Jacques Lefebvre

Moments et aspects de l'histoire du calcul différentiel et intégral

Cinquième partie : le dix-neuvième siècle et la notion de limite

Le calcul différentiel et intégral fut enfin établi sur des fondements plus sûrs au cours du dix-neuvième siècle au point où Boyer emploie le titre « *The Rigorous Formulation* » pour désigner cette période. Notons que cette rigueur ne s'obtint pas instantanément, mais plutôt par des corrections et approfondissements successifs.

Il y eut aussi élargissement du domaine : intrusion de fonctions bizarres et prise en compte de catégories de plus en plus vastes de fonctions ; naissance et développement de l'analyse complexe ; examen attentif des propriétés présumées des nombres réels menant à des constructions de ceux-ci à partir des seuls entiers ; ...

La présente chronique tentera d'identifier les principaux problèmes, concepts et résultats de la démarche de recherche fondée sur la théorie des limites. Notre exposé tirera profit de l'aspect-charnière de l'oeuvre de Cauchy (1789-1857), si influente, et à laquelle nous rattacherons des travaux antérieurs ou postérieurs.

Les séries de Taylor, base même de l'exposé du calcul chez Lagrange, représentent les fonctions par leur développement en sommes de puissances entières de l'accroissement de la variable. On savait déjà utiliser parfois plutôt les développements en sommes de termes trigonométriques, mais c'est Joseph Fourier (1768-1830) qui en fit l'usage systématique pour les fonctions périodiques. Pour une fonction périodique impaire, par exemple, c'est-à-dire avec la propriété $f(x) = -f(-x)$, il l'exprime comme :

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

et calcule les coefficients a_n à l'aide de la relation

$$(2) \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx .$$

Les coefficients de Fourier a_n sont donc obtenus à l'aide d'intégrales, tandis que ceux des séries de Taylor

$$(3) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, (x - x_0)^n$$

le sont par des dérivations, car

$$(4) \qquad b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} .$$

Les séries de Fourier soulevaient des questions importantes et fort troublantes. Quelles fonctions étaient ainsi représentables ? Comment expliquer que des fonctions discontinues en certains points puissent être exprimables comme sommes de termes trigonométriques eux-mêmes tous continus. « *En particulier, une fonction nulle de 0 à π, égale à 1 de π à 2 π, admet un développement trigonométrique convergent* » (Lebesgue, p. 3). N'y avait-il pas, pour les coefficients (2), une interprétation en tant qu'aires sous la courbe plutôt que purs résultats numériques à l'aide des primitives ? Ou qu'est-ce que l'intégrale définie ? Et, tant qu'à y être, quelles fonctions sont admissibles en mathématiques (le débat avait eu lieu déjà vers 1750 à propos des cordes vibrantes) ? Qu'est-ce qu'une fonction et qu'est-ce que la continuité ?

On peut certes calculer sans avoir de réponses à ces questions fondamentales. Mais la mathématique a au moins deux visages et C.G.J. Jacobi (1804-1851) exprima fortement le souci de comprendre en opposition au seul faire, dans une lettre, en français, écrite en 1830 à Legendre :

> (...) *M. Fourier avait l'opinion que le but général des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question de système du monde.* (cité par Dieudonné (1987), en épigraphe à son beau livre, au titre tiré de cette lettre).

Pierre Cartier, un mathématicien formé par Dieudonné et les autres fondateurs du groupe Bourbaki, constate que, « *selon les époques et parfois les modes, la science a navigué entre les exigences pragmatiques et les recherches ponctuelles* » (Cartier, p. 4). Voyons en cela une tension et une dialectique historiquement fécondes.

C'est en 1822 que fut publié le livre *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier. Une bonne partie de son contenu avait déjà été exposée dans un mémoire de 1807. Les idées et techniques de Fourier furent connues très rapidement par la communauté mathématique. Par exemple, sa notation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$$

pour désigner l'intégrale définie de f, entre les valeurs x_0 et X, sera prise par Cauchy comme étant « *la plus simple* » (1823, vingt-unième leçon, p. 84).

Moins soucieux de mathématiques appliquées que Fourier, en fait visant à des démonstrations pures ou analytiques, le religieux et professeur de philosophie religieuse Bernhard Bolzano (1781-1848) avança des idées en partie analogues à certaines que développera Cauchy. Mais l'influence réelle directe de Bolzano semble avoir été très faible, vu la diffusion trop limitée ou tardive de ses travaux. Ses textes, souvent entachés d'erreurs, contenaient des perspectives intéressantes sur les fondements de l'analyse réelle, sur la théorie des fonctions, sur les notions de continuité et de convergence ainsi que l'examen de paradoxes liés à la notion d'infini.

Par exemple, dans un pamphlet écrit en allemand et à diffusion privée, il s'attaquait en 1817 à la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires : si $a < b$ et si $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$ alors, dans le cas continu, il existe au moins un c entre a et b tel que $f(c) = g(c)$. La version particulière de ce théorème, où $g(x) \equiv 0$, énonce qu'une fonction continue s'annule en au moins une valeur entre des valeurs où elle prend des signes différents. Ce théorème est une sorte d'évidence géométrique ou cinétique, mais Bolzano n'accepte de tels arguments qu'à titre heuristique ou pédagogique. Foncièrement, « *Les concepts de temps et de mouvement (et celui-ci encore plus) sont tout aussi étrangers aux mathématiques générales que le concept d'espace.* » *(cité par Dhombres et al.*, p. 207)

Le lecteur intéressé au schéma de sa démonstration (ainsi qu'à d'autres éléments des travaux mathématiques de Bolzano) pourra consulter le chapitre à lui consacré dans *The Mathematics of Great Amateurs* de Coolidge. Elle repose essentiellement sur ce qu'on appellera le théorème de Bolzano-Weierstrass établissant, dans le cas le plus simple, que toute suite monotone bornée de réels définit un point limite réel. La démonstration en fut faite par Weierstrass bien plus tard. Ce même théorème, implicitement ou non, est au coeur de nombreuses affirmations de Bolzano sur des questions de continuité et de convergence. On voit combien des propriétés capitales des nombres réels sont assez bien entrevues et utilisées dès lors, mais sans encore de démonstration.

Enfin vint Cauchy ! Non pas pour tout régler d'un coup de baguette magique. Mais il donna aux fondements et à l'exposé magistral du calcul différentiel et intégral la base sur laquelle il se développa, se consolida et s'étendit tout au long du siècle et qui est encore aujourd'hui la façon standard la plus courante d'aborder le sujet : la théorie des limites. De plus, Cauchy, presque aussi prolifique qu'Euler, publia livres et mémoires sur de nombreux autres sujets mathématiques durant toute sa vie. Entre autres, il eut le mérite d'être le principal initiateur de l'analyse complexe, c'est-à-dire de l'analyse des fonctions à valeurs réelles ou complexes, d'une ou de variables réelles ou ... complexes (c'est le passage ou saut périlleux et révolutionnaire) et ce, dès 1825, avec son *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires.*

Tout mathématicien est situé dans une tradition et des problématiques. Il en est de même pour Cauchy. Une étude très détaillée de l'état de la question et des contributions, directes ou indirectes, des prédécesseurs de Cauchy a été faite par Grabiner (1981), en particulier pour l'analyse réelle, c'est-à-dire pour les conceptions de Cauchy quant à la limite, la continuité et la convergence, quant à la dérivée et quant à l'intégrale. Avant de passer à une description abrégée de cet ensemble si bien structuré de concepts, nous nous permettons une traduction d'extraits de la conclusion de Grabiner, mettant bien en évidence le caractère-charnière de l'oeuvre de Cauchy dans le domaine du calcul différentiel et intégral :

> *(...) ceux à qui Cauchy doit le plus dans l'élaboration de ses fondements furent Euler, d'Alembert, Ampère, Poisson et - surtout - Lagrange (...). Le fait que plusieurs des techniques de base du calcul de Cauchy existaient au dix-huitième siècle devrait accroître, et non diminuer, notre admiration à l'égard de ce qu'il accomplit (...). Augustin-Louis Cauchy ne commença ni ne compléta la rigorisation de l'analyse. Mais plus que tout autre mathématicien, il fut responsable de la première grande révolution quant à la rigueur en mathématiques depuis l'époque des anciens Grecs.* (Grabiner, p. 165-6)

En dix ans, parurent trois traités de Cauchy dans le domaine de l'analyse :

- *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, Première partie : Analyse algébrique* (1821) ;
- *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal, tome premier* (1823) ;
- *Leçons sur le calcul différentiel* (1829).

Il est un peu piquant de constater l'énorme et longue influence de ces ouvrages, puisque les cours de l'auteur avaient été souvent considérés comme trop théoriques par ses élèves et ses supérieurs hiérarchiques. Notons aussi, en passant, que Cauchy eut la chance de publier plusieurs de ses livres chez les Debure, sa belle-famille. Pour tous les détails personnels, familiaux et professionnels, nous recommandons la lecture de l'ouvrage de Belhoste (c. 1985), où l'on trouve des parties proprement mathématiques, regroupées par thèmes, après chaque chapitre biographique. Un article du même auteur (1994), forcément plus succinct, permet un survol rapide de l'ensemble de la production mathématique de Cauchy et de sa carrière.

Pour la présente chronique, nous nous concentrerons sur l'ouvrage de 1823. S'il fait parfois référence à celui de 1821, il est néanmoins presque totalement autonome. De plus, sa structure est admirablement claire, progressive, symétrique : 20 leçons sur le calcul différentiel, 20 leçons sur le calcul intégral, chaque leçon couvrant exactement quatre pages.

Parodiant à peine les pythagoriciens pour qui « tout est nombre », nous osons dire qu'ici « tout est limite », ou fondé sur des limites. Dès la quatrième ligne de la première leçon, on lit :

« Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la <u>limite</u> de toutes les autres. »(première leçon, p. 1)

Bien sûr, on n'y trouve pas nos quantificateurs « pour tout », etc. Mais à ce détail près, la notion de limite chez Cauchy est celle d'aujourd'hui.

Cauchy retient l'expression « infiniment petit » et le titre même de l'ouvrage contient le terme « calcul infinitésimal ». Mais il leur enlève leur mystère, ce statut mal défini de grandeurs sans grandeur, de non-zéros traitables comme des zéros quand cela convenait. Un infiniment petit sera pour Cauchy une variable ou une fonction tendant vers zéro, c'est-à-dire ayant « *zéro pour limite* » (première leçon, p. 4). L'infiniment petit n'est plus un être incertain, c'est une abréviation de langage.

La seconde leçon commence par définir, de façon générale (pour l'époque), la notion de fonction :

> *Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles, que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de <u>variable indépendante</u> ; et les autres quantités, exprimées au moyen de la variable indépendante, sont ce qu'on appelle des <u>fonctions</u> de cette variable.* (p. 5)

Puis, après avoir parlé de fonctions de plusieurs variables, de fonctions explicites ou implicites, Cauchy définit la continuité d'une fonction :

« *Lorsque, la fonction f(x) admettant une valeur unique et finie pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la différence*

$$f(x+i)-f(x)$$

est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que f(x) est fonction continue de la variable x entre les limites dont il s'agit. » (p. 7)

Pour mettre le langage à jour, le lecteur moderne pensera à remplacer le mot "limites" de Cauchy par, disons, les bornes d'un intervalle sur lequel la fonction est définie et, interprétant i non pas comme le $\sqrt{-1}$ d'aujourd'hui mais comme un accroissement infiniment petit de la variable (peut-être la première lettre du mot latin *incrementum*), il verra que la condition s'écrirait aujourd'hui

$$\lim_{a\to 0}\ [f(x+a)-f(x)]=0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{a\to 0}\ f(x+a)=f(x).$$

L'usage du mot continu était équivoque au dix-huitième siècle : unicité de l'expression, absence de changement brusque de direction, etc. Désormais, et jusqu'à nous, le sens du mot est fixé pour de bon par Cauchy. Cette proximité des images assurée par la proximité des valeurs de la variable avait déjà été identifiée par Bolzano (1817) comme l'essence de la continuité d'une fonction. Elle connut, comme la définition de limite, diverses formulations techniques par la suite. Nous traduisons la version de Heine (1872) telle que, traduite une première fois déjà sans doute, on la trouve dans un bel encart de Katz (1993) sur les définitions de continuité :

> *Une fonction f(x) est continue en la valeur particulière x = X si pour toute quantité donnée ε, aussi petite soit-elle, il existe un nombre positif η_0 ayant la propriété que pour aucune quantité positive η inférieure à η_0 la valeur absolue de $f(x\pm\eta)-f(x)$ ne soit supérieure à ε.* » (cité par Katz, p. 641).

Quel est l'ordre d'exposition des concepts dans tant de manuels d'aujourd'hui ? Variable, fonction, limite, continuité, dérivée, différentielle (souvent omise dans un premiers cours), intégrale, ... C'est exactement l'ordre de l'ouvrage de Cauchy. Et la dérivée n'y est plus le mystérieux rapport de deux fluxions ou de quantités naissantes ou évanouissantes dont Berkeley se moquait à propos des newtoniens. Elle n'est pas non plus le rapport de deux entités infinitésimales à la Leibniz. La dérivée y est, tout simplement, lorsqu'elle existe, la limite du rapport

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

pour i une quantité infiniment petite, c'est-à-dire une variable ayant pour limite zéro (troisième leçon, p. 9). La différentielle sera ensuite (quatrième leçon) définie à partir de la dérivée.

Nous n'avons mis en évidence que des concepts jusqu'ici. Mais Cauchy est un mathématicien et non un philosophe des mathématiques. Il donne des exemples, énonce et démontre les propriétés (de la dérivée par exemple), fait l'étude des cas délicats (les formes indéterminées,

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty^0,$$

etc.), passe aux applications (recherche des maxima et des minima), etc. Il étudie les fonctions d'une variable réelle à valeurs imaginaires (nous dirions complexes) qu'il appelle *fonctions imaginaires* :

«*On nomme ainsi toute expression qui peut être ramenée à la forme $u+v\sqrt{-1}$, u et v désignant deux fonctions réelles.* » (cinquième leçon, p. 20)

Il s'occupe des fonctions de plusieurs variables réelles, etc. Bref, son calcul différentiel est riche, varié et bien structuré.

Les vingt leçons suivantes, sur le calcul intégral, commencent par la définition de l'intégrale définie d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné, de x_0 à X, à l'aide des sommes désormais bien connues $S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ \dots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$ *où* $x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<X$ est une partition de l'intervalle. Cauchy montre que :

« *Lorsque les éléments de la différence $X-x_0$ deviennent infiniment petits, le mode de division n'a plus sur la valeur de S qu'une influence insensible (...). Cette limite est ce qu'on appelle une intégrale définie.* » (vingt-unième leçon, p. 83)

Donc l'intégrale définie d'une fonction continue sur un intervalle formé borné existe. Il convient de remarquer l'importance pour Cauchy « *de démontrer généralement l'existence des intégrales ou fonctions primitives avant de faire connaître leurs diverses propriétés.* » (Avertissement, p. VI)

L'intégrale définie était au dix-huitième siècle une notion secondaire, la simple différence de valeurs de la primitive ou anti-dérivée prise successivement aux deux extrémités de l'intervalle. Cauchy nous semble renouer plutôt avec un procédé de calcul inspiré du découpage naturel d'une surface plane en rectangles approximatifs, comme l'avaient fait au dix-septième siècle un Fermat ou un Pascal dans des cas particuliers ou à généralité limitée, ou un Leibniz, mais celui-ci d'entrée de jeu opérait avec une obscure infinité de rectangles infiniment petits. On pourra désormais étendre correctement le concept à des fonctions ayant une ou un nombre fini de discontinuités, bornées ou non, et ultimement tenir compte d'une infinité de discontinuités, denses ou non, voire même de discontinuités partout. On peut parler d'un programme de recherche qui sera en vigueur durant tout le dix-neuvième siècle et dont les grandes réalisations seront accomplies par Riemann (vers 1850) et Lebesgue (vers 1900). Ce besoin d'étendre (et de comprendre) le concept d'intégrale resta d'ailleurs lié à l'étude des séries trigonométriques, suite à l'impulsion donnée par les travaux de Fourier.

C'est en 1854 que Riemann (1826-1866) produisit sa définition de l'intégrale définie, dans un mémoire pour son habilitation publié après sa mort, au titre bien évocateur de nos propos : *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique.* (Riemann (1990), pp. 225-272)

Plutôt que de supposer la continuité de la fonction à intégrer sur un intervalle fermé borné, comme le faisait d'abord Cauchy, Riemann suppose d'abord seulement que la fonction est bornée. C'est un changement majeur. Il fait, comme Cauchy, une partition de l'intervalle de a à b en sous-intervalles et étudie la somme

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

où les δ_i sont les longueurs des sous-intervalles, et les ε_i des fractions, donc entre 0 et 1. Riemann calcule donc la valeur de la fonction en un point disons quelconque de chaque sous-intervalle plutôt qu'au point initial du sous-intervalle. C'est là un changement plutôt mineur.

Si les sommes S tendent vers une même limite fixe A lorsque tous les δ tendent vers zéro, indépendamment du choix des ε, « *cette limite s'appelle valeur de l'intégrale définie* » (Riemann, p. 240). Sinon, « *la notation*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ne peut avoir aucune signification. » *(ibidem)*

Riemann établit ensuite une condition nécessaire et suffisante pour la convergence des S, c'est-à-dire pour l'existence de l'intégrale définie. Nous citerons l'énoncé sous la forme suffisante, en signalant que Riemann appelle oscillation de la fonction dans un intervalle (ou sous-intervalle) « *la différence entre sa plus grande et sa plus petite valeur dans cet intervalle.* » *(Riemann, p. 241) :*

> *Si la fonction f(x) est toujours finie, et si, par le décroissement indéfini de toutes les quantités δ, la grandeur totale s des intervalles dans lesquels les oscillations de la fonction sont plus grandes qu'une quantité donnée σ peut toujours être rendue infiniment petite, la somme S converge quand tous les δ tendent vers zéro. (Riemann, p. 242)*

Immédiatement après la démonstration du caractère nécessaire et suffisant de la condition, Riemann construit un exemple de fonction intégrable, au sens qu'il venait de donner à ce terme, mais discontinue « *un nombre infini de fois* », « *entre deux limites aussi rapprochées qu'on le veut* » (Riemann, p. 243).

Plus générale que l'intégrale de Cauchy, celle de Riemann ne pouvait cependant venir à bout d'intégrer certaines fonctions. Il en est ainsi de la célèbre fonction (1829) de Lejeune-Dirichlet (1805-1859), valant une certaine constante sur les rationnels et une autre sur les irrationnels. Son oscillation, constante, ne tend pas vers zéro. Il faudra attendre la méthode de Lebesgue (vers 1900) pour donner un sens et une valeur à l'intégrale de cette fonction. Et pour ce, on aura besoin de la théorie de la mesure. Nous en reparlerons dans notre dernière chronique.

Revenons à Cauchy. Il ne faut pas surévaluer l'aspect technique de son intégrale. D'une part, la définition est relativement simple et sa démonstration de l'existence de l'intégrale, dans le cas continu, utilisait, sans le voir, la propriété de continuité uniforme, propriété qui restait à définir par les mathématiciens postérieurs. Heureusement, la validité de la démonstration n'est pas affectée, mais seulement sa justification, puisqu'une fonction réelle continue sur un intervalle fermé borné de réels y est uniformément continue.

Avant de passer aux séries, nous laissons au lecteur cette appréciation de l'intégrale de Cauchy par Lebesgue :

> *Très souvent en mathématiques, on prend, ainsi que le fait ici Cauchy, le procédé de calcul d'un nombre comme définition de ce nombre (...)*
>
> *On dit souvent que Descartes a ramené la géométrie à l'algèbre ; cela n'aurait pas été exact, si Cauchy, par sa définition de l'intégrale, n'avait pas donné une construction logique de notions jusque-là déduites de l'intuition géométrique : aires, volumes, etc.*
>
> *Il y a là un progrès dont l'importance philosophique est extrême ; mais comme le travail de Cauchy n'apporte aucun enrichissement pour la notion d'intégrale, son intérêt mathématique est minime ; aussi Cauchy ne l'a-t-il donné que comme un simple exposé pédagogique*. (Lebesgue, *Leçons sur l'intégration (...)*, note 1, p. 5)

Dès son ouvrage de 1821, Cauchy déclarait son souci de rigueur : par exemple, « *une série divergente n'a pas de somme* » (1821, Introduction, p. IV). Même s'il entendait, dans son ouvrage de 1823, concilier la rigueur requise et les facilités procurées par l'usage de l'infiniment petit (enfin correctement défini), Cauchy y retarda l'étude des séries et en particulier des séries de Taylor, même s'il « *n'ignore pas que l'illustre auteur de la Mécanique analytique a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des fonctions dérivées* » (1823, Avertissement, p. V-VI). Donc, tout à l'opposé de Lagrange (1797), les séries seront à la fin et non au début de l'ouvrage. Il les étudie à partir de la trente-septième leçon. On y trouve, entre autres, les tests de la racine et celui du rapport, appliqués à des séries de nombres complexes. Si ρ_n est la valeur numérique ou module (ou la norme ou grandeur) du n-ième terme u_n, alors si $(\rho_n)^{1/n}$ converge vers λ, il y a convergence de

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

si $\lambda < 1$, et divergence si $\lambda > 1$. De même si le rapport

$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \text{ tend vers } \lambda.$$

Dans les deux cas, la démonstration se fait par comparaison avec des séries géométriques ayant une raison inférieure à 1, ou supérieure à 1, respectivement (trente-huitième leçon, pp. 149-150).

Ce n'est qu'ensuite qu'il étudie les séries de Maclaurin (cas particulier des séries de Taylor, développées autour de $x_0 = 0$). Il leur applique les tests de convergence. Il ne manque pas de signaler que, même en cas de convergence de la série

$$F(0) + F'(0)x + F''(0)\frac{x^2}{1.2} + \dots,$$

cette série de Maclaurin ne converge pas nécessairement vers la fonction $F(x)$ dont elle est issue, ce qui oblige à une grande prudence. Il donne deux tels exemples basés sur la fonction

$$e^{-(1/x)^2} \text{ (idem, p. 152).}$$

Le souci de rigueur de Cauchy ne donna pas toujours immédiatement des résultats tous impeccables. Nous avons signalé, dans le cas de l'intégrale, une démonstration imparfaite. Pour les séries, il y eut un énoncé de théorème faux. Cauchy croyait avoir démontré que la somme d'une série convergente de fonctions continues est nécessairement une fonction continue *(Analyse algébrique*, 1821, 1ère partie, chap. VI, 1er théorème, pp. 129-132). Dès 1826, Abel donna un contre-exemple : la série, déjà étudiée par Fourier, dont les termes individuels

$$(-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

sont évidemment continus est discontinue pour $x = \pi$ et, par prolongement périodique, pour tout x de la forme $(2n+1)\pi$ (Dahan-Dalmedico et Peiffer, p. 229), mais continue ailleurs ; elle représente des segments de droites, périodiques. L'erreur, comme la lacune précédemment identifiée, était réparable. Cauchy avait, encore une fois implicitement, utilisé un concept à venir, celui de convergence uniforme, c'est-à-dire partielles doit pouvoir être assurée au ε près considéré, *via* l'exigence d'un nombre suffisant de termes, pour tous les x à la fois.

De tels perfectionnements, même faits à l'instigation d'autres auteurs ou par d'autres auteurs, n'altèrent que peu la valeur de l'oeuvre originelle, si féconde, de Cauchy. Une grande théorie mathématique ne commence ni ne se complète absolument avec un seul être humain. La diversité des esprits mathématiques se révèle en des dosages variés de pragmatisme et de conceptualisme, de vision et de calcul et aussi dans le caractère plus ou moins achevé des oeuvres, dans le caractère plus ou moins parfait de l'argumentation. À cet égard, rapportons un autre propos de Jacobi (1846) :

« *Quand Gauss dit qu'il a démontré quelque chose, cela me paraît très probable, quand Cauchy le dit, il y a autant à parier pour que contre, quand Dirichlet le dit, cela est certain.* » (cité par Dugac, p. 364)

Quant à l'analyse complexe, nous avions déjà annoncé que nous n'en traiterions pas vraiment. Le lecteur intéressé pourra, outre l'ouvrage ponctuel de 1825 de Cauchy, se référer à une histoire portant sur plus d'un siècle, d'Euler à Weierstrass, tant dans le domaine réel que complexe, par Bottazzini (1981, trad. angl. 1986).

Globalement, la théorie des limites avait donc permis des progrès considérables tant dans la compréhension fondamentale du calcul différentiel et intégral que dans l'extension à lui donnée par l'étude de fonctions aux comportements exceptionnels et surprenants et par la considération de classes abstraites de fonctions. Nonobstant les divers perfectionnements apportés à l'entreprise, notamment par Weierstrass (1815-1897) et ses élèves, l'analyse infinitésimale accusait encore une lacune majeure. Si on s'était débarrassé de la confiance excessive en l'intuition géométrique, la numérisation de l'analyse n'avait pas encore bien défini ce que sont les nombres réels. Et, partant, des propriétés et théorèmes majeurs, comme celui des valeurs intermédiaires, restaient, pour ainsi dire, ouverts.

Nous verrons, dans notre prochaine et dernière chronique sur ce sujet, diverses constructions des nombres réels à partir des nombres entiers. Nous parlerons également de la conquête de l'infini... ■

Références bibliographiques

Belhoste, B. (*c.* 1985). *Cauchy : 1789-1857 : un mathématicien légitimiste au XIX^e^ siècle*, Paris, Bélin.

Belhoste, B. (1994). *Augustin-Louis Cauchy*, dossier hors-série *Les Mathématiciens, Pour la science*, janvier 1994, pp. 68-77.

Bottazzini, U. (1986). *The Higher Calculus : A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, New York, Springer Verlag. Trad. angl. par W. Van Egmond à partir de la version italienne originale de 1981.

Boyer, C.B. (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, (1939, 1949), rééd. New York, Dover.

Cartier, P. (1997). *" La Musique des sphères " ou "La recherche de l'harmonie chez Kepler"*, conférence donnée le 3 décembre 1990 à la Maison Franco-Japonaise de Tokyo, *Gazette des Sciences Mathématiques du Québec*, vol. XIX, numéro 1, déc. 1997, pp. 3-25.

Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, Première partie : Analyse Algébrique*, Paris, Debure, rééd. fac-similé sous le titre *Analyse algébrique*, 1989, Paris, Éd. Jacques Gabay.

Cauchy, A.-L. (1823). *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal, tome premier*, Paris, Debure, rééd. fac-similé dans *Le calcul infinitésimal*, 1987, Paris, ACL-éditions.

Cauchy, A.-L. (1825). *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*, Paris, De Bure, rééd. fac-similé dans *Le Calcul infinitésimal,* 1987, Paris, ACL-éditions.

Coolidge, J. L. (1963). *The Mathematics of Great Amateurs*, New York, Dover. Première édition, 1949, Oxford University Press.

Dahan-Dalmedico, A. et Peiffer, J. (1986). *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales,* (Première édition, Études vivantes, 1982), Paris, Seuil.

Dhombres, J. *et al.* (sous la dir.) (1987). *Mathématiques au fil des âges*, Paris, Gauthier-Villars/Bordas.

Dieudonné, J. (1987). *Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui,* Paris, Hachette, collection Pluriel.

Dugac, P. (1978). *Fondements de l'Analyse*, chap. VI, t. 1, pp. 335-392, dans *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, sous la dir. de J. Dieudonné, 2 t. Paris, Hermann.

Grabiner, J. V. (1981). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus,* Cambridge, Mass., M.I.T. Press.

Katz, V. J. (1993). *A History of Mathematics. An Introduction*, New York, Harper Collins College Publishers.

Lebesgue, H. (1973). *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au Collège de France*, (réimp. de la seconde éd., 1928 ; première éd., 1907), New York, Chelsea.

Riemann, B. (1990). *Oeuvres mathématiques*, tr. f. L. Laugel (première édition, 1898, Paris, Gauthier-Villars), Paris, Éd. Jacques Gabay.

Jacques Lefebvre
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal

ADHÉSION À L'AMQ ET ABONNEMENT AU BULLETIN

NOM : ______________________ PRÉNOM : ______________________

ADRESSE : ____

VILLE : ______________________ PROVINCE : ______________________

CODE POSTAL : ______________________ TELEPHONE : (   ) ______________________

INSTITUTION : ______________________ TÉLÉPHONE : (   ) ______________________

______________________ E-MAIL : ______________________

Tarifs (taxes incluses)
(TPS : R125775858)
(TVQ : 1015867341 TQ 0001

AMQ	69,00 $	❑
AMQ - APAME	84,00 $	❑
AMQ - GRMS	93,60 $	❑
AMQ - APAME - GRMS	129,60 $	❑
Cotisation étudiante[1]	35,00 $	❑
Membre institutionnel[2]	200,00 $	❑

Mode de paiment : Chèque ❑ Visa ❑ Master Card ❑

Numéro : ______________________ Expiration : ______________________

Signature : ______________________ Date : ______________________

Un reçu d'impôt vous sera fourni.
Retournez formulaire et paiement à l'Association mathématique du Québec
7400, Saint-Laurent, bureau 257, Montréal (Québec) H2R 2Y1 (télécopieur : 514-948-6423)

Merci de l'intérêt que vous portez à notre association.

---

1 Attestation d'inscription requise.
2 Une institution d'enseignement ou une entreprise peut devenir membre institutionnel. Elle a alors la possibilité d'inscrire gratuitement cinq (5) de ses étudiants ou stagiaires (attestations requises) à l'AMQ, ce qui permettra à ceux-ci de recevoir le *Bulletin de l'AMQ* et de participer aux activités de l'association.