

THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES  
EXERCICES 7

**Exercice 1.** Montrez que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du = \pi.$$

**Exercice 2.** Montrez que pour chaque  $\alpha > 0$ ,

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{it(x-y)} \left(1 - \frac{|t|}{\alpha}\right) dt = \frac{4 \sin^2\left(\frac{\alpha(x-y)}{2}\right)}{\alpha(x-y)^2}.$$

**Exercice 3.** Le but de cet exercice est de démontrer le théorème des restes chinois. Soient  $m, n \in \mathbb{Z}$  premiers entre eux.

– Pour chaque  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ , montrez qu'il existe  $x \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\begin{cases} x \equiv \alpha \pmod{m}, \\ x \equiv \beta \pmod{n}. \end{cases} \quad (0.1)$$

Montrez que cette solution est unique modulo  $mn$ .

– Étant donnés  $x, k \in \mathbb{Z}$ , on note  $[x]_k$  la classe de  $x$  dans  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ . Montrez que l'application  $\phi : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  définie par

$$\phi([x]_{mn}) = ([x]_m, [x]_n)$$

est un isomorphisme d'anneaux.

– Généralisez les deux points précédents au cas d'un nombre fini arbitraire de congruences.