L'histoire de la trigonométrie comme outil de réflexion didactique

Jérôme Proulx[1]
Étudiant à la maîtrise en mathématiques à l'UQAM (option didactique)

1. Introduction

Dans cet article, nous nous intéresserons à l'histoire de la trigonométrie qui permet, selon nous, de susciter une réflexion et un questionnement didactiques profonds sur son enseignement. Nous considérons que cet enseignement nécessite une attention particulière due aux nombreuses difficultés qu'il présente autant chez les élèves dans leur apprentissage que chez les enseignants dans leur enseignement : la trigonométrie n'est pas évidente. L'accent, ici, sera surtout mis sur la trigonométrie du triangle, point de départ de l'étude de cette notion dans l'enseignement secondaire au Québec.

Selon nous, l'analyse historique d'un concept mathématique est importante puisqu'elle peut aider les enseignants et les élèves à mieux le comprendre à travers son évolution. Cela permet de retracer le développement scientifique du concept tel qu'il a été vécu dans l'histoire. De plus, et surtout, cette évolution historique permet de mettre en relief les problèmes qui sont survenus et les difficultés majeures que les mathématiciens du temps ont vécues et surmontées, et qui ont eu un rôle sur la compréhension du concept. Ces obstacles et difficultés « historiques » peuvent, selon nous, donner un sens à certaines réactions et difficultés d'élèves qui peuvent autrement sembler quelques fois insensées et devant lesquelles nous sommes parfois sans ressources. Dans cette lignée, Sfard et Linchevski (1994) relient de très près le développement de la pensée algébrique chez l'enfant au développement historique de l'algèbre. Ces derniers prennent appui sur Garcia et Piaget (1989) qui ont fait des travaux fort intéressants sur l'analogie existant entre le développement historique et le développement psychologique.

Pour nous, il est essentiel que les élèves voient la pertinence des concepts mathématiques. En plus de donner un sens au concept mathématique étudié, nous croyons qu'une perspective historique peut possiblement relier ces mathématiques à des contextes[2] de la vie actuelle ou à ceux de la vie passée et, par le fait même, mettre en évidence son utilité et sa pertinence (actuelles ou historiques).

Nous croyons de plus que la connaissance de l'histoire d'un concept est très enrichissante, voire même essentielle pour les enseignants. En effet, selon nous, il ne suffit pas de connaître une notion mathématique pour en saisir toute sa richesse : il faut posséder une certaine culture à propos de ce savoir. La connaissance de l'histoire d'un sujet et de son développement permet de capter une grande partie de toute cette richesse et, même, de s'en imprégner. En plus, l'enseignant peut mieux saisir l'essence d'un sujet en regard de ses fondements. L'histoire permet ainsi à l'enseignant de mieux comprendre lui-même le concept et son évolution et le met en position de mieux le faire comprendre aux élèves par des références à certains événements, à certaines situations sociales et culturelles où il se manifeste. La connaissance de l'évolution historique met de la chair autour d'une notion. Par elle, les élèves comprendront qu'il y a (ou qu'il y a eu) un but et un sens à son apprentissage.

Nonobstant ce beau et séduisant discours, il ne faut pas perdre de vue que l'histoire ne fournit à elle seule ni la clé ni la solution aux problèmes d'enseignement d'une notion. Il ne faut surtout pas vouloir reproduire à tout prix l'histoire. Il s'agit simplement de la comprendre pour y déceler des pistes et des idées concernant son enseignement et son apprentissage, comme soulignent Sfard et Linchevsky :

> *Although much caution is advisable, logical analysis* [of history] *should not be dismissed altogether as a potential source of insight about the process of learning* (*Même si une grande prudence est de mise, l'analyse logique* [de l'histoire] *ne doit pas être mise de côté comme source potentielle d'idées concernant le processus d'apprentissage*) (Sfard et Linchevski, 1994, p. 195).

Nous débuterons cet article par un tour d'horizon sur l'origine du vocabulaire employé en trigonométrie, puis nous ferons une étude détaillée de certaines étapes du développement de ce sujet à travers l'histoire et les peuples [Cette analyse historique s'appuie sur les travaux de Charbonneau (2001a, 2001b), El Idrissi (1998), NCTM (1969) et Katz (1988, 1998)]. Finalement, en guise de conclusion, nous émettrons cinq points de vue qui émergent de cette analyse systématique et que nous considérons importants comme outils de réflexion sur l'enseignement de la trigonométrie.

2. Historique du vocabulaire trigonométrique

Le mot TRIGONOMÉTRIE n'a été utilisé pour la première fois qu'en 1595 par l'allemand Pitiscus. Ce mot est formé d'une part du grec *trigônon*, provenant de *tri* (trois) et *gônia* (angle), qui désigne tout élément en forme de triangle. Il est constitué d'autre part de *metria* qui signifie « mesure ». La TRIGONOMÉTRIE est donc la science qui s'occupe de la mesure des triangles. Cette date tardive d'utilisation du mot TRIGONOMÉTRIE surprend moins lorsqu'on sait qu'auparavant la trigonométrie ne se travaillait pas dans des triangles rectangles usuels, mais plutôt dans le cercle, c'est-à-dire en lien avec l'astronomie — comme nous le verrons plus loin.

Au début, les Arabes utilisaient le mot « ombre » pour désigner la TANGENTE. Cet usage des ombres provenait des Indiens[3] dans un contexte de mise en relation de l'ombre d'un bâton avec l'angle d'élévation du soleil. Ce sont par la suite les Européens, dans leurs traductions des livres arabes, qui remplaceront ce mot par TANGENTE [provenant de *tangens*, participe présent de *tangere* signifiant « toucher »], car dans les travaux de certains arabes, en particulier al-Tusi, la tangente était une droite qui touchait le cercle en un point.

Le terme SINUS a peut-être l'histoire la plus surprenante. Le terme utilisé par les Indiens était *ardhajya* qui désignait demi-corde[4]. Cependant, le mathématicien Indien Aryabhata (466-550) utilisait souvent le terme *jya* ou *jiva*, et lorsque les Arabes traduiront les textes Indiens, ils utiliseront directement le terme *jiva* — qui n'a toutefois aucune signification en Arabe. Alors, puisqu'en arabe on n'écrit que les consonnes, *jiva* s'écrira *jv* ou *jb* (les lettres « b » et « v » se confondant en une seule : le « b »). Les Arabes chercheront donc quelque chose dans leur vocabulaire s'écrivant *jb* : ils choisiront le mot *jaïb*, qui signifie poitrine, poche ou même golfe. Plus tard, lors de la traduction de l'arabe au latin au 12e siècle, Gérard de Crémone emploiera le terme SINUS qui signifie d'ailleurs une ouverture ou une cavité — nous n'avons qu'à penser à nos cavités nasales ou aux vieilles cartes géographiques qui désignent le golfe du Mexique comme le *Sinus Mexicanus*.

Le mot COSINUS est composé de *co* et de *sinus*. Le COSINUS est donc défini à travers le *sinus* avec le préfixe *co*, pour « complémentaire », signifiant ainsi le « sinus du complémentaire d'un angle ». Il est à noter que la cotangente sera aussi définie à partir de la tangente.

3. La trigonométrie à travers les âges

Notre étude historique établira implicitement que la trigonométrie du triangle et celle du cercle se sont développées indépendamment l'une de l'autre, jusqu'à ce que les Arabes essaient de les fusionner au 12e siècle. Cela aura, selon nous, de grandes répercussions au niveau des réflexions didactiques possibles sur le sujet.

3.1 Les Égyptiens (vers 1650 avant notre ère)

Les historiens associent les balbutiements de la trigonométrie aux Égyptiens depuis qu'on a remarqué que les trois pyramides de Gizeh avaient des mesures d'angles à la base presque identiques, soit 52°. Nous pouvons dès lors nous interroger sur le niveau de connaissances que possédaient les Égyptiens leur permettant de reproduire de tels angles dans leurs constructions.

Ces connaissances reposaient essentiellement sur le théorème de Thalès et les triangles semblables. C'est grâce au papyrus Rhind, datant de 1650 ans avant notre ère, que l'on a pu mieux comprendre les démarches entreprises par les Égyptiens. En effet, on a retrouvé quatre problèmes portant sur les pyramides et, dans chacun d'eux, le principal concept utilisé était celui du ***sekt***. Les unités de mesure des Égyptiens étaient la coudée, la paume et le doigt. Une coudée valait sept paumes et une paume valait quatre doigts. Le sekt d'une inclinaison était défini comme la longueur horizontale qui correspondait à une élévation verticale d'une coudée d'un plan incliné.

Figure 1
Le sekt d'une inclinaison

La mesure de la longueur du sekt déterminera donc l'inclinaison du plan [ou de la droite que nous appelons *hypoténuse*]. Nous pourrions aussi établir un certain parallèle avec l'idée de rapport à l'unité [unité étant ici la coudée] et le rapport que nous appelons aujourd'hui cotangente :

$$sekt = \frac{sekt}{1\_coudée} = \frac{mesure\_du\_côté\_adjacent\_à\_l'angle}{mesure\_du\_côté\_opposé\_à\_l'angle} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Cependant, comme nous le verrons plus loin, les Égyptiens ne l'interprétaient pas réellement ainsi. Ce principe de rapport à l'unité sera évidemment utilisé dans le cercle trigonométrique lorsque le rayon sera choisi égal à 1 .

Nous allons analyser un des problèmes inspirés du papyrus Rhind pour mieux comprendre le sekt, ce concept qui pourrait représenter les premières traces de la trigonométrie.[5]

« On veut construire une pyramide qui a une hauteur de 250 coudées et dont la distance au sol de l'un de ses sommets au pied de la hauteur de la pyramide est de 180 coudées. Quel est son sekt ? » (Ce problème ne correspond pas exactement à l'original [Problème 56 du paryrus Rhind], il a été modifié pour simplifier notre étude).

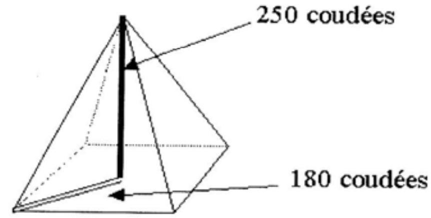


Figure 2
La pyramide du problème

On se retrouve donc avec le problème suivant :

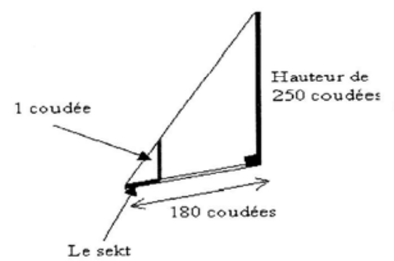


Figure 3
Le problème à résoudre est maintenant dans un triangle rectangle

Considérons un bâton de longueur une coudée et plaçons-le verticalement à l'intérieur de la pyramide. Le sekt est alors la distance du pied du bâton au sommet de l'angle à la base de la pyramide. Si nous arrivons à calculer le sekt, alors nous pourrons construire la pyramide voulue. En utilisant le théorème de Thalès, nous obtenons directement le sekt

$$[\text{Sekt} = \frac{180}{250} \text{ coudées}].$$

Les Égyptiens décidaient alors d'un point qui allait être la base de la pyramide et, à partir de celui-ci, ils comptaient 180/250 coudées (ce qu'ils savaient mesurer, en passant par des fractions unitaires). Ils mettaient à cette distance leur bâton qui avait une longueur d'une coudée et ils pouvaient ainsi construire l'hypoténuse du triangle rectangle obtenu et, de là, l'une des arêtes de la pyramide. Il suffisait par la suite de garder l'inclinaison établie pour construire la pyramide. Une autre question possible pourrait être de calculer le sekt des faces triangulaires inclinées.

Le sekt nous apparaît comme la cotangente de l'angle à la base de la pyramide, mais les Égyptiens ne l'interprétaient pas de cette façon. En effet, le concept d'angle n'était pas connu des Égyptiens, il n'est apparu qu'avec les Grecs. Ainsi, les Égyptiens ne mesuraient pas les angles comme nous le faisons [en degrés], c'était le sekt qui servait à connaître l'inclinaison. Pour des raisons pratiques, ils mettaient l'accent sur la mesure du côté du triangle au sol pour connaître l'inclinaison à respecter dans la construction. Leur mesure d'une inclinaison était donc l'*inverse* de notre concept de *pente*.

De ce fait, les Égyptiens n'ont jamais vraiment rencontré de difficultés conceptuelles reliées aux angles — les angles ne faisant pas partie de leurs études et travaux. Cette façon de traiter l'inclinaison représente donc une façon différente de voir et de travailler avec les angles, qui est selon nous tout aussi efficace, mais qui ne concorde pas avec notre vision actuelle de ce qu'est un angle. Ceci pourrait-il nous sensibiliser aux difficultés qu'éprouvent les élèves par rapport à la notion d'angles lorsqu'ils ne les perçoivent pas (ou ne les comprennent pas) de la même façon que les mathématiques scolaires le voudraient ? Nous croyons qu'il y a là des pistes pouvant éclairer certaines difficultés conceptuelles des élèves reliées à la notion d'angle.

3.2 Les Grecs : Hipparque (190-120 avant notre ère) et Ptolémée (An 150, 1500 ans après les Égyptiens)

L'astronome grec Hipparque fut sans contredit le premier à construire une table s'apparentant à une table de sinus et à se servir de certaines identités trigonométriques. Elle n'était pas exactement une table de sinus comme nous la connaissons, mais plutôt une table de cordes.

Le sinus prend sa source dans le cercle et par l'intermédiaire de la notion de corde. Le calcul des cordes est apparu dans des problèmes d'astronomie et dans l'étude de modèles géométriques de l'univers : les cordes étaient donc des outils de calculs cosmologiques. Ainsi, nous verrons que l'astronomie est à l'origine de nombreuses notions trigonométriques.

Pour arriver à calculer la distance angulaire entre deux étoiles placées sur la sphère des étoiles, les astronomes du temps ont eu recours au concept de corde :

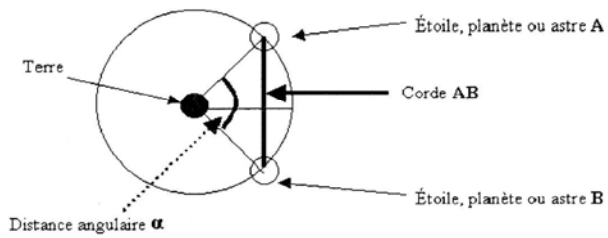


Figure 4
Le concept de corde

Ainsi, dans la table de cordes, à chaque arc de cercle correspondait la longueur de la corde qu'il déterminait ; les angles étaient mesurés en degrés, alors que les longueurs de corde étaient mesurées de la même façon que le rayon[6]. Environ 300 ans après les travaux d'Hipparque, un autre astronome grec, Ptolémée, s'est penché sur la question des cordes et a lui aussi construit une table. Nous présenterons la construction de la table de cordes de Ptolémée en nous basant sur la thèse de El Idrissi (1998). Il est important de noter qu'Hipparque avait fait des travaux connexes auparavant, mais ces derniers étaient moins précis que ceux de Ptolémée. Toutefois, nous soulignerons à l'occasion les apports significatifs d'Hipparque.

Étant donné un cercle, Ptolémée se propose de construire une table qui fournit les longueurs respectives des cordes correspondant à des arcs donnés. Il subdivise la circonférence en 360° et le rayon en 60 parties (les cordes sont calculées en fonction des parties du rayon), il est aussi à noter que ces calculs sont effectués avec des nombres écrits en base sexagésimale. Voici donc les trois étapes suivies par Ptolémée :

Étape 1 : Calcul de cordes remarquables à partir des polygones réguliers

La première corde calculée est celle d'un arc de 60°. Elle est assez simple puisqu'elle correspond à la longueur du côté d'un hexagone inscrit dans un cercle (ou d'un triangle équilatéral de côté égal au rayon). On obtient que : corde 60° = rayon (R).

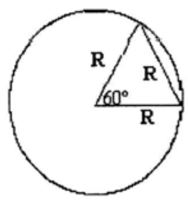


Figure 5
La corde de l'arc de 60°

Ensuite, Ptolémée trouve la corde de 36° par l'utilisation de deux propositions des *Éléments* d'Euclide (la proposition VI du livre II et la proposition IX du livre XIII). Et, par une autre référence aux *Éléments* d'Euclide (proposition X du livre X), il utilise une relation existant entre les côtés respectifs d'un hexagone, d'un pentagone et d'un décagone inscrits dans un même cercle et qui affirme que :

(mesure du côté de l'hexagone)^2 + (mesure du côté du décagone)^2 = (mesure du côté du pentagone)^2.

Il arrive ainsi à trouver la mesure de la corde d'un arc de 72°.

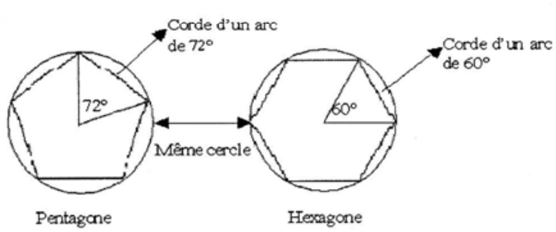


Figure 6
Le pentagone et l'hexagone inscrits dans le cercle

Puis, Ptolémée inscrit un carré et un triangle équilatéral dans le même cercle et il trouve directement la corde d'un arc de 90° et celle d'un arc de 120°.

Étape 2 : Connaissant la corde de l'arc AB, on peut calculer la corde de (180° – AB) et celle de (AB/2) (Hipparque connaissait déjà ces deux formules). Puis, les cordes des arcs AB et CD étant connues, on peut calculer la corde de (AB – CD).

Pour trouver la corde de (180° – AB), où AB est la corde d'un arc connu, on utilise la relation de Pythagore et on obtient ainsi la corde du supplémentaire d'un arc :

$$\text{Corde } (180° - \text{AB}) = \sqrt{4R^2 - (cordeAB)^2}.$$

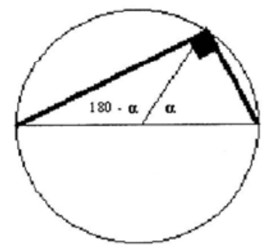


Figure 7 :
La corde de l'angle supplémentaire

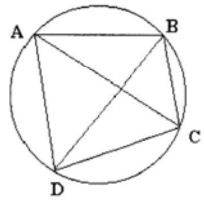
Par cette relation, nous pouvons déterminer les cordes d'autres arcs comme ceux de 150° (avec 30°), 144° (avec 36°) et 108° (avec 72°).

Connaissant la corde de l'arc AB, Ptolémée trouve la corde de l'arc (AB/2) en utilisant une méthode élaborée auparavant par Hipparque qui est basée sur la similitude des triangles présents dans le cercle (Katz, 1998)[7] ; il a ainsi pu déduire la moitié de la corde de chacun des arcs déjà connus :

$$\text{Corde AB/2} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - (cordeAB)^2}}.$$

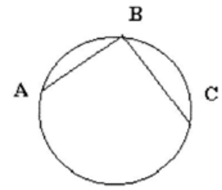
Pour compléter sa table, Ptolémée a aussi calculé la corde de l'arc (AB + BC) et la corde de l'arc (AB – BC), où les cordes des arcs AB et BC sont connues. Pour y arriver, Ptolémée a utilisé un résultat intermédiaire connu sous le nom de théorème de Ptolémée :

Si ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle alors le produit des mesures des diagonales est égal à la somme des produits des mesures des côtés opposés.



$AC \,.\, BD = AD.BC + AB.\, CD$

Figure 8
Le théorème de Ptolémée



$$\frac{cordeBC}{cordeAB} < \frac{arcBC}{arcAB}.$$

Figure 9
Le rapport des cordes est inférieur au rapport des arcs

Par ce théorème, nous pouvons déduire qu'en plaçant D tel que BD soit un diamètre du cercle (pour l'addition) [et tel que AD soit le diamètre pour la soustraction] :

$$\text{corde } (AB + BC) = \frac{cordeAB \bullet corde(180^\circ - BC) + cordeBC \bullet corde(180^\circ - AB)}{2R}$$

$$\text{corde } (AC - AB) = \frac{cordeAB \bullet corde(180^\circ - BC) + cordeBC \bullet corde(180^\circ - AB)}{2R}.$$

C'est en utilisant cette dernière formule que Ptolémée calcule la corde de l'arc de 12°, en utilisant la corde de l'arc de 72° et celle de 60°. Par la suite, en utilisant la formule permettant de calculer la corde de la moitié d'un arc, il trouva, par la corde de 12°, celle de 6°, 3°, (3/2)° et finalement (3/4)°.

Étape 3 : Calcul de l'approximation de la valeur de la corde de 1° pour en déduire celle de la corde de (1/2)° degré.

En utilisant toutes les formules précédentes, Ptolémée veut établir la table des cordes de 0,5 ° à 180°, de demi degré en demi degré. Pour cela, il doit tout d'abord calculer la corde de 1°. Or, jusqu'ici, il ne possède que les valeurs des cordes de (3/2)° et de (3/4)°. Ptolémée approche alors la corde de 1° par la valeur des cordes de (3/2)° et (3/4)° en se servant de la formule suivante qui dit que si la corde AB est plus petite que la corde BC, alors le rapport des cordes est inférieur au rapport des arcs :

Ptolémée peut ainsi calculer la corde de 1° par approximation en comparant les deux inégalités suivantes de façon à trouver une valeur plus grande que la corde de l'arc de et une valeur plus petite que celle de :

$$\frac{corde\,(3/2)^\circ}{corde\,1^\circ} < \frac{arc\,(3/2)^\circ}{arc\,1^\circ}$$

et

$$\frac{corde\,1^\circ}{corde\,(3/4)^\circ} < \frac{arc\,1^\circ}{arc\,(3/4)^\circ}.$$

On obtient 0,0174527941… pour la corde de l'arc de (3/2)° et 0,0174531679… pour la corde de l'arc de (3/4)°. Ainsi, il est possible de borner la valeur de la corde et ainsi arriver à l'approximer, car :

corde de (3/2)° < corde de 1° < corde de (3/4)° ;
0,0174527941… < corde de 1° < 0,0174531679… ;

donc,

corde de 1° = 0,01745 [Ordre de précision que recherche Ptolémée].

Finalement, il peut trouver la corde de (1/2)° en utilisant la corde de 1° et la formule qui permet de calculer la corde de la moitié d'un arc.

Nous pouvons remarquer que les Grecs étaient très rigoureux dans leurs calculs. Pour construire sa table, Ptolémée a utilisé de nombreuses formules et il a pris soin de les démontrer. Nous pouvons nous demander pourquoi la table de cordes de Ptolémée, qui part à à 0,5°, s'arrête-t-elle à 180° ? Ceci s'explique facilement par le fait que les Grecs ne s'intéressaient qu'à l'ouverture ou la distance angulaire entre les étoiles. Cette distance n'était jamais supérieure à un arc de 180° (puisqu'on cherche implicitement la plus petite distance possible)[8].

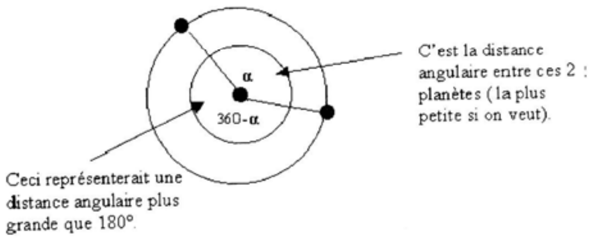


Figure 10
La distance angulaire entre les planètes

Nous pouvons aussi déceler chez Hipparque un ancêtre du radian. Le radian, comme nous le connaissons aujourd'hui, est la mesure de l'angle déterminé par un arc de même longueur que le rayon. Pour sa part, Hipparque utilisait une unité pour mesurer la circonférence de (360°) et il utilisait cette même unité (1/360 de la circonférence) pour mesurer le rayon (rayon = 57,2957...). Les Indiens ont aussi travaillé de cette façon en suivant quelque peu les travaux d'Hipparque.

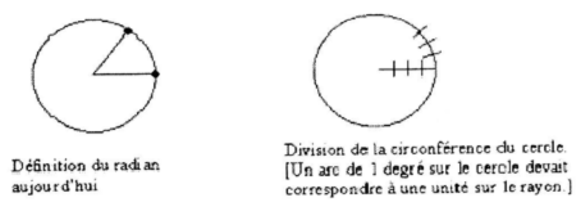


Figure 11
L'ancêtre du radian

Finalement, on doit remarquer avec Itard (1977) que Menelaus, vers la fin du premier siècle de notre ère, attire l'attention des mathématiciens sur la « demi-corde de l'arc double » qui a inspiré les mathématiciens indiens ; l'intérêt pour les demi-cordes (sinus) est dû au fait que dans plusieurs des problèmes d'astronomie rencontrés, il faut calculer les demi-cordes plutôt que les cordes (voir, entres autres, Charbonneau, 2001b, p. 3-4).

3.3 Les Indiens (du 4^e au 6^e siècle)

Tout comme chez les Grecs, la trigonométrie chez les Indiens était rattachée à l'astronomie. Les Indiens auraient, eux aussi, étudié la trigonométrie dans le cercle en se basant sur la table de cordes construite par Hipparque[9]. En se servant de cette dernière, ils auraient établi leur table des sinus. C'est au cinquième siècle que l'on trouve pour la première fois le concept de sinus. On se rappellera que le terme pour désigner le *sinus* était *ardhajya* signifiant « demi-corde ». On passe de la corde au sinus par la définition suivante :

Dans un cercle dont le rayon est pris comme unité de mesure[10], le sinus d'un arc est, par définition, égal à la moitié de la mesure de la corde du double de cet arc

$$\sin(arc\,AB) = \frac{1}{2}\,m \text{ corde (arc } 2{*}AB).$$

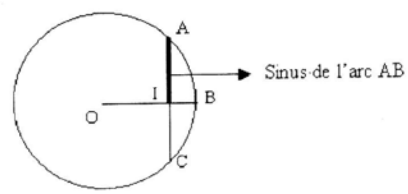


Figure 12
Le lien entre la corde, la demi-corde et le sinus

Les Indiens ont alors transformé la table de cordes d'Hipparque en une table de sinus par la formule précédente. Ils ont ensuite remarqué qu'il existait une correspondance entre ces sinus et ont ainsi établi une formule récursive permettant de simplifier les calculs d'Hipparque et de Ptolémée.

Ils ont ainsi construit une table de 24 valeurs d'angle (en minutes) avec leurs sinus, lesquels peuvent être notés $S_1, S_2, \ldots\ldots, S_{24}$. Le premier sinus et le deuxième sinus étaient définis ainsi : « La huitième partie des minutes d'un signe est appelé 'premier sinus'. Celui-ci augmenté par le reste obtenu après lui avoir retranché le quotient provenant de sa division par lui-même, cela donne le deuxième sinus » (El Idrissi, 1998, p. 90).

Le signe dont il est question est le signe du zodiaque, il correspond à 30° ou 1800 minutes puisqu'il y a 12 signes sur un cercle de 360°. Le premier sinus est donc la huitième partie d'un signe :

$$S_1 = \frac{1}{8} \cdot 1800 = 225 \text{ minutes.}$$

Et, le deuxième sinus est calculé à partir du premier :

1) On divise S_1 par S_1 ;

2) On retranche ce rapport de S_1 : $S_1 - \frac{S_1}{S_1}$;

3) Le résultat obtenu ajouté à S_1 donne

$$S_2 : S_2 = 225 + (225 - 1) - 449 \text{ minutes.}$$

Les Indiens utilisèrent ensuite la formule récurrente pour trouver les autres sinus : « Diviser les sinus déjà calculés par le premier, et au sinus précédent, ajouter dans chaque cas le reste après avoir soustrait ces quotients du premier » (El Idrissi, 1998, p. 91). Ce qui donne la formule suivante :

$$S_n - S_{n-1} + \left[S_1 - \left[\frac{S_1}{S_1} + \frac{S_2}{S_1} + \frac{S_3}{S_1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{S_{n-1}}{S_1} \right] \right].$$

On peut remarquer, ici, que les Indiens avaient des intentions et une vision purement numériques et calculatoires assez différentes de celles, géométriques, des Grecs.

De plus, ce qui est intéressant chez les Indiens est leur utilisation de la tangente. Ils n'avaient pas de conception précise de cette notion, mais ils l'utilisaient pour calculer les ombres ou la hauteur du Soleil. Ils se servaient d'un bâton, le *gnomon*, disposé verticalement, avec lequel on étudiait l'ombre pour déterminer entres autres l'heure.

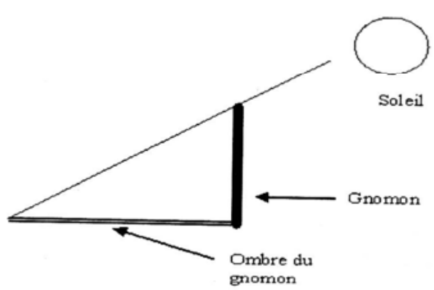


Figure 13
Le travail avec les ombres

Les Indiens calculaient uniquement l'ombre du gnomon et ils ne l'ont pas associé à la notion de tangente puisqu'ils n'ont pas calculé les rapports entre le gnomon et son ombre dans le triangle rectangle obtenu. Le gnomon avait une utilité très pratique. Ce sont les Arabes qui ont développé cette notion et qui l'ont associée au cercle.

3.4 Les Arabes (du 9^e^ au 13^e^ siècle)

Les Arabes se sont aussi intéressés à l'astronomie, comme les Grecs et les Indiens l'avaient fait avant eux. Cependant, ils ont commencé à isoler la trigonométrie en tant que branche des mathématiques. Ils ont étudié les tables de leurs prédécesseurs et, à partir de ces acquis, ils ont trouvé d'autres formules trigonométriques que l'on connaît aujourd'hui. Al-Biruni (973-1050) a construit les tables des sinus et des tangentes et il a remarqué qu'il est préférable de choisir un rayon unitaire pour simplifier les calculs provenant de la multiplication et de la division du rayon. Ce sont donc les Arabes qui ont introduit le rayon unitaire en trigonométrie. Cependant, leurs intentions n'étaient pas les mêmes que les nôtres, c'est-à-dire réduire l'expression en fraction décimale, puisque ces dernières n'étaient pas alors utilisées.

Al-Tusi (1201-1274) rapprochera les trigonométries du cercle et du triangle en proposant d'étudier les côtés et les angles d'un triangle inscrit dans un cercle. Puisque tout triangle est inscriptible dans un cercle, chaque côté représentera la corde de l'arc interceptant l'angle opposé à ce côté. Les mesures des angles seront proportionnelles à celles des arcs qu'ils intercepteront et on pourra mesurer ces angles avec ces arcs de cercle.

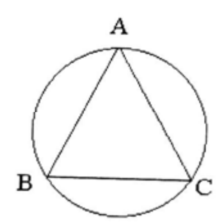


Figure 14
Triangle inscrit dans un cercle

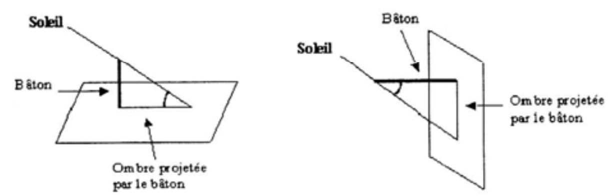


Figure 15
La notion d'ombre reprise par al-Biruni

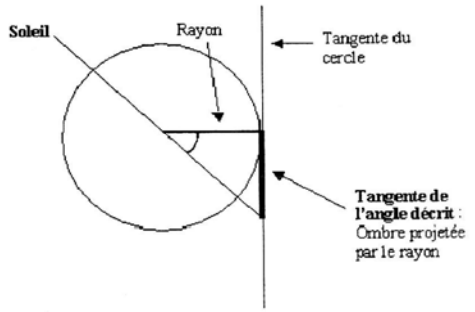


Figure 16
La tangente d'al-Tusi

Al-Tusi utilisa les propriétés du cercle et du triangle et de plus combina les concepts de sinus et de cosinus. Il trouva ainsi la majorité des formules trigonométriques que l'on connaît aujourd'hui. Par exemple :

Ombre projetée par le rayon = *Rayon* du cercle * tan A ;

$$\frac{Ombre}{Rayon} = \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}.$$

Les mathématiciens arabes ont grandement contribué au développement de la trigonométrie avec la mise en place des formules (algébrisation). Ils ont aussi rapproché la trigonométrie du triangle et celle du cercle en mettant en relation le calcul des tangentes spécifique au triangle rectangle et le calcul des sinus réservé au cercle. Ainsi, ils ont rapproché la trigonométrie utilisée en astronomie de celle applicable dans les triangles rectangles, souvent appelée aujourd'hui la « trigonométrie terrestre ».

De nombreux autres développements ont eu lieu par la suite en trigonométrie. Comme ils n'interviendront pas dans notre analyse didactique de l'enseignement de la trigonométrie du triangle au secondaire, nous ne nous y attarderons pas.

4. Discussion et réflexions

Après cette analyse historique, des questions surgissent quant à l'enseignement et l'apprentissage de la trigonométrie à l'école secondaire. Voici donc certaines réflexions et remarques qui sont ressorties de notre questionnement[11].

A. Trigonométrie du triangle

Quelques aspects historiques

Nous avons vu qu'avant les Arabes (12e siècle), la trigonométrie du triangle telle que nous la connaissons — avec nos angles et nos rapports — n'a jamais été utilisée : Katz (1988) affirme que cela ne s'est pas fait avant les années 1600. La notion de mesure d'angle (en degrés) n'a jamais été utilisée pour établir les rapports dans les triangles rectangles, c'est-à-dire nos rapports trigonométriques, puisque les Égyptiens mesuraient en coudées et les Indiens utilisaient l'ombre d'un bâton appelé le gnomon. Ce que nous appelons habituellement un rapport trigonométrique est une relation que nous établissons entre une mesure d'angle et un rapport entre deux côtés d'un triangle rectangle. Avant la Renaissance, les praticiens ont été capables, sans les mesures d'angles, de résoudre les problèmes auxquels ils ont fait face en utilisant des outils comme les triangles semblables et le théorème de Thalès ainsi que le théorème de Pythagore[12] pour établir des distances et des longueurs.

Quelques réflexions didactiques

Ce que nous faisons en 4e secondaire est en quelque sorte contraire au déroulement historique. Dès le départ, nous faisons un lien entre les angles (en degrés) et les rapports présents entre les mesures des côtés d'un triangle rectangle (voir le programme d'études de mathématiques 436 du MEQ). En agissant de la sorte, c'est-à-dire en partant avec l'angle pour établir les rapports trigonométriques et en étendant vers les autres triangles rectangles en parlant d'unicité des rapports trigonométriques, nous supposons implicitement que les notions de similitudes des triangles sont intégrées et acquises.

Une des difficultés des élèves, que nous avons personnellement vécue dans notre enseignement, mais aussi dans notre apprentissage personnel de la trigonométrie, se situe au niveau de la relation existant entre l'angle du triangle rectangle et le rapport des mesures des côtés. Historiquement, ce genre de problème ne s'est jamais présenté puisque nos rapports trigonométriques n'étaient pas utilisés : les mesures d'angles (en degrés) ne servaient pas à établir les rapports entre les mesures des côtés des triangles rectangles.

Nous nous demandons alors s'il est primordial de faire le lien *dès le départ* entre les mesures d'angles (en degrés) et les rapports entre les mesures de côtés des triangles rectangles pour établir les rapports trigonométriques. Nous croyons au contraire qu'un travail systématique sur la conservation du rapport entre les mesures de côtés d'un triangle rectangle par rapport à une famille de triangles rectangles semblables [reconnus semblables par les cas de similitude des triangles] doit être fait en premier lieu[13]. Après avoir fait ce travail centré sur les rapports identiques dans les familles de triangles rectangles semblables, dans lequel la notion de mesure d'angle n'est pas importante, on peut établir le lien entre ces rapports uniques et la notion de mesure d'angle, car cette dernière découlera de façon naturelle puisque dans une famille de triangles semblables les angles homologues sont congrus.

Cette approche n'exclut pas la notion de mesure d'angle dans le travail trigonométrique du triangle rectangle, mais le point de mire est simplement déplacé sur l'importance fondamentale de la conservation et de l'unicité des rapports entre les mesures de côtés d'un triangle rectangle pour une famille de triangles semblables à ce dernier.

B. Cas limites (90° et 0°) : le passage du triangle au cercle

Quelques aspects historiques

Une grande difficulté vécue comme enseignant lors de l'étude de la trigonométrie est le travail avec les cas limites, c'est-à-dire avec l'extension des rapports trigonométriques aux angles de 90° et de 0°. Ce qui est très révélateur est le fait que ces difficultés ne se sont jamais produites dans l'évolution de la trigonométrie ; l'angle de 90° ou de 0° est apparu uniquement dans la trigonométrie du cercle, en astronomie. Les Égyptiens n'ont pas ressenti le besoin ou la nécessité d'utiliser un angle de 90° dans leurs « trigonométries ». Dans l'histoire, on n'a jamais traité ces cas limites dans la trigonométrie du triangle.

Quelques réflexions didactiques

Sachant cela et d'après ce que nous avons observé, il semblerait que ce soit l'enseignement qui aurait amené l'étude de ces cas limites dans la trigonométrie du triangle (avec les triangles dégénérés ou aplatis et avec l'idée de passage à la limite). Alors, est-il si pertinent, ou nécessaire, de traiter ces cas limites *dans* le triangle alors que dans l'histoire cela n'a jamais été fait ? Pourrions-nous trouver, dans l'analyse historique, un moyen plus efficace pour faire manier et comprendre ces concepts ? De plus, puisque l'idée de limite et de triangle dégénéré sont des concepts qui semblent très difficiles à comprendre, ne pourrions-nous pas utiliser le cercle pour introduire et faire le travail de ces cas limites ? Ainsi que celui des angles entre 90° et 180° ?

Le maniement des angles de 90° et 0° se fait beaucoup plus naturellement dans le cercle. Nous parlons ici d'un cercle que nous nommerons « statique », c'est-à-dire un cercle sans mesures dans lequel un triangle sera placé de la même façon que dans le cercle trigonométrique. Le rayon, par sa variation d'orientation à l'intérieur du cercle, permettra d'observer les différents rapports voulus (et dans ce cas précis, les cas limites).

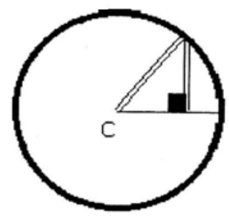


Figure 17
Le cercle « statique »

Ainsi, comme c'est l'usage depuis longtemps dans les livres d'enseignement en France, il vaudrait mieux définir dès le départ les rapports trigonométriques dans le cercle, c'est-à-dire comme étant des rapports entre les mesures de segments verticaux, horizontaux et du rayon. Un triangle rectangle sera évidemment visible à l'occasion, mais il disparaîtra lors du travail des cas limites. Cependant, malgré l'absence de triangle, les rapports seront définis en fonction du rayon du cercle et de segments verticaux et horizontaux, et seront donc toujours présents. Cela évite la notion de limite ou de triangle dégénéré puisque le triangle ne sera pas l'objet d'étude, ici. Voici ce qu'on peut facilement faire observer tout de suite :

- Pour le sinus de 90°, on se rend compte que le côté opposé à l'angle se superpose à l'hypoténuse. Ils possèdent alors la même mesure et ceci donne un rapport valant 1.

- Pour le cosinus de 90°, on se rend compte que le côté adjacent à l'angle devient un point, et donc que sa mesure est de zéro. Ceci, pour le rapport cosinus, donne un rapport de $\dfrac{0}{hypoténuse}$. Le calcul de ce rapport vaut zéro.

- Pour la tangente de 90°, on se rend compte que le côté adjacent à l'angle, comme pour cosinus 90°, devient un point, et donc que sa mesure est de 0. Alors, on obtient le rapport suivant : $\dfrac{opposé}{0}$. La division par zéro étant indéterminée, on dira que le rapport est indéterminé, car on ne peut le calculer.

- Pour le sinus de 0°, on se rend compte que le côté opposé à l'angle devient aussi un point, et donc que sa mesure est de zéro. Ceci, pour le rapport sinus, donne un rapport de $\dfrac{0}{hypoténuse}$. Le calcul de ce rapport vaut zéro.

- Pour le cosinus de 0°, on se rend compte que le côté adjacent à l'angle se superpose à l'hypoténuse. Ils possèdent alors la même mesure. Ce qui donne un rapport valant 1.

- Pour la tangente de 0°, on se rend compte que le côté opposé à l'angle devient un point, et donc que sa mesure est de zéro. Alors, on obtient le rapport suivant : $\dfrac{0}{adjacent}$. Le calcul de ce rapport vaut zéro.

L'idée est donc de définir ces rapports dans le cercle en premier lieu et, par la suite, de faire le pont entre le cercle et le triangle. Nous reviendrons sur ce point en D.

C. L'étude du rapport tangente

Quelques aspects historiques

Nous avons vu que, dans la portion de l'histoire de la trigonométrie du triangle que nous avons présentée, il n'a jamais été question du rapport sinus ou cosinus : on utilisait plutôt le rapport tangente. La mesure de l'hypoténuse n'était pas utilisée et ne représentait pas une mesure pertinente pour les problèmes quotidiens rencontrés dans le triangle rectangle. De nos jours, les arpenteurs utilisent encore essentiellement le rapport tangente.

Quelques réflexions didactiques

Il semblerait donc plus naturel, d'après ce que l'on vient de voir, de commencer l'enseignement de la trigonométrie du triangle par le rapport tangente. Malheureusement, ce dernier est souvent mis à l'écart dans l'enseignement et est aussi le dernier rapport étudié dans la trigonométrie du triangle. Pourtant, il semble plus pertinent d'introduire le rapport tangente, puisque les problèmes de triangles rencontrés dans la vie quotidienne (anciennement ou aujourd'hui) font appel davantage à celui-ci qu'aux rapports sinus ou cosinus.

Une chose qui nous tracasse un peu est l'approche de certains manuels pour l'enseignement de la trigonométrie du triangle en 4e secondaire. Les élèves étudient d'abord le rapport sinus et le rapport cosinus, puis l'enseignant établit ou définit le rapport tangente comme étant la simplification du rapport sinus sur le rapport cosinus :

$$\text{Tangente} = \frac{\sin}{\cos} = \frac{\dfrac{opposé}{hypoténuse}}{\dfrac{adjacent}{hypoténuse}} = \frac{opposé}{\cancel{hypoténuse}} \cdot \frac{\cancel{hypoténuse}}{adjacent} = \frac{opposé}{adjacent}.$$

Nous pouvons même nous demander si cette « simplification » des rapports n'entraîne pas une « complication » de la notion proprement dite ! Le rapport tangente n'est donc pas établi comme un rapport des mesures de côtés du triangle, mais plutôt comme un rapport de rapports, ce qui n'a pas vraiment de sens. De plus, il est établi en se servant de la mesure de l'hypoténuse, ce qui n'est pas adéquat, car le rapport tangente est complètement indépendant de l'hypoténuse dans la trigonométrie du triangle. On perd alors toute l'idée de rapport pour la tangente et tout ce qui le caractérise en tant que rapport important et primordial dans la trigonométrie du triangle.

D. Trois trigonométries existantes

Nous allons éclaircir 3 formes de trigonométrie qui sont naturellement très liées.

- En premier, nous avons la trigonométrie du triangle rectangle, qui consiste à établir une relation entre les mesures d'angles et celles des côtés du triangle rectangle.

- Ensuite, nous avons celle de notre cercle statique mentionnée en B. Cette trigonométrie utilise des angles de 0° à 180° et provient des Grecs et de leurs travaux sur les distances angulaires entre les planètes (voir fig.10 et fig.17). Nous croyons utile cette trigonométrie du cercle statique pour faciliter le passage aux cas limites (90° et 0°) et déborder jusqu'à 180° (introduisant ainsi les valeurs négatives). Dans cette trigonométrie, la valeur du rayon n'est pas importante, on n'utilise que les mesures d'angles pour établir les rapports.

- Finalement, la troisième trigonométrie est celle du cercle trigonométrique qui utilise les angles de 0° à 360°, et même plus.

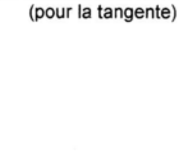
Historiquement, la trigonométrie du triangle et celle du cercle statique ont été développées indépendamment l'une de l'autre. Les Indiens avaient même travaillé avec la trigonométrie du triangle sans vraiment la définir et avaient ensuite travaillé dans le cercle statique sans faire de lien entre les deux. Puis, plus tard, certains Arabes les ont, en quelque sorte, jumelées pour former le cercle trigonométrique complet (0° à 360°), et ils ont aussi utilisé un rayon égal à 1. Ici, ce n'était pas les rapports qu'ils regardaient, mais les longueurs de segments ; de là découlent les fonctions trigonométriques.

Selon nous, la trigonométrie du cercle statique permettrait de faire le passage entre les deux trigonométries : celle du triangle et celle du cercle trigonométrique et de l'approche fonctionnelle. En effet, dans l'enseignement, ces deux trigonométries apparaissent comme étant indépendantes l'une de l'autre. Ce cheminement historique nous permet donc de voir qu'elles sont reliées. Il semblerait donc important de faire paraître ce lien en facilitant le passage de l'une à l'autre dans notre enseignement.

E. Construction des tables trigonométriques

Ce point n'est pas relié directement à l'histoire, mais il fait intervenir un cercle de rayon 1 utilisé par certains Arabes. L'objectif est de faire construire les tables trigonométriques par les élèves dans une phase d'introduction aux rapports trigonométriques en fonction de l'angle — idéalement après le travail préliminaire mentionné en A concernant l'établissement des rapports dans la trigonométrie du triangle.

Au départ, on fixe un segment horizontal [côté de triangle] égal à 1[14] pour faciliter l'établissement du rapport (facilité de calcul, contrôle sur la variation), et on fera ensuite varier l'angle pour faire l'étude du rapport. À chaque changement de mesure d'angle, on note dans une table la valeur de la longueur correspondante obtenue par mesurage direct. On obtiendra ces schémas pour le rapport tangente et les rapports sinus et cosinus :



Côté =1

Figure 18
La variation avec la mesure du côté adjacent égale à 1 (pour la tangente)

Figure 19
La variation avec la mesure de l'hypoténuse égale à 1 (pour le sinus et le cosinus)

Il est à noter aussi que cette dernière variation permet de générer un cercle de rayon égal à 1, le rayon étant représenté par l'hypoténuse. Cela pourra aussi donner un sens et une pertinence au cercle trigonométrique (et même au cercle statique).

Par les mesures directes sur les segments il y a évidemment des problèmes de précisions, on fera construire par les élèves la table de 0° à 90° pour les cas limites, on se réfèrera au cercle statique comme nous l'avons vu. Ici, le travail visuel est primordial, il faut que l'enseignant explique la démarche tout en se servant de dessins comme ceux montrés auparavant.

Avec ces schémas et par l'établissement de ces rapports, on travaillera fortement la visualisation de ces mêmes rapports :

- À un rapport unique est associé un angle unique et vice versa.

- Quand on voit l'angle, on voit le rapport correspondant ; et inversement, quand on voit le rapport, on voit l'angle correspondant.

Le but est de demander quel est le rapport cosinus, sinus ou tangente d'un angle quelconque de sorte que les élèves puissent visualiser le triangle et l'angle qui établissent ce rapport. Ceci sert à donner un sens aux rapports trigonométriques, et à faire développer les habiletés d'estimation chez les élèves (ordre de grandeur, établissement de repères). C'est une démarche importante à réaliser dans l'enseignement qui peut aider les élèves à construire une meilleure représentation mentale de tout cela. De plus, en construisant la table, les élèves s'apercevront qu'il existe certaines égalités entre les valeurs trouvées (un certain début de découverte des identités trigonométriques) ; par exemple, la valeur inscrite au sinus de 30° est équivalente au cosinus de 60°.

La construction d'une telle table permet de :

- Voir que « pour un angle unique, il y a un rapport unique » et vice versa ;

- Voir le lien entre mesure d'angle et rapport trigonométrique ;

- Voir la progression des rapports trigonométriques en lien avec une progression constante des mesures d'angles et se rendre compte de la non-proportionnalité des rapports trigonométriques ;

- Visualiser les mesures d'angles et les rapports trigonométriques — et les établir ;

- Voir les égalités entre certains rapports et y construire certaines identités ;

- Pouvoir établir des ordres de grandeur et des valeurs repères visuelles.

Par exemple, une visualisation très intéressante est celle que l'on obtient avec le rapport tangente d'un angle de 45° :

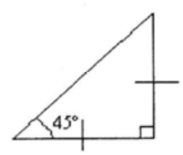


Figure 20
La visualisation du rapport tangente avec l'angle de 45°

On remarque ici que : $\tan 45° = 1$. On voit aisément que si l'angle augmente, alors le rapport tangente devient plus grand que 1 et si l'angle diminue alors le rapport tangente devient plus petit que 1.

5. Conclusion : une approche différente

Toutes ces réflexions nous amènent à proposer une façon différente de celle des manuels québécois actuels de présenter la trigonométrie en 4^e^ secondaire. Il s'agit d'une première esquisse. Des travaux ultérieurs relatifs à l'application et à la validation d'une telle approche devraient et pourraient être mis en route sous peu.

Par une approche orientée autour de l'astronomie, nous croyons que les premiers pas de l'apprentissage de la trigonométrie devraient reposer sur le cercle statique : les rapports devraient être préalablement définis dans ce cercle — voir le point B. Par la suite, tel que mentionné, ce travail dans le cercle fera vraisemblablement ressortir la présence visuelle de triangles rectangles. Ensuite, nous proposons le travail systématique discuté au point A en lien avec les familles de triangles rectangles semblables et la conservation des rapports des mesures de côtés, ce dernier travail débouchant sur la notion de mesure d'angle et d'unicité des rapports. Ce travail final avec les angles sera renforcé par le fait que les premiers pas « trigonométriques », dans le cercle, auront fait intervenir la notion d'angle.

Dans une vision à long terme, cette esquisse de séquence d'enseignement s'avérerait très riche, car, lorsque les élèves seront en 5^e^ secondaire, la notion de cercle en lien avec la trigonométrie aurait déjà été travaillée quelque peu et ne serait donc pas complètement nouvelle, ce qui ne peut évidemment pas nuire.

Pour nous, cette première esquisse représente une approche que nous croyons plus riche et plus naturelle, étant donné sa filiation avec l'histoire de la trigonométrie. Cette filiation n'est pas en soi un gage de succès, car plusieurs autres variables ont de l'influence dans l'apprentissage d'une notion mathématique. Cependant, pour les raisons développées plus haut, nous la considérons plus intéressante que les approches traditionnellement proposées, tant au niveau de l'apprentissage que de la motivation des élèves et de l'enseignant. ■

Notes

[1] Je voudrais remercier Mme Mireille Saboya avec qui les premiers pas de ce travail ont été réalisés ainsi que Mme Bernadette Janvier qui a su nous guider. De plus, je ne peux passer sous silence l'aide précieuse de M. Louis Charbonneau qui a su, par ses révisions et ses nombreux commentaires, m'appuyer et donner un sens à tout ce projet. Finalement, je suis reconnaissant auprès des arbitres anonymes pour leurs commentaires qui m'ont été très utiles et m'ont permis de raffiner ce travail.

[2] Le mot « contexte » doit être pris au sens large, c'est-à-dire en tant qu'environnement. On y considère autant les contextes de la vie quotidienne que ceux relevant des domaines mathématiques.

[3] Dans le but d'éviter toute confusion entre « Hindoux », relatif à la religion, et « Indoux », relatif à la région géographique, nous utiliserons le mot « Indien » pour désigner tout ce qui est relatif à l'Inde.

[4] Nous verrons, plus tard dans l'analyse historique, le lien entre les cordes et le sinus.

[5] Nous parlons ici d'une possibilité de premiers pas, car aucun travail systématique sur les rapports ne semble avoir été clairement fait par les Égyptiens.

[6] L'unité de mesure utilisée pour la longueur de corde n'a pas vraiment d'importance, ici. Cette dernière étant tout le temps exprimée en fonction de celle qui était utilisée pour mesurer le rayon.

[7] Les lecteurs intéressés à obtenir des précisions sur les longs calculs utilisés peuvent contacter directement l'auteur par courrier électronique.

[8] On peut remarquer aussi que dans un triangle quelconque, aucun angle ne peut être plus grand que 180°.

[9] En fait, historiquement, tout semble pointer vers cela.

[10] Les Indiens utilisaient plusieurs grandeurs pour les rayons. Nous verrons que ce sera les Arabes qui uti-

liseront cependant un rayon unitaire pour le cercle (mais pas de façon systématique).

[11] Ce questionnement a de plus été alimenté par nos expériences personnelles d'enseignant, notre formation universitaire d'enseignant [cours de didactique et de mathématiques ainsi que nos stages en milieu pratique] et notre apprentissage personnel sur le sujet.

[12] Nous nous sommes mêmes amusés à reconstruire, avec succès, les tables de cordes de Ptolémée en utilisant uniquement le théorème de Pythagore et les propriétés des triangles semblables.

[13] Les angles ici ne sont pas mis de côté dans les similitudes de triangles, car ils permettent d'affirmer la similitude. Cependant, ils sont mis de côté au niveau de l'établissement des rapports trigonométriques.

[14] Nous proposons même de faire démarrer le travail sans imposer le rayon égal à 1 et de laisser les élèves travailler avec différentes mesures. Par « épuisement », cela pourra faire ressortir l'efficacité d'utiliser un rayon de valeur unitaire (pour des fins de simplification des calculs).

Références bibliographiques

Charbonneau, L. (2001a). *Notes de cours pour le cours de maîtrise MAT7222T: Histoire des mathématiques*. Université du Québec à Montréal.

Charbonneau, L. (2001b). La trigonométrie : une histoire à l'envers tournée d'abord vers le ciel. À paraître dans les *Actes du congrès de l'AMQ d'octobre 2001*.

El Idrissi, A. (1998). *L'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants : étude exploratoire portant sur l'histoire de la trigonométrie*. Thèse de doctorat. Université du Québec à Montréal.

Garcia, R. et Piaget, J. (1989). *Psychogenesis and the History of Science*. New York (NY), Columbia University Press.

Gouvernement du Québec, Ministère de l'Éducation (1996). *Programme d'études de mathématiques 436, enseignement secondaire*.

Itard, Jean (1977). *Trigonométrie*. Paris, La Grande Encyclopédie Larousse.

Katz, V.J. (1988). Why not trigonometry ? In Berggren, T. (eds.) *Proceedings of the fourteenth annual meeting of the Canadian society for history and philosophy of mathematics*. Windsor (Ontario), p. 1-12.

Katz, V.J. (1998). *A History of Mathematics, An Introduction*. New York (NY), Addison-Wesley.

Marchand, P. et Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ*, XXXIX (4), p. 30-42.

NCTM (1969). *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, 31st Yearbook. Washington, D.C.

Rey, Alain (dir. publ.) (1998). *Le Robert : Dictionnaire historique de la langue française*, première édition, petit format. Paris, Dictionnaires Le Robert.

Sfard, A. et Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification — the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, p.191-228.

Jérôme Proulx
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
jproulxtemporaire@hotmail.com