L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves

Patricia Marchand, Nadine Bednarz[1]

Résumé

Les changements fondamentaux qui ont été introduits récemment dans le curriculum en mathématiques au secondaire (MEQ, 1993) par rapport à l'enseignement de l'algèbre nécessitent qu'on s'attarde aux situations mises de l'avant et aux apprentissages réalisés dans ce domaine par les élèves[2]. Les options curriculaires retenues déterminent en effet, pour une large part, les conceptions que les élèves vont développer à l'égard de l'algèbre, et le sens qu'ils vont lui accorder. Dans le cas de l'introduction à l'algèbre, une place importante est réservée, en accord avec l'orientation générale privilégiée par le curriculum d'études, à la résolution de problèmes. Nous avons cherché à comprendre davantage ce qui caractérisait cette introduction en examinant comment s'opéraient le passage de l'arithmétique à l'algèbre et son développement du point de vue des problèmes proposés aux élèves à différents niveaux scolaires[3]. Nous situerons d'abord brièvement les orientations du nouveau programme de mathématiques au secondaire, sous l'aspect de l'introduction à l'algèbre. Ensuite, nous présenterons les raisons qui nous ont incité à travailler plus spécifiquement sur la résolution de problèmes en algèbre et le cadre de référence ayant servi d'appui à l'analyse des problèmes présentés à différents niveaux scolaires. Nous reviendrons alors en conclusion sur les discontinuités que met en évidence cette analyse d'un niveau scolaire à l'autre, dans l'introduction et le développement de l'algèbre.

Introduction

Plusieurs études ont montré les difficultés que rencontrent les élèves à différents niveaux scolaires dans l'apprentissage de l'algèbre, et ce, dans de nombreux domaines ; résolution d'équations (Filloy et Rojano, 1989 ; Herscovics et Linchevski, 1991), manipulation d'expressions algébriques (Booth, 1984), résolution de problèmes (Clement, 1982 ; Filloy et Rubio, 1991 ; Bednarz, Radford, Janvier et Lepage, 1992 ; Bednarz et Janvier, 1996 ; Fisher, 1988 ; Kaput, 1983 ; Malle, 1990) et la manipulation de concepts fondamentaux tels celui de variable (Janvier, 1978 ; Janvier, Charbonneau et Renée de Cotret, 1989). L'analyse de ces difficultés met notamment en évidence certaines interprétations que développent les élèves à l'égard des lettres et des conventions d'écriture (Booth, 1984) qui interfèrent avec la construction des raisonnements et connaissances algébriques. Ces résultats questionnent les scénarios classiques d'introduction à l'algèbre (Bednarz et Janvier, 1995), et soulèvent la question des interventions pertinentes à mettre en place lors de ses débuts : quelles situations sont susceptibles de contribuer au développement de raisonnements algébriques chez les élèves et à construire un sens à l'algèbre ?

D'après cette perspective, l'introduction à l'algèbre au secondaire peut prendre plusieurs orientations, comme le montrent bien les tendances dans la communauté internationale à cet effet (Bednarz, Kieran et Lee, 1996).

Parmi celles-ci, le curriculum d'études québécois a fait certains choix, marquant un changement complet d'orientation par rapport à l'ancien programme. Nous situerons brièvement cette orientation et les questions qu'elle soulève à l'égard de l'apprentissage de l'algèbre.

1) Quelques orientations du curriculum au secondaire à l'égard de l'enseignement de l'algèbre

Un changement d'orientation important caractérise le curriculum de 1993 par rapport à l'ancien programme. Celui-ci apparaît entre autres dans un des aspects relevés dans le programme de secondaire 2, niveau où se situe principalement l'introduction à l'algèbre, sous l'objectif général « Favoriser chez l'élève l'accroissement de l'habileté à utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes » (MEQ, Programme d'études du secondaire, mathématique 216, 1995, p. 23). On retrouve en effet sous cet objectif l'idée fondamentale que « l'apprentissage ne devrait pas être dominé par la manipulation d'expressions algébriques ; ces manipulations découleront du besoin de l'élève de résoudre des équations du premier degré qu'il aura conçues » (idem, p.26). Il s'agit là d'un changement majeur d'orientation par rapport à l'ancien programme, dans lequel le scénario d'introduction à l'algèbre pouvait être caractérisé ainsi : celui-ci recouvrait une initiation au langage et vocabulaire algébriques (constante, variable, monôme, binôme, polynôme, termes semblables, ... etc.), et l'accent était mis dès le départ sur la manipulation symbolique (introduction des opérations sur les polynômes). Les outils étant introduits, les élèves pouvaient alors amorcer la résolution d'équations, puis en tout dernier lieu la résolution de problèmes, avant tout conçue comme un lieu d'application des techniques de résolution développées préalablement. Ce scénario d'introduction à l'algèbre, qui est celui que l'on retrouve encore dans bon nombre de pays, a été caractérisé antérieurement, en mettant en évidence les difficultés importantes qu'il soulève chez les élèves (Bednarz et Janvier, 1995). Celles-ci pointent le peu de signification que les élèves accordent au symbolisme et aux conventions d'écriture, dont ils ne perçoivent nullement la pertinence ; les élèves ne semblent pas davantage outillés, malgré l'accent mis sur le développement de techniques de manipulation et la résolution, pour résoudre des équations ou des problèmes. On peut observer ici un engagement non-réfléchi dans la résolution, de multiples erreurs, et un contrôle limité sur le processus de résolution.

Le programme d'études actuellement en place en mathématiques (MEQ, 1993) se situe en rupture avec ce scénario ; une façon différente de concevoir l'algèbre et son enseignement est ici envisagée. Ce programme, tout au moins dans ses intentions, cherche à faire en sorte que les élèves voient la pertinence de l'algèbre, accordent un sens au symbolisme algébrique, avant de s'engager plus à fond dans sa manipulation (l'accent est mis sur le raisonnement algébrique et sur un passage signifiant au symbolisme). Déjà le programme de secondaire 1, dans son objectif de « Favoriser chez l'élève l'acquisition de préalables à l'apprentissage de l'algèbre » (MEQ, Programme d'études du secondaire, mathématique 116, 1993, p. 23), s'inscrit dans une telle perspective : le symbolisme apparaît comme un moyen d'exprimer la généralité. Ce volet sera exploité surtout dans des situations numériques, « Toutes les propriétés et règles qui peuvent se généraliser facilement devraient être des prétextes pour amener l'élève à utiliser le langage algébrique » (idem). On retrouve également des occasions d'actualiser cette généralisation dans un contexte géométrique.

Plus spécifiquement, en secondaire 1, deux volets importants se retrouvent à travers divers objectifs généraux consacrés à la préparation de l'algèbre. Le premier volet veut favoriser le passage de l'arithmétique à l'algèbre en assurant la maîtrise par l'élève de certaines habiletés arithmétiques. Ainsi, on cherchera par exemple à enrichir en arithmétique le sens attribué au signe d'égalité pour amener les élèves à considérer celui-ci comme un symbole renvoyant à une signification d'équivalence, et non plus seulement au sens « ça donne » auquel le restreint souvent son utilisation en arithmétique (Kieran, 1981). Le deuxième volet veut permettre à l'élève d'établir certaines différences entre l'arithmétique et l'algèbre au niveau des propriétés et du langage associé. Selon Denis (1997), l'approche utilisée à ce niveau, qui cherche à construire un certain sens au symbolisme algébrique, mise sur la généralisation de régularités à l'aide de situations de suites numériques. On peut à cet effet observer, à travers l'interprétation donnée à cette orientation du programme dans les manuels, un glissement qui s'est opéré de l'idée d'exploitation de situations, qui se voulaient prétextes à une généralisation et à l'introduction du symbolisme algébrique, à un enseignement devenu avant tout celui des suites numériques (Denis, 1997).

L'introduction à l'algèbre va surtout s'affirmer en secondaire 2, et ce, dans un contexte de résolution de problèmes, avec le souci toujours présent (comme en secondaire 1, dans les situations de généralisations) de faire voir la pertinence de ce passage à l'algèbre.

On peut retrouver cette préoccupation à travers l'énoncé suivant « Il est important de présenter aux élèves des problèmes où l'algèbre devient un moyen plus efficace que l'arithmétique. L'élève pourra ainsi apprécier l'importance et l'utilité de l'algèbre. » (MEQ, programme d'études du secondaire, mathématique 216, 1995, p. 26). Cette orientation (faire voir la pertinence d'un passage à l'algèbre) soulève à la base un certain nombre de questions. Considérant en effet l'expérience arithmétique acquise par les élèves en résolution de problèmes pendant de nombreuses années (au primaire et au début du secondaire), une culture arithmétique est déjà en place, qui se manifeste par un corpus particulier de problèmes, une certaine idée du problème et différentes procédures de résolution disponibles. Lorsque les élèves abordent la résolution de problèmes en algèbre, ces expériences antérieures sont à cette étape bien assimilées (Bednarz et Janvier, 1996). Sur quelle base va-t-on devoir en conséquence choisir les problèmes, pour que les élèves voient effectivement la pertinence de passer à un raisonnement algébrique ?[4] Comment se fait la transition de l'arithmétique à l'algèbre pour les élèves ?

D'autres questions surgissent également à la lecture du programme. Celui-ci semble en effet favoriser différents types d'engagements dans les problèmes, comme en témoigne l'énoncé suivant : « Les situations présentées à l'élève pourront se traduire en utilisant plus d'une inconnue » (MEQ, Programme d'études du secondaire, mathématique 216, 1995, p. 26). On laisse donc la place, et ce dès l'introduction à l'algèbre, à différents engagements possibles. Comment juger en ce sens de la pertinence des problèmes à proposer aux élèves, et de manière plus générale de leur gradation d'un niveau scolaire à l'autre puisque cet apprentissage de l'algèbre est censé se poursuivre[5].

Les questions qui précèdent renvoient entre autres à l'articulation d'un niveau scolaire à l'autre ; comment se fait le passage « arithmétique-algèbre » pour les élèves ? Quelle est l'articulation secondaire 2 - secondaire 3 dans le développement même de l'algèbre ?

La présente recherche permet de mieux comprendre l'articulation d'un niveau scolaire à l'autre dans l'apprentissage de l'algèbre, et de mettre en lumière les problèmes possibles que pourraient rencontrer les élèves. Elle s'intéresse plus particulièrement au volet résolution de problèmes et examine son développement d'un niveau scolaire à l'autre, sous l'angle plus particulier des problèmes proposés aux élèves à chacun des niveaux.

2) Pourquoi s'intéresser à la résolution de problèmes en algèbre ?

Nous l'avons vu antérieurement, la résolution de problèmes est une des orientations importantes du programme actuel de mathématiques[6]. Elle est présente parmi les deux grands principes pédagogiques qui l'animent : « Favoriser le processus de résolution de problèmes à toutes les étapes de l'apprentissage. » (MEQ, programme d'études du secondaire, mathématique 116, 1993, p. 16). Ceci donne à la résolution de problèmes un statut privilégié.

Un tel principe laisse toutefois place à de multiples interprétations. La résolution de problèmes a en effet été une partie importante du programme de mathématiques depuis de nombreuses années. Elle est en voie de devenir un slogan recouvrant bien des façons de concevoir l'activité mathématique, la notion de problème et son utilisation (Stanic et Kilpatrick, 1988). Plusieurs approches se retrouvent en fait sous ce terme : un enseignement de la résolution de problèmes basé sur le modèle en quatre étapes développé par Pólya (1989) ; un enseignement dans lequel les problèmes sont essentiellement conçus comme un lieu de réinvestissement des concepts, une approche dans laquelle une idée mathématique spécifique se construit dans la discussion de problèmes mathématiques particuliers (Santos-Trigo, 1998). Il ne s'agit pas, dans ce dernier cas, d'enseigner la résolution de problèmes ou d'utiliser des problèmes pour appliquer les notions, mais d'approcher les concepts en misant sur une utilisation appropriée de problèmes. Il nous semble retrouver là l'orientation que cherche à privilégier le programme, notamment en algèbre. Dans cette perspective, une réflexion sur le choix des problèmes s'avère toutefois importante : les problèmes proposés aux élèves lors de l'introduction à l'algèbre sont-ils appropriés pour faire voir la nécessité d'un passage à un autre type de raisonnement ? Sont-ils adéquatement gradués pour favoriser le développement de ce raisonnement ? Misent-ils à chacun des niveaux sur les connaissances développées antérieurement par les élèves (pour en tirer partie ou les confronter) ? C'est à ces questions que nous avons tenté de répondre par une analyse systématique des problèmes proposés aux élèves à différents niveaux scolaires[7].

3) Cadre de référence sous-jacent à l'analyse des problèmes

En algèbre, l'analyse des problèmes proposés aux élèves (leur nature et leur complexité) a été souvent conduite en regard du traitement du problème. Ainsi, c'est habituellement la « lunette équation » qui guide la répartition des problèmes d'un niveau scolaire à l'autre.

Cette gradation a priori des problèmes s'appuie souvent sur certains présupposés liés à la résolution de l'équation (ainsi les problèmes faisant appel à une équation à une inconnue de type $ax + b = c$ sont considérés plus simples pour les élèves que les problèmes faisant appel à une équation de type $ax + b = cx + d$; les problèmes impliquant un système d'équations à deux inconnues vont apparaître plus tard dans le curriculum parce que plus complexes à résoudre...).

Les études réalisées auprès d'élèves à différents niveaux scolaires dans différents types de problèmes (Bednarz et Janvier, 1994 ; 1996) questionnent cette gradation a priori selon la « lunette équation ». La grille d'analyse développée par l'équipe (Bednarz et Janvier, 1994) permet de mettre en évidence les calculs relationnels (Vergnaud, 1982) impliqués dans la représentation et résolution de tels problèmes (la nature des relations entre les grandeurs, connues et inconnues, leur enchaînement...), de manière à mieux saisir, dans cette analyse a priori des problèmes, les difficultés éventuelles que l'élève va rencontrer (dans la représentation des relations entre les données) et d'anticiper son engagement possible dans le problème. Cette grille, permettant de rendre compte de la complexité des problèmes en algèbre, a été validée auprès de plusieurs groupes d'élèves. Nous ne reprenons ici que quelques-uns des éléments de cette grille[8]. Une étude systématique des problèmes généralement rencontrés en algèbre a conduit tout d'abord à identifier trois grandes classes de problèmes normalement abordés : les problèmes de type « partage inéquitable », les problèmes impliquant une transformation, et les problèmes impliquant une relation entre grandeurs non-homogènes par l'intermédiaire d'un taux. Nous reprenons ci-dessous un exemple de problème de chaque type :

Problème de partage inéquitable :

380 étudiants sont inscrits aux trois activités sportives offertes durant la saison. Il y a trois fois plus d'étudiants inscrits au basket-ball qu'au patinage, et il y a 114 étudiants de plus inscrits à la natation qu'au basket-ball. Combien d'étudiants se sont inscrits à chacune des activités ? (Bednarz et Janvier, 1996)

Dans ce problème, deux types de liens entre les données sont en oeuvre : une certaine quantité totale (connue) est exprimée en regard de ses différentes parties (toutes inconnues) et des relations de comparaison sont explicitées entre celles-ci, une relation additive et multiplicative, impliquant une composition de ces deux relations.

Problème de transformation :

Luc a 3,50 \$ de moins que Michel. Luc double son montant d'argent tandis que Michel augmente le sien de 1,10 \$. Maintenant Luc a 0,40 \$ de moins que Michel. Combien chacun avait-il au départ ? (Bednarz et Janvier, 1994)

Une transformation est ici effectuée sur le montant de départ (inconnu) donnant lieu à un nouvel état (lui aussi inconnu). Deux transformations sont ici en jeu : le montant de Luc double (transformation multiplicative) pendant que le montant de Michel augmente (transformation additive). Les montants de Luc et Michel sont ici liés par des relations de comparaison.

Problème impliquant un taux :

Pour rejoindre deux villes, un homme en moto a réalisé une vitesse moyenne de 80 km/h dans un sens et de 60 km/h dans l'autre sens, il a accompli ainsi un aller retour en 7 heures. Quelle est la distance entre les deux villes ?

Dans ce problème, un certain lien entre des grandeurs non-homogènes (distance entre les deux villes et temps mis pour parcourir le trajet entre les deux villes) est exprimé à l'aide d'un taux (vitesse à l'aller, vitesse au retour). Une relation, implicite dans le problème, est en jeu (la distance est la même à l'aller ou au retour), et le temps mis à l'aller et au retour est une donnée implicite (que l'élève doit considérer).

Les analyses a priori précédemment explicitées sur certains problèmes permettent de mettre en évidence certains éléments clés autour desquels va s'organiser l'engagement dans le problème. Les résultats des recherches conduites par l'équipe mettent par ailleurs en évidence, pour une classe particulière de problèmes sur laquelle nous nous attarderons plus spécifiquement par la suite (les problèmes de type « partage inéquitable »), certains éléments susceptibles d'expliquer la complexité du problème pour l'élève :

- Le *nombre de relations de comparaison impliquées* (impliquant une gestion plus ou moins complexe des données). Ainsi, les problèmes n'impliquant qu'une relation de comparaison entre les données sont des problèmes simples, qui peuvent se résoudre facilement par arithmétique, et motivent peu un passage à l'algèbre. Il en est ainsi par exemple du problème suivant : *Jean et Michel ont 232 billes ensemble. Si Michel a 3 fois plus de billes que Jean, combien ont-ils de billes chacun ?* Les problèmes impliquant deux relations de comparaison et plus vont apparaître plus complexes à gérer arithméti quement par les élèves.

- La *nature des relations* entre les données (composition de deux relations additives versus multiplicatives, versus additive et multiplicative) : la composition va apparaître ici plus ou moins complexe à prendre en compte dans le raisonnement.

- L'*enchaînement* de ces relations (référant à un même générateur ou non, impliquant une composition ou non). Ainsi les problèmes dans lesquels les différentes grandeurs peuvent être générées directement à partir d'une même grandeur (problème de type « source ») apparaissent, pour les élèves, plus simples à gérer :

Exemple : Trois enfants jouent aux billes. Ils ont ensemble 198 billes. Pierre a 6 fois plus de billes que Denis et Georges a 2 fois plus de billes que Denis. Combien de billes possède chacun des enfants ?

Le schéma suivant illustre la structure générale de ce problème (nombre et nature des relations entre les données et le type d'enchaînement) :

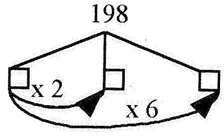


Figure 1

Les problèmes impliquant une composition de relations apparaissent beaucoup plus complexes pour les élèves :

Exemple : 380 élèves sont inscrits aux activités sportives durant la saison. Le basket-ball regroupe 3 fois plus d'élèves que le patinage, et la natation regroupe 114 élèves de plus que le basket-ball. Combien d'élèves participent à chacune des activités ? (Dans ce cas, le nombre d'élèves inscrits au patinage se répète 3 fois pour retrouver le nombre d'élèves au basket-ball, et encore 3 fois pour retrouver, si on lui ajoute 114, le nombre d'élèves inscrits à la natation)

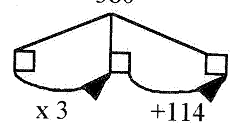


Figure 2

Enfin, les problèmes de type « puits » (qui mettent en jeu des relations de comparaison dans lesquelles une des données est générée à partir de deux autres données) apparaissant pour les élèves les plus complexes :

Exemple : Trois enfants jouent aux billes. Ils ont ensemble 198 billes. Pierre a 6 fois plus de billes que Denis et 3 fois plus de billes que Georges. Combien de billes possède chacun des enfants ?

(le nombre de billes de Pierre est ici généré à partir de deux grandeurs différentes)

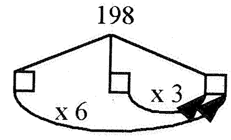


Figure 3

Ce cadre de référence permet non seulement de rendre compte de différents types de problèmes en algèbre, mais également de mettre en évidence ce qui différencie un problème « arithmétique » d'un problème « algébrique ». Par exemple, nous pourrions générer à partir des problèmes présentés précédemment des problèmes qui pourraient être facilement présentés dans un contexte arithmétique :

Problème de transformation présenté précédemment :

Luc a 3,50 $ de moins que Michel. Luc double son montant d'argent, tandis que Michel augmente le sien de 1,10 $. Maintenant Luc a 40 sous de moins que Michel. Combien Luc et Michel ont-ils chacun à présent ?

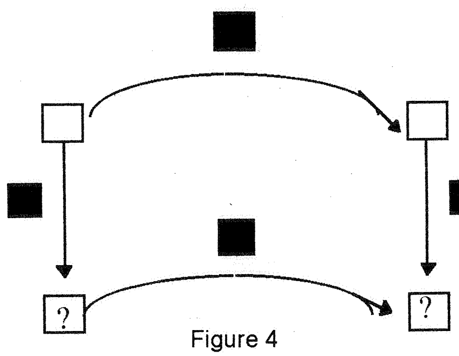


Figure 4

Problème qui pourrait être présenté dans un contexte arithmétique :

Luc a 3,50 $ de moins que Michel. Luc double son montant d'argent, tandis que Michel augmente le sien de 1,10 $. Maintenant Luc a 40 sous de moins que Michel. Combien Luc et Michel ont-ils chacun à présent, si Michel avait au départ 7,70 $?

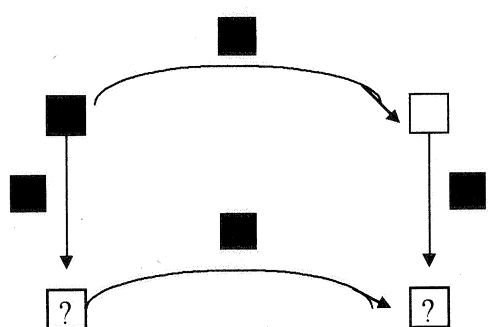


Figure 5

Il est clair dans ce schéma, celui du deuxième problème, qu'il est aisé pour l'élève de construire des « ponts » entre les données connues, permettant à celui-ci de s'engager dans une résolution à partir des données connues pour aboutir à la quantité recherchée (résolution arithmétique) : en partant du montant connu, 7,70 $ (le montant que Michel a au départ), il est possible de retrouver ce qu'a Luc au départ (7,70 $ – 3,50 $ = 4,20 $) puis les montants de Michel à la fin (7,70 $ + 1,10 $ = 8,80 $) et de Luc (4,20 $ x 2 = 8,40 $). Dans le premier cas, l'élève ne peut établir de pont directement entre les données connues (les seules données connues sont ici des relations et des transformations), de sorte qu'il ne peut procéder en partant d'une donnée connue et en opérant sur celle-ci pour trouver les autres données. En arithmétique, les problèmes qui sont généralement présentés aux élèves sont des problèmes que nous qualifions de « connectés » : une relation peut facilement être établie entre des quantités connues conduisant à la possibilité d'un raisonnement arithmétique (du connu à l'inconnu en fin de processus). Au contraire, en algèbre, les problèmes normalement présentés aux élèves sont qualifiés de « déconnectés » : aucun pont ne peut être établi directement entre les données connues[9] (Bednarz et Janvier, 1996).

4) Méthodologie

Cette grille nous a permis d'analyser les problèmes présentés aux différents niveaux scolaires. Nous avons procédé à une analyse systématique de tous les problèmes proposés aux élèves à l'intérieur de deux manuels couramment utilisés dans le milieu scolaire, depuis l'apparition du nouveau programme (MEQ, 1993)[10].

Pour réaliser cette analyse systématique des problèmes, nous nous sommes fixé certains critères : en secondaire 1, nous avons regardé les problèmes que les manuels présentent en arithmétique (la résolution de problèmes à ce niveau ayant trait à l'arithmétique) en caractérisant les classes de problèmes que l'on retrouve (taux, comparaison et transformation). Pour les autres niveaux, nous avons examiné les classes de problèmes proposés par ces mêmes manuels en algèbre. Pour secondaire 2 plus spécifiquement, où l'enseignement de l'algèbre est centré sur la résolution de problèmes, nous avons de plus analysé l'ordre dans lequel les problèmes sont introduits dans les deux manuels de manière à mieux cerner la pertinence des problèmes proposés et leur gradation.

5) Résultats

La présentation des résultats sera divisée en trois parties. La première examinera globalement l'articulation d'un niveau scolaire à un autre, sous l'angle des classes de problèmes que l'on retrouve à chacun des niveaux. La deuxième partie traitera plus particulièrement de l'introduction à l'algèbre en secondaire 2, en mettant en évidence le niveau de complexité des problèmes présentés aux élèves selon chacun des manuels (Y a-t-il un choix approprié qui motive un passage éventuel à l'algèbre ?). La troisième et dernière partie portera, toujours en secondaire 2, sur la gradation des problèmes proposés à l'intérieur de chacun des manuels (prise en compte ou non de la complexité des problèmes ?).

5.1 Articulation d'un niveau scolaire à un autre

La figure ci-dessous permet de rendre compte globalement, après analyse de chacun des manuels, du type de problèmes rencontrés à chacun des niveaux scolaires.

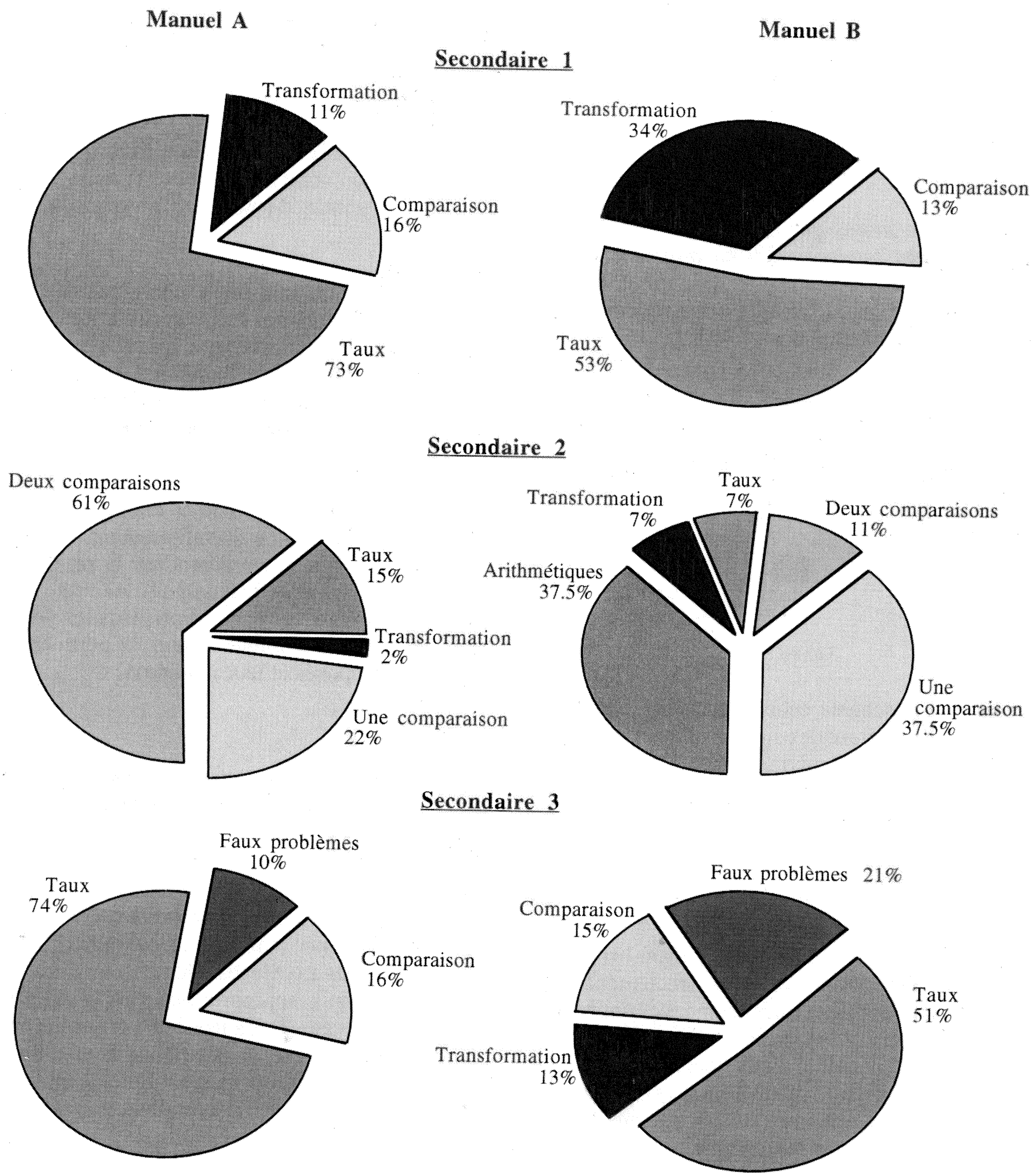


Figure 6 : Analyse des types de problèmes présentés dans les deux manuels

Nous pouvons tout d'abord remarquer que les problèmes de taux sont majoritaires dans les deux manuels, en secondaire 1, avant toute introduction à l'algèbre (on retrouve 73 % de problèmes de ce type dans le manuel A, et 53 % dans le manuel B), alors qu'en secondaire 2, ce sont les problèmes de type « partage inéquitable » (impliquant des relations de comparaison) qui dominent (83 % dans le manuel A, et 48,5 % dans le manuel B). Ce résultat met en évidence une première rupture dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes.

En effet, le corpus de problèmes auquel les élèves sont majoritairement confrontés en secondaire 1 en est un de problèmes impliquant des relations entre grandeurs non-homogènes par l'intermédiaire d'un taux. Un tel constat est sans doute cohérent avec les orientations du programme de secondaire 1 qui met l'accent entre autres sur l'apprentissage des nombres rationnels. Toutefois, on peut s'étonner que ces connaissances développées dans le cadre de l'arithmétique ne soient nullement reprises dans un contexte de résolution de problèmes en algèbre, surtout si l'on sait que le programme de secondaire 2 met l'accent sur le développement proportionnel, et que de tels problèmes doivent sans doute être repris à ce niveau en arithmétique. Pourquoi ne pas miser davantage sur ces connaissances aussi dans le développement du raisonnement algébrique, d'autant que, nous pouvons l'observer sur la figure 6, ces problèmes occupent de nouveau une place centrale en secondaire 3[11]. À l'opposé, on peut observer que rien ne prépare les élèves, par le travail fait antérieurement en arithmétique à aborder la résolution de problèmes impliquant des relations de comparaison, présents massivement lors de l'introduction à l'algèbre[12]. Or nous savons que les élèves éprouvent beaucoup de difficultés à se représenter et symboliser ces relations de comparaison et leur enchaînement (Kaput, 1983 ; Fisher, 1988 ; Malle, 1990 ; Bednarz et Janvier, 1996). Un travail préalable nous semble donc nécessaire en arithmétique pour rendre les élèves plus habiles à se représenter ces relations, pour développer chez eux une certaine flexibilité (pouvoir formuler autrement la relation, l'illustrer...). Sur quelles connaissances les élèves pourront-ils se baser pour résoudre les problèmes de comparaison lors de l'introduction à l'algèbre, s'ils n'ont presque pas développé de connaissances face à ce type de problème en arithmétique ? Une séquence d'enseignement réalisée auprès d'élèves de secondaire 2, ayant mis l'accent sur une réflexion des relations de comparaison dans des problèmes en arithmétique et sur le passage à l'algèbre dans un contexte de généralisation, montre l'apport d'un tel travail préalable pour le développement de raisonnements algébriques dans un contexte de résolution de problèmes (Landry, 1999).

Finalement, l'analyse fait aussi ressortir, au-delà des discontinuités d'un niveau scolaire à l'autre, une classe de problèmes peu exploitée, celle mettant en jeu des transformations (quasi-absente en secondaire 2 et 3, disparaissant même à ce niveau dans un des manuels, et également faiblement considérée en secondaire 1 en arithmétique). Or, il s'agit là d'une classe importante de problèmes en algèbre, et l'on sait que la dimension temporelle présente dans les transformations apparaît complexe pour les élèves.

Cette première analyse révèle aussi des différences entre les deux manuels considérés : ainsi, même si minoritaires, les problèmes de transformations sont davantage pris en compte dans le manuel B que dans le manuel A en arithmétique. On peut observer aussi une différence importante en secondaire 2 sur laquelle nous reviendrons par la suite. En secondaire 3, nous voyons apparaître une catégorie de problèmes, dits « faux problèmes », particulièrement dans le manuel B, qui sont en fait une traduction directe de l'équation. L'élève n'est donc pas confronté dans ce cas à un véritable problème à résoudre, mais davantage à une simple traduction de l'équation, par exemple : *La moitié de l'âge de la grand-mère d'Annick plus 16 donne 50 ans. Quel âge a-t-elle ?*

$$\left(\frac{x}{2}+16=50,\ x=?\right)$$

Nous reviendrons maintenant sur les problèmes présentés en secondaire 2, à la lumière des question suivantes : motivent-ils l'élève à un passage à l'algèbre ? Sur quelle base se fait le choix de problèmes considérés ?

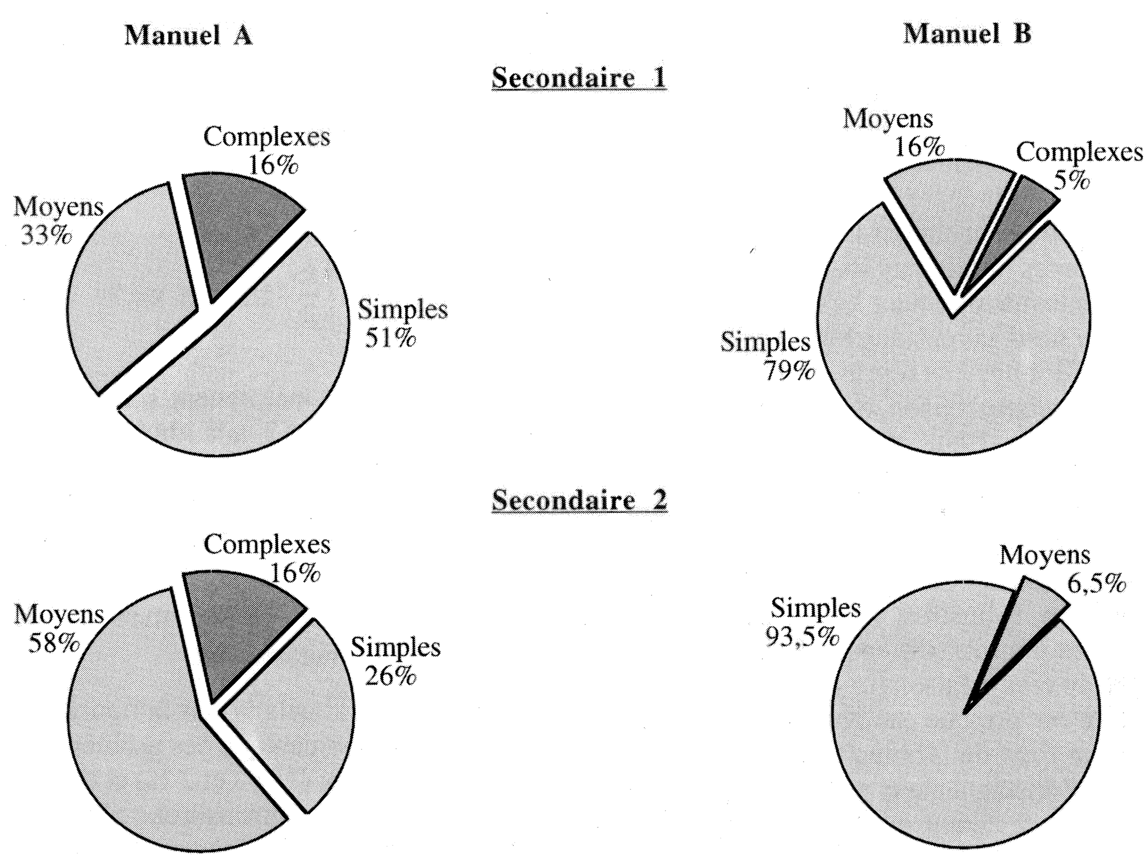
5.2 Analyse des problèmes présentés en deuxième secondaire

Pour les deux manuels[13] (voir la figure 6), il y a seulement un petit pourcentage des problèmes qui sont des problèmes de taux (15 % et 7 %) et de transformation (2 % et 7 %). Concentrons-nous plutôt sur les autres types de problèmes. On constate tout d'abord une forte présence de problèmes arithmétiques (problèmes connectés) dans lesquels ils est possible pour l'élève d'utiliser un raisonnement arithmétique (37,5% d'entre eux), pour le manuel B, et ce rappelons-le même si cette analyse porte sur les problèmes que l'on retrouve dans la section consacrée à l'algèbre. Quant aux problèmes de type « partage inéquitable », déconnectés, la différence apparaît déjà là considérablement importante entre les deux manuels (83 % pour le manuel A versus 48,5 % pour le manuel B).

Une analyse plus fine de cette classe de problèmes montre plus précisément qu'il s'agit dans ce dernier cas (manuel B) essentiellement de problèmes impliquant un seul lien de comparaison (37,5 %), motivant donc peu pour l'élève un passage à l'algèbre. Il est en effet encore simple pour l'élève de résoudre dans ce cas le problème en ayant recours à un raisonnement arithmétique (Bednarz et Janvier, 1996).

Selon les orientations du programme d'études, l'algèbre est introduite en secondaire 2 et les problèmes proposés aux élèves devraient motiver un passage au raisonnement algébrique. Or, nous avons vu plus haut (voir p. 7) que les problèmes avec seulement une relation de comparaison étaient aisément résolubles par l'arithmétique, donc ne motivaient pas un passage à l'algèbre.

Afin d'amener les élèves à sentir la pertinence d'avoir recours à un autre type de raisonnement, il faudrait présenter des problèmes davantage complexes, avec au moins deux relations de comparaison, dans lesquels le raisonnement arithmétique devient moins aisé. Si nous regardons la figure 6, nous pouvons voir qu'il y a un écart considérable de ce point de vue entre les deux manuels. Le manuel A présente 61 % de ce type de problèmes, contre seulement 11 % pour le manuel B. Ceci risque d'influencer le passage à une résolution algébrique pour les élèves utilisant le manuel B : ces derniers ne verront sans doute pas la pertinence de ce passage puisqu'ils sont capables de résoudre la majorité des problèmes proposés avec un raisonnement arithmétique ; 37,5 % de problèmes arithmétiques et 37,5 % de problèmes déconnectés impliquant un seul lien de comparaison, soit 75 % des problèmes présentés dans les rubriques algébriques du manuel.



Cette analyse met en évidence des écarts remarquables entre le niveau de difficulté des problèmes proposés aux élèves, lors de l'introduction de l'algèbre. Le degré de complexité des différents problèmes, en secondaire 1 et 2, voir la figure 7, vient confirmer les premiers résultats (figure 6). En référence à la grille présentée précédemment, sont ici considérés simples les problèmes arithmétiques et déconnectés impliquant un seul lien de comparaison, ou encore les problèmes avec deux relations de comparaison référant directement à un même générateur (problème « source »), moyens, les problèmes impliquant une composition des deux relations de comparaison, et complexes, les problèmes de type « puits ». Une analyse semblable a aussi été appliqué aux problèmes de transformation et de taux (relations plus ou moins complexes à gérer) pour secondaire 1, étant donné leur importance à ce niveau (ceux-ci sont donc inclus dans les résultats). Pour secondaire 2, nous avons ainsi exclu les problèmes de taux et de transformation étant donné leur faible pourcentage (17 % et 14 %).

À la lumière de cette analyse, nous pouvons penser que les élèves utilisant le manuel A sont susceptibles de réaliser davantage un passage à l'algèbre, de fait, mieux performer face aux problèmes algébriques[14].

5.3 Articulation des problèmes à l'intérieur d'un même manuel

Cette dernière facette de l'analyse a été entreprise également en secondaire 2. Notons que, là aussi, nous avons constaté des écarts dans la progression à laquelle étaient soumis les élèves dans chacun des manuels. Nous reprendrons globalement certains de ces constats.

Dans le manuel A, une certaine cohérence peut être observée dans la gradation des problèmes proposés aux élèves. Ainsi, dans ce manuel, les élèves sont tout d'abord amenés à travailler, avec l'aide de petits énoncés, sur différents types de liens entre les données (taux, comparaison et transformation), et divers enchaînement entre les relations de comparaison (source, composition et puits), sans avoir toutefois à entreprendre la résolution d'un problème. Il s'agit là plutôt d'une réflexion sur les relations (on fait formuler la composition, illustrer la relation...). La démarche de résolution de problèmes n'apparaît que dans un deuxième temps.

Une variété de problèmes sont proposées aux élèves dans ce cadre : des problèmes de taux, de transformation et des problèmes impliquant des relations de comparaison (avec une et plusieurs relations). La présentation des problèmes dans le manuel, l'ordre dans lequel ils apparaissent, nous montre que les auteurs semblent avoir un cadre de référence implicite qui guide leur choix. Ainsi, ils présentent dès le début les trois types de problèmes (taux, transformation et partage inéquitable) ; pour les problèmes de partage inéquitable, ces derniers ne se sont pas limités à des problèmes impliquant une seule relation de comparaison, et parmi les problèmes impliquant deux relations de comparaison, nous retrouvons divers types d'enchaînement : 26 % de ces problèmes sont de type « source », 58 % mettent en jeu une « composition » et 16 % sont des problèmes de type « puits ». Donc, par la gradation et la variété des problèmes, ce manuel semble se soucier de favoriser chez les élèves un passage à l'algèbre, en jouant sur des problèmes de divers degrés de complexité.

Pour le manuel B, les constats sont tout autres. On ne peut dégager de cohérence à travers l'articulation, la progression proposée aux élèves. Ainsi, le premier problème présenté (problème impliquant de multiples liens : taux, comparaison et transformation) est le plus complexe du livre et nous n'en retrouvons pas de semblables par la suite. Sur une même page, il est courant de retrouver différents types de problèmes, de différents niveaux de complexité, et aucune note pédagogique ne mentionne ceci ; une telle analyse met en évidence que le niveau de difficulté de chacun des problèmes ne semble pas avoir été pris en considération lors de la rédaction du manuel.

Parmi les problèmes de « partage inéquitable », impliquant deux relations de comparaison (11 %), l'enchaînement des liens réfère souvent (50 %) à un même générateur (problème « source ») et l'autre moitié se réfère à des problèmes mettant en jeu une « composition » (aucun problème « puits » n'y est présenté). L'élève pourra donc difficilement tabler dans ce contexte sur des problèmes qui forcent un passage à un autre type de raisonnement que le raisonnement arithmétique.

6) Conclusion

Les résultats de cette présente recherche mettent en évidence des discontinuités importantes d'un niveau scolaire à l'autre dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre et le développement de l'algèbre, questionnant le choix des problèmes proposés à chacun des niveaux. Les expériences arithmétiques des élèves semblent peu les préparer à aborder la résolution de problèmes en algèbre, des lacunes importantes peuvent ici être mises en évidence, notamment à l'égard du travail sur les relations de comparaison. Inversement, le travail amorcé en algèbre ne semble pas se poursuivre aux autres niveaux. Certains types de problèmes s'avèrent absents du curriculum. Un tel manque d'articulation n'étant pas sans conséquence pour l'apprentissage des élèves, il y a lieu de s'interroger sur les problèmes à proposer aux élèves à chacun des niveaux, de manière à favoriser une complexification des connaissances et raisonnements des élèves en algèbre.

L'analyse plus spécifique de l'introduction à l'algèbre dans chacun des manuels fait ressortir par ailleurs, au delà du programme, des différences importantes, montrant la nécessité de s'interroger sur les approches plus particulières mises en place et leurs conséquences chez les élèves. Le choix de situations n'est en effet ici pas anodin, puisqu'il détermine la façon dont les élèves verront ou non la pertinence d'un passage au raisonnement algébrique, et saisiront la puissance éventuelle de l'algèbre à résoudre une classe de problèmes pour laquelle le raisonnement arithmétique se révèle insuffisant.

Ceci nous rappelle que nous devons toujours avoir un esprit critique face au matériel que nous utilisons en classe, et qu'il faut, comme enseignant, nous outiller pour analyser ce matériel.

En terminant, rappelons que nous n'avons examiné que la section portant sur la résolution de problèmes en algèbre (en secondaire 2 et 3) et en arithmétique (en secondaire 1). Notre analyse ne doit donc pas être perçue comme une étude globale favorisant ou non l'utilisation du manuel A ou B. L'éclairage apporté toutefois par une telle étude nous montre l'importance de poursuivre de telles analyses sur d'autres aspects fondamentaux du programme (géométrie et apprentissage de l'argumentation, algèbre et fonction...). De telles analyses permettraient d'asseoir davantage les réformes en cours, évitant ainsi peut-être des changements brutaux, dont les conséquences peuvent être déterminantes pour les élèves. ■

Notes

[1] Patricia Marchand est étudiante au doctorat en éducation et chargée de cours à l'université de Montréal. Nadine Bednarz est professeure au département de mathématiques de l'UQAM et chercheuse au CIRADE. Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un mémoire de maîtrise en mathématiques, option enseignement, à l'UQAM.

[2] Une telle analyse nous semble importante. On peut en effet regretter que de telles analyses sur des parties fondamentales du programme de mathématiques ne soient jamais réalisées, avant que ne s'engagent en profondeur de nouvelles réformes.

[3] Une étude a par ailleurs été conduite à différents niveaux scolaires faisant ressortir les raisonnements mis de l'avant par les élèves (Marchand, 1998). Ces résultats ne sont pas repris dans le cadre de cet article.

[4] Plusieurs des problèmes présentés en secondaire 2 dans l'ancien scénario ne motivaient guère un tel passage, les élèves étant capables de résoudre facilement ces derniers par arithmétique. Il en était ainsi par exemple du problème suivant : *La façade d'un édifice a 7 fenêtres au premier étage, 8 au deuxième, et 5 au troisième. Si toutes les fenêtres sont semblables et qu'il y a 160 carreaux en tout, combien une fenêtre a-t-elle de carreaux ?*

[5] L'orientation donnée au curriculum en secondaire 3 prépare l'apprentissage des fonctions, et semble en fait délaisser le travail amorcé en secondaire 2 sur la résolution de problèmes, en privilégiant davantage la traduction d'un mode de représentation à l'autre en regard d'une situation (tableau, graphique, symbolisme de l'équation).

[6] Elle forme également, dans les nouvelles orientations qu'on vise à mettre en place, une des compétences retenues.

[7] Une analyse a également été conduite des raisonnements élaborés par les élèves à différents niveaux scolaires, dont nous ne rendons pas compte dans cet article.

[8] La grille d'analyse met en évidence, a priori, les calculs relationnels impliqués dans le problème. Il ne s'agit pas ici de la représentation que l'élève peut se construire du problème, mais bien d'une représentation a priori des relations entre les données du problème.

[9] Ceci ne signifie pas qu'un problème de ce type ne peut pas être résolu par l'arithmétique. Toutefois, et c'est là que la grille développée par l'équipe, et présentée précédemment, a un intérêt, le raisonnement arithmétique va être plus ou moins aisé à mener par l'élève, voire impossible, en regard de la complexité plus ou moins grande des problèmes.

[10] Il serait intéressant d'élargir cette analyse à d'autres manuels et à d'autres niveaux scolaires. Cette étude, bien qu'exploratoire puisqu'elle ne portait pas sur tout le matériel disponible, nous fournit cependant un premier indice quant à l'articulation d'un niveau scolaire à l'autre et aux difficultés qui se posent.

[11] L'insertion de problèmes de taux en secondaire 2, pour l'introduction à l'algèbre, supposerait bien sûr une analyse préalable de la complexité de ces problèmes, de manière à choisir des problèmes appropriés.

[13] Le travail fait à ce sujet au primaire ne prépare pas plus les élèves à aborder ces relations. Les élèves vont être amenés à comparer différentes grandeurs, mais rarement à exprimer la relation de comparaison de différentes façons ou à la reconstruction.

[14] Cette analyse ne présume en rien des autres sections des manuels. Elle est restreinte à une partie du programme touchant à l'algèbre, sous l'angle de la résolution de problèmes.

[15] Nous ne prétendons nullement que tous les problèmes du manuel sont effectués par les élèves, toutefois l'analyse a priori des problèmes fait ressortir des différences importantes entre les deux manuels. Les résultats des élèves, suite à une études auprès d'élèves non reprise ici, confirment cette analyse a priori.

Références bibliographiques

Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra : Perspectives for Research and Teaching.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). "Emergence and development of algebra as a problem-solving tool : continuities and discontinuities with arithmetic." In Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (eds.) *Approaches to Algebra : Perspectives for Research and Teaching.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, p. 115-136.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1995). « L'enseignement de l'algèbre au secondaire, une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. » In Daife. A. et al. (Eds.) *Actes du colloque sur la didactique des mathématiques et la formation des enseignants.* Maroc, École supérieure de Marrakech, p. 21-40.

Bednarz, N., et Janvier, B. (1994). "The emergence and development of algebra in a problem solving context : a problem analysis." In da Ponte, J.P. et Matos, J.F. (eds.) *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Lisbonne, Portugal. Vol. II, p. 64-71.

Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B., et Lepage, A. (1992). "Arithmetical and algebraic thinking in problem-solving." In Geeslin, W. et Graham, K. (eds.) *Proceedings of the 16th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Durham, NH, Vol. 1, p. 65-72.

Booth, L.R. (1984). "Algebra : Children's strategies and errors." Windsor, UK, NFER-Nelson.

Clement, J. (1982). "Algebra word problems solutions : thought processes underlying a common misconception." *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, p. 16-30.

Denis, C. (1997). *Une introduction de l'algèbre : généralisation et construction de formule.* Mémoire de maîtrise en enseignement des mathématiques. Montréal, Université du Québec à Montréal.

Filloy, E., et Rubio, G. (1991). "Unknown and Variable in Analytical Methods for Solving Word Arithmetic/Algebraic Problems." In Underhill, R.G. (ed), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting, North American Chapter for the Psychology of Mathematics Education.* Blackburg, Virginia, VA, Vol.1, p. 64-69.

Filloy, E., et Rojano, T. (1989). "Solving Equations : the transition from Arithmetic to Algebra." *For the learning of mathematics,* 9 (2), p. 19-25.

Fisher, K. (1988). "The students and professors problem revisited." *Journal for Research in Mathematics Education*, p. 260-262.

Herscovics, N. et Linchevski, L. (1991). "Pre-algebraic thinking : Range of equations and informal solution processes used by seventh graders prior to any instruction." In Furinfhetti, F. (eds.), *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Assisi, Italie, Vol. II, p. 173-180.

Janvier, C. (1978). "The interpretation of complex Cartesian graphs representing situations." Dissertation doctorale non publiée, Université de Nottingham.

Janvier, C., Charbonneau, L. et René de Cotret, S. (1989). "Obstacles épistémologiques à la notion de variable : Perspectives historiques." In Bednarz, N. et Garnier, C. (eds.) *Construction des savoirs : Obstacles et conflits.* Montréal, Agence d'Arc, p. 64-75.

Kaput, J. (1983). "Errors in translations to algebraic equations : roots and implications." *Focus on learning problems in mathematics,* 5, p. 63-78.

Kieran, C. (1981). "Concepts associated with the equality symbol." *Educational Studies in Mathematics,* 12, p. 317-326.

Landry, M. (1999). *Développement d'habiletés en résolution de problèmes en algèbre chez les élèves du secondaire.* Thèse de doctorat en éducation. Montréal, UQAM.

Malle, G. (1990). "Semantic problems in elementary algebra." *Proceedings of BISME-2,* Bratislava, p. 37-57.

Marchand, P. (1998). *Résolution de problèmes en algèbre au secondaire : analyse de deux approches et des raisonnements des élèves.* Mémoire de maîtrise en mathématiques, option enseignement. Montréal, UQAM.

Ministère de l'Éducation du Québec (1993-94). Programme d'études, secondaire, mathématique 116, 216.

Pólya, G. (1989). *Comment poser et résoudre un problème.* Sceaux, J., Gabay, 237 pages.

Santos-Trigo, M. (1998). "On the implementation of mathematical problem solving instruction : qualities of some learning activities." *Issues in Mathematics Education,* 7, p. 71-80.

Stanic, G., Kilpatrick, J. (1988). "Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum." In Charles, R.I., Silver, E.A. (eds.) *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.* Reston, VA, National Council of Teachers of mathematics.

Vergnaud, G. (1982). "A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems." In Carpenter, T.P., Moser, J.M. et Romberg, T.A. (eds.) *Addition and Subtraction : A cognitive Perspective.* Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum, p. 39-59.