THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
EXERCICES 8

Exercice 1. *Montrez que la fonction* Θ *définie par* $\Theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z}$ *est holomorphe sur le demi plan* $Im(z) > 0$.

Exercice 2. *Montrez que pour chaque* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re(s) > 0$,

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Exercice 3. *Montrez que pour chaque* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $0 < Re(s) < 1$,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

Quelques indications :

(1) Écrivez le produit $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$ comme une intégrale double sur le premier cadran.

(2) Substituez les variables apparaissant dans l'exponentielle par des carrés, puis passez en coordonnées polaires pour obtenir

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = 2\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^{2s-1} d\theta.$$

(3) Utilisez le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$ pour vous ramenez à

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^s \frac{1}{t}\, dt.$$

(4) Utilisez le changement de variable $u = \frac{t}{1-t}$ pour obtenir

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{(1+u)}\, du$$

(5) Appliquez la méthode du calcul des résidus en utilisant le contour donné par deux cercles concentriques joints par une fente le long de l'axe réel positif.