THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
EXERCICES 9

Exercice 1.

(1) *Montrez que* $SL_2(\mathbb{R})$ *agit par bijections holomorphes sur le demi plan*

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, Im(z) > 0\}$$

par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}.$$

(2) *Montrez que*

$$\Gamma_0(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \,:\, a \equiv d \equiv 1 \ mod\ 2, b \equiv c \equiv 0 \ mod\ 2 \right\}.$$

est le noyau de l'homomorphisme de réduction modulo 2 :

$$SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

$\star$(3) *Montrez que la fonction* θ *de Jacobi est une forme automorphe de poids* $1/2$ *par rapport à* $\Gamma_0(2)$*, c'est-à-dire que pour chaque* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2)$,

$$\theta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{1/2}\theta(z).$$

Exercice 2. *Montrez que* $\zeta(0) = -1/2$.
Pensez à calculer le résidu de la fonction Γ *en 0.*

Exercice 3. *Montrez que la fonction* μ *de Möbius est multiplicative, c'est-à-dire que pour chaque* $m, n \in \mathbb{N}$ *premiers entre eux,*

$$\mu(mn) = \mu(m)\mu(n).$$

Exercice 4. *Montrez que pour* $Re(s) > 1$*,*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Pensez à utiliser le produit Eulérien et l'exercice précédent.

Exercice 5. *Les nombres de Bernoulli* B_n $(n \in \mathbb{N})$ *sont les coefficents du développement en série de puissances de la fonction* $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$*. C'est-à-dire :*

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

(1) *Montrez que* $B_0 = 1, B_1 = -1/2, B_2 = 1/6, B_3 = 0$.
(2) *Montrez que pour chaque* $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathbb{Q}$.
(3) *Montrez que*

$$z \mapsto \frac{z}{e^z - 1} + z/2$$

est une fonction paire et en déduire que pour chaque $n \geq 1$, $B_{2n+1} = 0$.