

## De la religion à l'algèbre:

### problèmes de partages successoraux selon les lois islamiques

Ezzaim Laabid

#### Introduction

La résolution des problèmes de partage fournit l'occasion à des réflexions et des activités mathématiques depuis l'Antiquité. En Mésopotamie par exemple, les Babyloniens manipulent, à travers la résolution des problèmes d'héritage, des algorithmes et des formules algébriques qui d'un point de vue moderne s'interprètent comme étant la résolution des équations et des systèmes d'équations linéaires<sup>1</sup>. Dans la civilisation arabo-musulmane, cette question d'héritage revêtait une grande importance. En effet, au-delà de l'aspect social inhérent au partage des héritages, en Islam, les lois qui régissent ce partage émanent de la religion.

L'Islam a codifié les règles de dévolution d'une succession. Ainsi, les quote-parts de certains héritiers sont préalablement fixées. Mais, la détermination des quote-parts des autres héritiers dépend de l'interaction de deux échelles hiérarchiques: l'une, que l'on peut qualifier de verticale, repose sur le type de descendance ou d'ascendance et l'autre, horizontale, se base sur le degré de parenté. De plus, dans certaines situations, ces règles se compliquent en s'emboîtant. C'est le cas par exemple d'un héritier qui meurt avant le partage d'un héritage; sa part doit être partagée parmi ses propres héritiers, mais, parmi ceux-ci, certains peuvent être des héritiers de la première personne défunte, entraînant ainsi la nécessité d'un recalcul de la répartition.

La complexité et l'emboîtement de ces règles et leur caractère religieux ont contribué au développement d'un des grands domaines des mathématiques appliquées de la tradition arabe, il s'agit des partages successoraux. Ces partages ont suscité beaucoup d'intérêt chez les mathématiciens arabes en ce sens où plusieurs parmi eux leur ont consacré des ouvrages et des commentaires. Ainsi, les problèmes des héritages et des testaments occupent un peu plus de la moitié du livre écrit, au 9<sup>e</sup> siècle par le célèbre mathématicien arabe Al-Khwarizmi, et intitulé: *Al-kitāb al-muhtasar fi hisāb al-jabr wa I-muqabala* (Bref ouvrage sur le calcul d'algèbre et al-muqabala)<sup>2</sup>.

Il faut préciser toutefois que les mathématiciens traitent dans ce domaine, non seulement les problèmes «utiles» dans la vie quotidienne, mais aussi des problèmes ne correspondant pas forcément à des situations réelles et que l'on peut qualifier de «théoriques». La mathématique générée par les lois successorales comprend donc deux aspects: un aspect utilitaire qui traite des problèmes courants liés à la vie quotidienne des gens et dont les procédures de résolution relèvent principalement de l'arithmétique<sup>3</sup>, et un aspect «théorique» qui vise, en plus de la résolution des problèmes «utiles», l'application des méthodes arithmétiques, algébriques et géométriques.

1 Neugebauer (1957), p. 44

2 Berggren (1986) p. 63 et Youschkevitch (1976) p. 34.

#### 1. Codification des héritages dans la société musulmane

L'instauration d'un état islamique, à partir de l'année 622<sup>4</sup>, amène des changements considérables à la vie des gens en Arabie. Ces changements sont dictés principalement par le Coran (le livre sacré de l'Islam, il est formé de 60 chapitres) et le Hadith (ou les traditions du prophète)<sup>5</sup>. De tels changements n'épargnent pas le côté social et en particulier la question des successions.

En effet, durant la période préislamique, la question des successions est marquée par deux faits importants. Le premier étant la prohibition à laquelle est sujette la femme; seuls les mâles ont, à cette époque, droit à la succession puisque c'est à eux que reviennent les charges de la famille et sa défense suivant le dicton: «Quiconque n'est pas en état de monter à cheval et de se servir d'une épée ne doit rien recevoir de l'héritage». Ainsi, la femme n'a, pour ainsi dire, pas de personnalité juridique. Dans la famille, seuls les mâles comptent; par exemple, au décès de son mari, une femme passe à ses héritiers avec les autres biens de la succession. Quant au second fait, une personne peut léguer ses biens à une autre à condition qu'elles concluent un pacte de fraternité, sans qu'il existe de lien de parenté entre elles.

À ce propos, la religion musulmane a pris deux dispositions fondamentales visant à sauvegarder à la fois et le droit individuel de disposer de ses biens et le devoir de chacun de ne pas léser la communauté dont il est membre et plus particulièrement sa famille. Ainsi, d'une part, elle a restreint la liberté de léguer par testament (ou donation). D'autre part, elle a rendu obligatoire la répartition des biens d'une personne défunte parmi ses proches y compris les femmes. Héritent donc automatiquement, dans des proportions prescrites et dans un ordre de priorité déterminé, toutes les personnes ayant un lien familial avec la personne défunte.

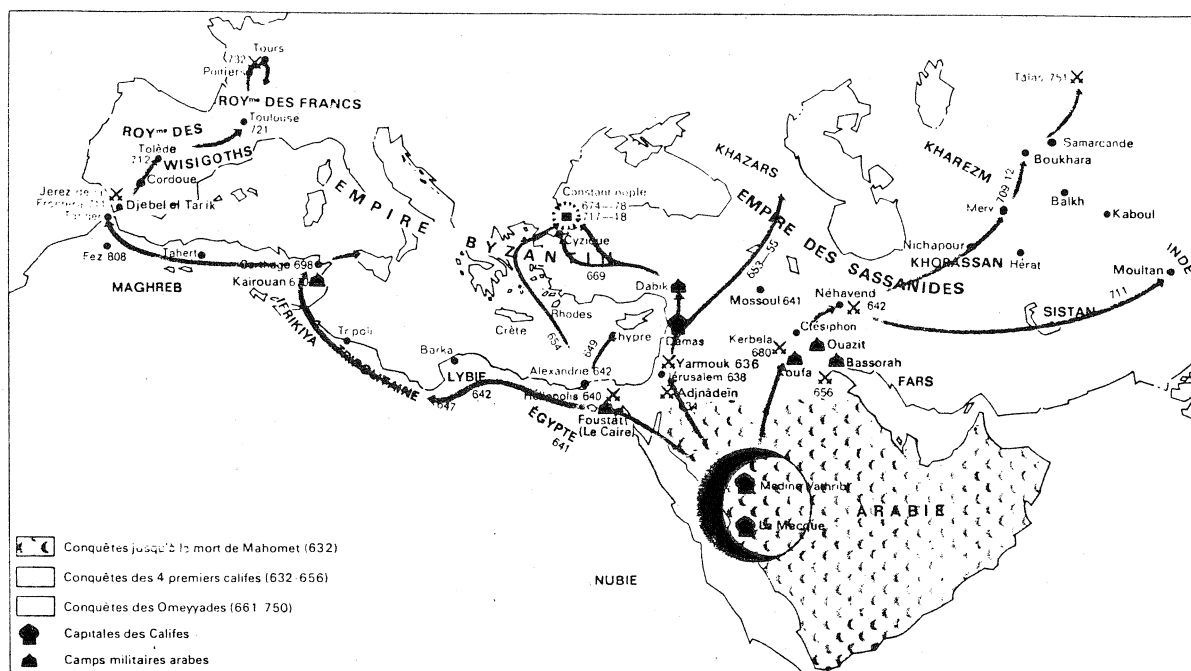
#### 2. Lois successorales selon l'Islam: héritages et donations

En Islam, une personne peut accéder à une succession soit par voie d'héritage, soit par voie de donation (ou legs ou testament). Si une personne y accède par la première voie, elle

3 Dans le monde musulman, on trouve encore des traces de ces procédures dans les manuels destinés à l'enseignement de cette discipline (science des héritages, *ilm al-faraid*). Cet enseignement se fait essentiellement dans les universités de théologie et de droit.

4 L'année 622 est l'année de l'émigration du prophète Mohammad de la Mecque à Médine. Elle est considérée comme la première année de l'ère islamique: l'année de l'Hégire.

5 Le Hadith est constitué des paroles, des actes du prophète et des actes que ce dernier aurait approuvés tacitement.



Expansion de l'Islam jusqu'en 750

sera dite «héritière»; mais si l'accès est fait selon la seconde voie, il s'agira plutôt «d'un bénéficiaire de donation».

## 2.1 Héritages

Nous illustrons certains principes concernant le partage des héritages, selon les lois islamiques, à travers quelques situations<sup>6</sup>.

Situation 1: un homme est décédé. Lui survivent son père, une épouse et un fils. L'épouse prend le 1/8 de l'héritage, le père en prend le 1/6 et le reste revient au fils.

Situation 2: une femme est décédée. Lui survivent sa mère, un fils et une fille. La mère reçoit le 1/6 de l'héritage, le reste est partagé entre le fils et la fille selon la règle «la part du mâle est égale au double de celle de la femelle».

Situation 3: un homme est décédé. Lui survivent son père, une épouse et un grand-père. L'épouse reçoit le 1/4 de l'héritage et le reste revient au père.

Situation 4: une femme est décédée. Lui survivent son époux, une fille et un frère consanguin (frère de père

seulement) et un fils d'un frère germain (frère de père et de mère). La fille reçoit le 1/2 de l'héritage, l'époux le 1/4 de l'héritage et le reste revient au frère consanguin.

Situation 5: une femme est décédée. Lui survivent son époux, un frère germain et un frère consanguin. L'époux reçoit le 1/2 de l'héritage et le frère germain reçoit le reste.

À partir de ces situations, on peut voir que les principes suivants s'appliquent:

I. Certains héritiers reçoivent des proportions de l'héritage fixées à l'avance. C'est le cas par exemple de l'épouse et du père dans la situation 1, de la fille dans la situation 4, de la mère dans la situation 2 et de l'époux dans la situation 5. Ces héritiers sont appelés des héritiers «à fard». **Un héritier «à fard» est un héritier dont la quote-part successorale est déterminée d'avance.** Un héritier «à fard» ne peut pas être exclu d'un héritage.

II. La quote-part de certains héritiers n'est pas préalablement fixée, mais ces derniers reçoivent le reste de la succession après les héritiers «à fard». Le fils dans la situation 1, le fils et la fille dans la situation 2, le père dans la situation 3 et le frère dans la situation 4 sont des exemples de ce cas. On les appelle des héritiers «Asabah». **Un héritier «Asabah» est celui dont la quote-part n'est pas fixée; il peut recevoir la totalité de l'héritage, ne rien recevoir ou recevoir ce qui reste après les héritiers «à fard».**

<sup>6</sup> Le lecteur intéressé par plus de détails pourra consulter: Hughes (1964), pp. 207-210 pour les héritages et pp. 667-669 pour les donations.

III. Selon la situation, certaines personnes reçoivent ou non une proportion fixée de l'héritage. Par exemple, le père dans la situation 1 reçoit le 1/6 de l'héritage, mais dans la situation 3, il reçoit ce qui reste après l'épouse. La fille dans la situation 4 reçoit le 1/2 de l'héritage alors que, dans la situation 2, elle partage avec son frère ce qui reste après la mère. Certaines personnes peuvent alors accéder à un héritage soit comme héritiers «Asabah», soit comme héritiers «à fard».

IV. Certaines personnes reçoivent une partie de l'héritage dans une situation alors que dans d'autres elles n'en reçoivent pas. Ainsi, dans la situation 5 le frère consanguin est exclu de l'héritage alors que, dans la situation 4, il a le reste après l'époux et la fille. Ceci s'explique par le fait que les héritiers «Asabah» sont répartis en classes hiérarchisées<sup>7</sup>. En plus, à l'intérieur de chaque classe, il y a une classification selon le degré de proximité et la force des liens parentaux avec la personne défunte. Par exemple, dans la situation 5, la présence du frère germain exclut le frère consanguin de l'héritage, car le premier est lié à la défunte par le père et la mère alors que le second est lui simplement lié par le père. Dans la situation 4, la présence du frère consanguin exclut le fils du frère germain car un frère est plus proche qu'un fils de frère.

## 2.2 Donations

Les donations sont soumises à des conditions portant à la fois sur les personnes susceptibles de recevoir un legs et la portion à léguer. Ainsi, une donation ne peut pas être attribuée à un héritier et ne doit pas dépasser le 1/3 de l'héritage. Toutefois, si la donation excède le 1/3 de l'héritage, les héritiers sont libres d'accepter ou de rejeter l'excès.

Il est utile de préciser que les héritiers, soit «à fard», soit «asabah» ne prennent leurs parts qu'après l'acquittement des frais funéraires, des dettes et des donations.

## 3. Mathématique successorale

Les problèmes mathématiques découlant de la question de succession sont de deux types: les problèmes d'héritage et les problèmes de donation. Un problème d'héritage est un problème dans lequel seuls des héritiers interviennent. Mais, un problème de donation est un problème où interviennent des bénéficiaires de donations et des héritiers. Généralement, des méthodes arithmétiques suffisent pour la résolution des problèmes des héritages alors que la résolution de certains problèmes de donations nécessite l'utilisation de procédés algébriques.

## 4. Arithmétique des héritages

Comme illustration de cette arithmétique, nous résolvons le problème découlant de la situation 2 ci-dessus comme l'aurait fait l'auteur d'un manuel destiné à l'enseignement des héritages (Cf. note 3). La résolution du problème revient au calcul des éléments du tableau:

	6	18
Mère	1	3
Fils	5	10
Fille	?	5

Comme la mère hérite 1/6, on choisit le nombre 6 et on fait le partage. La mère reçoit 1 et la loi nous dit que le reste, qui est 5, doit être partagé entre le fils et la fille suivant la règle «le mâle reçoit le double de la femelle». Mais, le partage de 5 entre la fille et le fils mène à une «brisure», le nombre 6 ne permet donc pas d'avoir un partage à parts entières, il faut le «corriger». Pour cela, on le multiplie par 3 (car c'est la division par 3 qui risque d'amener des fractions), on obtient 18, etc.

D'une façon générale, les méthodes de résolution des problèmes d'héritage, du moins celles utilisées dans ces manuels d'enseignement, contiennent deux étapes essentielles qui peuvent éventuellement se répéter selon la complexité de la situation envisagée. La première est ce qu'on appelle «*Ta'sil al-farida*» qui consiste à trouver un nombre permettant d'avoir pour les parts des héritiers «à fard» des nombres entiers. La seconde est «*Tashih al-farida*» qui revient à faire des corrections éventuelles si des fractions surgissent dans les calculs. En termes modernes, le procédé utilisé dans chacune de ces deux étapes revient à la recherche du P.P.C.M. de deux nombres entiers.

## 5. Algèbre des donations

Dans les problèmes de donation, les mathématiciens ne se limitent pas à la résolution des problèmes utiles dans la vie courante des gens. Mais ils construisent des problèmes s'éloignant de plus en plus de la réalité et dont les différentes formulations permettent d'appliquer des lemmes, des transformations particulières ou de se ramener à certains types d'équations<sup>8</sup>. Jouissant d'une marge de liberté dans le choix de la donation, les mathématiciens lui imposent des conditions qui semblent peu réalistes. Ce qui rend certains problèmes de donations beaucoup plus un jeu d'esprit que des problèmes représentant des situations concrètes. C'est vraisemblablement à cela que l'historien maghrebin du 14<sup>e</sup> siècle Ibn Khaldun<sup>9</sup> fait allusion lorsqu'il dit:

7. Par exemple, les 4 premières classes sont: les descendants mâles par les mâles (fils, fils du fils...), les ascendants mâles par les mâles (père, grand-père paternel, grand-grand-père paternel...), les frères et leurs descendants, les oncles et leurs descendants.

«Certains auteurs sont même portés à en (sciences des successions) exagérer l'aspect mathématique et à poser des problèmes qui ne peuvent résoudre que certaines branches de l'arithmétique, l'algèbre ou l'extraction des racines. (...) Mais ce sont là singularités, sans utilité pratique, en raison de la rareté des cas choisis. Elles contribuent cependant à entraîner l'esprit et à l'habituer à régler les problèmes habituels».

Cette «exagération» a eu pour conséquence le développement, au sein des mathématiques arabes, d'une algèbre qu'on peut appeler, avec Berggren (1986), l'algèbre des donations.

La présentation de deux méthodes de résolution d'un problème de donation tiré du manuscrit précité (Cf. note 8) fournit une illustration de cette algèbre.

Afin de rester proche du texte, on va adopter dans l'interprétation symbolique les notations suivantes: m pour mâl (bien, capital); p pour une part; d, d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub> pour des donations et x désigne ce que l'auteur appelle «chose».

#### Problème

Un homme a légué à un homme, une part égale à celle de l'un de ses fils et à un autre le tiers de ce qui reste du tiers de la succession après en avoir retiré une part. Il meurt en laissant trois fils.

#### Première méthode:

On prend la partie dont on doit prélever les deux donations, soit le tiers du mâl, et on en donne une part au premier bénéficiaire il reste le tiers du mâl moins une part.

On donne pour la seconde donation le tiers de ceci, ce qui est le neuvième du mâl

Il reste du tiers du mâl après la première donation:

$$1/3 m - d_1 = 1/3 m - p.$$

La seconde donation est:

$$d_2 = 1/3 (1/3 m - p) = \frac{1}{9} m - 1/3 p.$$

moins le tiers d'une part. On retranche ceci du tiers du mâl moins une part, il reste deux neuvièmes du mâl moins deux tiers d'une part. En ajoutant ceci aux deux tiers du mâl, on obtient: huit neuvièmes du mâl moins deux tiers d'une part égalent les parts des fils, trois parts. Par al-jabr, on a: huit neuvièmes du mâl égalent trois parts et deux tiers d'une part.

On complète le mâl par le neuvième manquant, or tout nombre dont on a retranché son neuvième le huitième de ce qui reste est égal au neuvième retranché comme mentionné précédemment<sup>10</sup>; d'où on ajoute aux parts, que nous avons, leur huitième; ce qui revient à prendre le dénominateur, huit, on lui ajoute un, ce qui fait neuf; on le multiplie par les parts, trois parts et les deux tiers d'une part; ce qui donne trente-trois; on divise ceci par le dénominateur de la fraction, huit; il résulte quatre parts et un huitième d'une part, c'est le mâl.

Pour éliminer la fraction, on prend pour la part huit et le mâl vaut alors trente-trois. La répartition se fait ainsi: On prend le tiers du mâl, onze. On en donne une part, huit, pour la première donation et il reste trois. On en donne la seconde donation, qui est le tiers du reste, un; il reste deux. En l'ajoutant aux deux tiers du mâl, on obtient vingt-quatre. En la partageant parmi les trois fils, chacun d'eux reçoit huit.

D'où

$$1/3 m - p - (1/9 m - 1/3 p) = 2/9 m - 2/3 p.$$

D'où

$$2/9 m - 2/3 p + 2/3 m = 8/9 m - 2/3 p.$$

Il en résulte:

$$8/9 m - 2/3 p = 3p$$

D'où, par al-jabr:

$$8/9 m = 3p + 2/3 p.$$

Il cherche à exprimer m en fonction de p, pour cela il ajoute à chaque membre de (1) son huitième

$$D'où m = [(8 + 1)$$

$$(3p + 2/3p)] / 8$$

$$= [33p] / 8$$

$$D'où m = 4p + 1/8p.$$

$$\text{Prenons } p = 8 \text{ alors } m = 33$$

$$m/3 = 11, d_1 = p = 8,$$

$$m/3 - p = 3 \text{ donc } d_2 = 1$$

$$22 + 2 = 24$$

$$24/3 = 8 = p.$$

8. Voici un exemple de tels problèmes: «Un homme a légué à un homme une part égale à celle de l'un de ses fils et à un autre la racine de cette part. Il meurt en laissant trois fils et une succession de 39 dirhams». Ce problème est tiré d'un manuscrit écrit sur les donations par un mathématicien médiéval nommé Al-Ḥabūdi. Je remercie Ahmed DJEBBAR, professeur à l'université Paris-sud à Orsay, de m'avoir aimablement communiqué ce texte.

9. Ibn Khaldun est un historien né en 1332 à Tunis (Tunisie) et mort en 1406 au Caire (Égypte). Il est connu surtout pour son important ouvrage «Al-muqaddima» (prolégomène) qui est une introduction à une histoire universelle monumentale.

10. L'auteur fait allusion à un lemme qu'il a énoncé préalablement et qui s'écrit symboliquement:  $(q/s - q) [A - (q/s)A] = (q/s) A$  où A est nombre rationnel et q, s des entiers tels que  $q < s$ , ici  $q = 9$  et  $s = 1$ .

## Deuxième méthode

On met le reste du tiers du mâl après les deux donations, une chose. Or la seconde donation est le tiers du reste du tiers du mâl après la part, donc elle est la moitié de ce qui reste du tiers après les deux donations, car si on retranche d'une chose son tiers la moitié du reste est égale au tiers retranché. Mais la moitié du reste après les deux donations est égale à la moitié d'une chose, d'où la seconde donation est la moitié d'une chose.

Or on a mis le reste du tiers du mâl après les deux donations une chose, donc le reste du tiers après la part est une chose et demie. Le tiers du mâl vaut une part et une chose et demie, le mâl tout entier est trois parts et quatre choses et demie. Après l'élimination des donations, une part et la moitié d'une chose, il reste du mâl deux parts et quatre choses et ceci égale les trois parts des héritiers. En éliminant deux parts par deux parts, il reste une part égale quatre choses. Or on a mis le mâl trois parts et quatre choses et demie, il vaut donc seize choses et demie. En considérant tout cela des moitiés, afin d'éliminer la fraction, on obtient pour la chose deux, pour le mâl trente-trois et pour la part huit.

## En guise de conclusion

En terminant, quelques remarques sur la nature de cette mathématique. Tout d'abord, le langage utilisé est très lié au contexte d'où proviennent les problèmes qu'on y traite. On opère sur des grandeurs comme telles: mâl, part, donation, reste du tiers du mâl... etc. Cette façon de faire peut cacher le caractère général des procédures de résolution utilisées et dissimuler les concepts mathématiques mis en jeu. Mais d'un autre côté, elle rend ces problèmes accessibles à des personnes

n'ayant pas nécessairement des connaissances mathématiques assez fortes (c'est le cas par exemple des problèmes courants des héritages).

De plus, les méthodes de résolution utilisées dans cette mathématique sont entachées de certaines faiblesses. La présentation rhétorique caractérisée par l'absence de l'écriture symbolique handicape fortement leurs aspects algébriques. Elle rend difficile la séparation de l'algébrique et de l'arithmétique dans une même procédure de résolution. Par exemple, dans les extraits du manuscrit repris ci-dessus, l'auteur commence sa première méthode algébriquement puisqu'il procède à une mise en équation via des transformations de nature algébrique, mais achève la résolution d'une manière arithmétique, lors du partage effectif de la succession. Il semble que l'auteur est conscient de ce fait puisqu'il se limite dans sa deuxième méthode à la partie algébrique; la dernière partie entre ainsi dans le domaine du «commun». Néanmoins, dans la seconde méthode, l'évacuation de l'arithmétique n'est pas complète en ce sens où vers la fin il dit: considérant tout cela des moitiés; comme s'il faisait des partages arithmétiques en changeant «l'unité de mesure».

La lecture des dits extraits relève clairement par ailleurs des éléments à caractère algébrique:

— L'explication des relations entre les données du problème dans le but d'appliquer des transformations de nature algébrique. Par exemple, il exprime une quantité par d'autres qui ne sont pas plus connues lorsqu'il dit:

*on donne pour la seconde donation le tiers de ceci, ce qui est le neuvième du mâl moins le tiers d'une part.*

— L'introduction d'une inconnue auxiliaire dans la deuxième méthode de résolution et le souci d'exprimer toutes les autres inconnues en fonction d'elle.

— Lors de la résolution, le recours dans un cadre à base arithmétique à des lemmes préalablement énoncés.

Une remarque d'ordre historique pour finir. Nous avons évoqué dans l'introduction l'importance relative des problèmes des héritages dans la tradition mathématique arabe. Une illustration de cette importance est le terme «mâl» utilisé par les mathématiciens arabes pour formuler les équations. Parfois il exprime le «carré» mais dans d'autres circonstances, comme dans les extraits ci-dessus, il peut signifier «bien», «somme d'argent», «fortune», etc. Il est donc probable qu'avant d'acquérir le sens du carré dans l'algèbre générale, il a d'abord été utilisé dans son sens ordinaire dans la mathématique successorale<sup>11</sup>. La résolution des problèmes successoraux aurait donc fourni à l'algèbre arabe un de ses termes primitifs

11 Youschkevitch (1976) p. 35 et Charbonneau (1984) p. 6.

qui sont: *mâl*, *Jidr et Cadad* (carré, racine et nombre) et en constitue par voie de conséquence une source de vocabulaire.

### Références

Al-Habubi, *Kitab al-istiqa'*; Mik. 308, Mss Oxford-bodl seld.sup.22/1<sup>er</sup> ff.1b-52a. (en arabe)

Berggren, J.L. *Épisodes in the mathematics of medieval islam*. Springer-verlag, New York, 1986.

Charbonneau, L, Regards étymologiques sur l'arithmétique; *Bulletin AMQ*, vol. 24, no 4, Décembre 1984, pp.5-6.

Hughes, *Dictionary of Islam*, 1964.

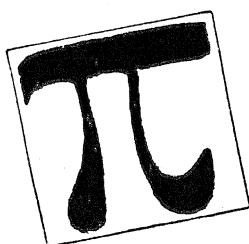
Ibn Khaldūn, A, *Al-muqaddima*; *édit.* Dar Al-jail, Beiruth, non daté. Trad. fr: Monteil, V: *Discours sur l'histoire universelle*, Sindibad Paris 1978. (Nous nous référons à cette traduction).

Neugebauer, O, *The exact science of antiquity*; Ed. Dover. New York, 1957, 1<sup>re</sup> édition 1949.

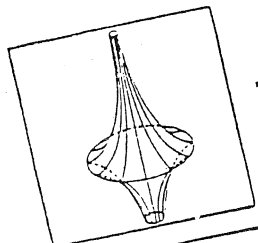
Youschkevitch, A.P., *Les mathématiques arabes*; éd. Vrin Paris, 1976.

Ezzaim Laabid,

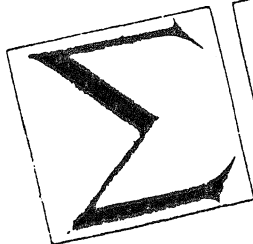
École normale supérieure, Marrakech, Maroc.  
Université du Québec à Montréal



# CONCOURS MATHÉMATIQUE



## NIVEAU COLLÉGIAL



## VENDREDI 9 FÉVRIER 1990

Organisé par l'Association Mathématique du Québec et le Département de mathématiques et d'informatique de l'Université de Sherbrooke.

Prix en argent.

Participation à un camp mathématique.

Les meilleurs concurrents du Collégial 1 participeront aux Olympiades canadiennes.

Frais d'inscription: 4,00\$