

THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
EXERCICES 5

Exercice 1. Montrez que la fonction $Li : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$Li(x) = \int_2^x \frac{du}{\log(u)},$$

vérifie $Li(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$.

Exercice 2. Rappelons que la fonction de Mangoldt $\Lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{si } n = p^k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrez que si $\operatorname{Re}(s) > 1$, alors

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Indication: La dérivée logarithmique d'une fonction f est donnée par l'expression $(\log(f))' = f'/f$. Utilisez celle du produit Eulerien de la fonction ζ .

Exercice 3. Si f est une fonction qui a un pôle simple de résidu 1 en $1 \in \mathbb{C}$, montrez que $f(z)/z$ a aussi un pôle simple de même résidu en ce point.

Exercice 4. Calculez les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} y \mapsto 1, \quad y \mapsto y^n, \quad y \mapsto \sin(cy) \\ y \mapsto e^{-\alpha y}, \quad \text{où } \alpha > 0. \end{aligned}$$