THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

Indications pour le problème 4 de la deuxième série.

(1) Montrez que la fonction exp est injective sur

$$U = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |\mathrm{Im} z| < 1\}$$

(2) Montrez que tout

$$z \in V = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re} z > 0\} \cap \exp(U)$$

admet une unique racine carrée dans V.

(3) Soit $\epsilon > 0$ tel que $f([-\epsilon, \epsilon]) \subset V$. On écrit $f(\epsilon) = e^{\lambda}$ pour un unique $\lambda \in U$. Montrez par récurrence sur n que

$$f(\frac{\epsilon}{2^n}) = \exp(\frac{\lambda}{2^n}).$$

Pour $n = 1$, utilisez le fait que $f(\epsilon/2)$ est une racine carrée de $f(\epsilon)$.

(4) Montrez que pour tout rationnel dyadique $\frac{k}{2^n}$ (avec $0 \leq k \leq 2^n$), on a

$$f(\frac{k\epsilon}{2^n}) = \exp(\frac{k\lambda}{2^n}.$$

(5) Montrez que pour $t \in [0, 1]$,

$$f(t\epsilon) = \exp(t\lambda).$$

(6) Montrez que pour chaque $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \exp(\frac{\lambda}{\epsilon}x).$$