\chi \neq \chi_0$, montrez que $L(1, \chi) = \pi/4$.

Exercice 4. Montrez que le seul caractère réel non trivial de \mathbb{F}_p^* est

$$n \mapsto \left(\frac{n}{p} \right).$$

Exercice 5. Montrez que

$$\left(\frac{2}{p} \right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Exercice 6. Expliquez pourquoi le crible d'Ératostène fonctionne.