THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
LA MÉTHODE PAR RÉSIDUS POUR L'EXERCICE 3

On pose $c = s - 1 \in (-1, 0)$ et on considère la fonction $f(z) = \frac{z^c}{1+z}$, où pour $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \neq 0$,

$$z^c = \exp c \log(z) = \exp(\log(r) + i\theta) = r \exp(i\theta)$$

C'est-à-dire la branche du logarithme définie sur le plan complexe privé du demi axe $\mathbb{R}_+$.

Du théorème des résidus, on déduit que pour chaque R assez grand,

$$\begin{aligned}
2\pi i(-1)^c &:= 2\pi i \exp(i\pi c) \\
&= \int_0^R \frac{r^c}{1+r}\, dr + \int_0^{2\pi} \frac{R^C \exp(ic\theta)}{1 + R\exp(i\theta)}\, Ri\exp(i\theta) d\theta \\
&\qquad + \int_R^0 \frac{r^c \exp(i2\pi c)}{1+r}\, dr \\
&= \int_0^R \frac{r^c}{1+r}\, dr\, (1 - \exp(i2\pi c)) + \int_0^{2\pi} \frac{iR^{C+1}\exp(i(c+1)\theta)}{1 + R\exp(i\theta)}\, d\theta
\end{aligned}$$

Le terme de droite tend vers 0 avec $R \to \infty$. On a donc :

$$\int_0^\infty \frac{r^c}{1+r}\, dr = \frac{2\pi i \exp(i\pi c)}{1 - \exp(i2\pi c)}$$

et il ne reste qu'à simplifier et utiliser $c = 1 - s$.