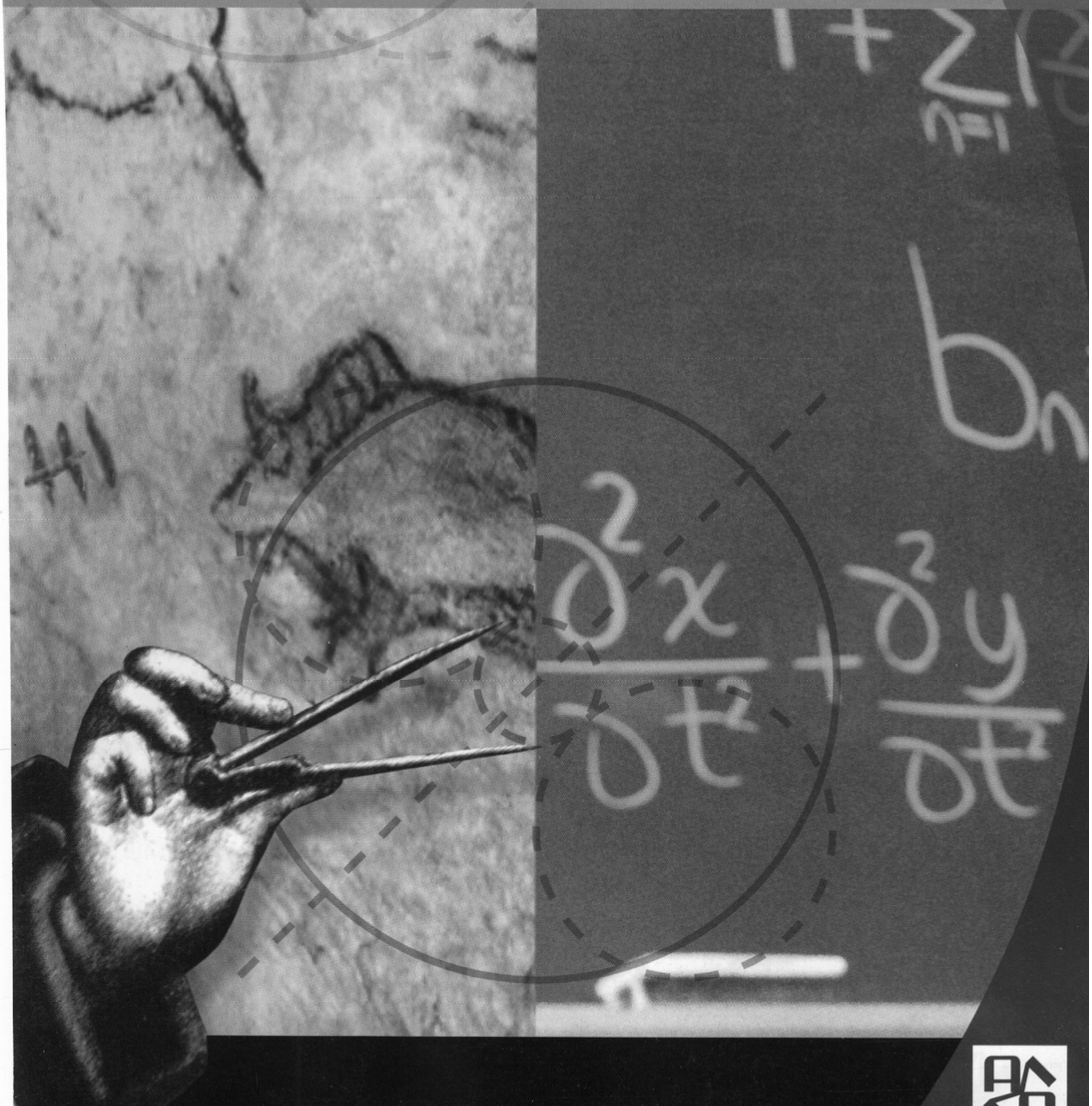
Bulletin AMQ

Association mathématique du Québec

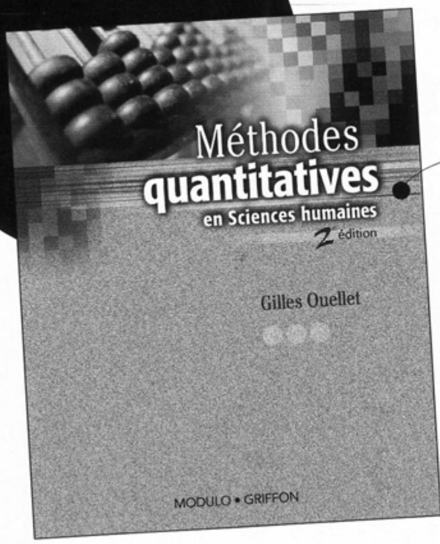
Mai 2004



Envoi Poste-publications : convention no 40050216 - 7400, St-Laurent, Montréal (Québec) H2R 2Y1

ADOPTEZ CES **OUVRAGES** QUI FAVORISENT UN **ENSEIGNEMENT DYNAMIQUE** ET UN **APPRENTISSAGE ACTIF**.

NOUVEAUTÉ !



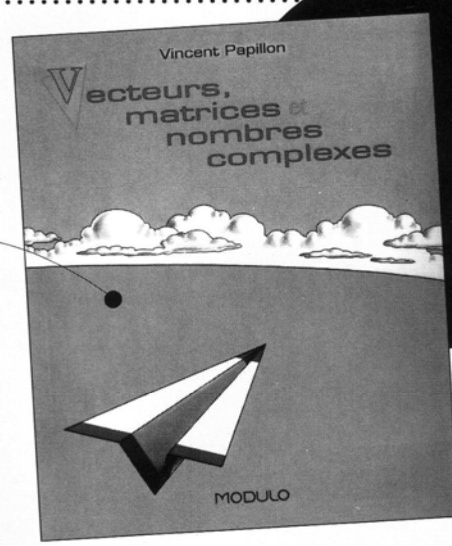
Méthodes quantitatives en Sciences humaines, 2e édition

Gilles Ouellet

Format : 21 cm x 27,5 cm
Reliure : Collée, couverture souple
Pages : 388 pages
ISBN : 2-89443-211-9

Cette deuxième édition de ***Méthodes quantitatives en Sciences humaines*** offre aux élèves une toute nouvelle approche des méthodes quantitatives employées dans les recherches et les enquêtes réalisées dans les diverses disciplines des Sciences humaines.

Cette nouvelle édition propose un texte écrit dans un langage clair et accessible. L'ouvrage présente une approche des divers concepts qui se fait à partir d'exemples concrets issus du quotidien et un cheminement bien adapté aux programmes d'études en Sciences humaines.



Vecteurs, matrices et nombres complexes

Vincent Papillon

Format : 19 cm x 23 cm
Reliure : Collée, couverture souple
Pages : 400 pages
ISBN : 2-89113-278-5

Vecteurs, matrices et nombres complexes s'adresse aux élèves qui suivent le cours *Algèbre linéaire et géométrie vectorielle*, particulièrement à ceux du programme des Sciences de la nature.

Chaque section de l'ouvrage comprend un choix d'exercices savamment dosé : dans certains, il suffit de calculer, dans d'autres, il faut illustrer, construire, analyser, montrer ou encore prouver.

Aussi disponible,
Vecteurs, matrices et nombres complexes.
Corrigé

Pour en savoir plus, visitez notre site Internet :

MODULO GRIFFON
Modulo – Griffon
233, avenue Dunbar, bureau 300, Mont-Royal (Québec) H3P 2H4, CANADA.
Téléphone : (514) 738-9818 / 1 888 738-9818; télécopieur : (514) 738-5838 / 1 888 273-5247.
Site Internet : www.modulogriffon.com

P330304

Table des matières

Bulletin AMQ Vol. XLIV, n° 2, mai 2004

Éditorial

Articles

AMQ en action

Chroniques

Association mathématique du Québec

Centre 7400
7400, boulevard Saint-Laurent, bureau 257
Montréal (Québec) H2R 2Y1
Téléphone : (514) 278-4263
Télécopieur : (514) 948-6423

http://www.Mlink.NET/~amq/AMQ/index.html

Le *Bulletin AMQ* (ISSN 0316-8832) est publié quatre fois l'an (15 mars, 15 mai, 15 octobre et 15 décembre). Mise en page par Diane Poulin (418-663-6422 et impression par l'Imprimerie d'Arthabaska inc. Montage de la couverture effectué à partir d'une affiche de Marie-Claude Asselin, www.conceptionmc.com. Envoi de publications canadiennes, contrat de vente n° 0467073. Port de retour garanti.

Dépôt légal - 2e trimestre 2004
Bibliothèque Nationale du Québec

Bulletin AMQ
Politique de rédaction et normes de présentation des textes

Dans chaque numéro du *Bulletin AMQ* on retrouve un éditorial circonstancié, des chroniques de nature mathématique, des textes d'information et des articles de fond.

Les articles de fond doivent normalement se situer à l'intérieur de l'un des trois thèmes du *Bulletin AMQ* : mathématiques, didactique des mathématiques, informatique appliquée à l'enseignement ou à l'apprentissage des mathématiques. En général, ils ne doivent pas avoir été publiés dans une autre revue. Toutefois, il pourrait y avoir des exceptions qui seront étudiées par le Comité de rédaction.

Les articles parus dans le *Bulletin AMQ* peuvent être reproduits avec la mention de la source. Les auteurs cèdent à l'AMQ toute redevance qui, leur étant due en vertu des lois touchant aux droits d'auteur, provient de toute utilisation pouvant être faite de leurs textes publiés dans le *Bulletin AMQ*.

Le prix Roland-Brossard est attribué annuellement à un article original publié dans le *Bulletin AMQ* et jugé le meilleur selon un vote pris auprès des lecteurs membres de l'AMQ.

Arbitrage

Seuls les articles de fond sont soumis à l'arbitrage. Le protocole d'arbitrage est le suivant :

- Un arbitre interne (membre du Comité de rédaction) et un arbitre externe se prononcent.
- Si un article est écrit par un membre du Comité de rédaction, il est évalué par deux arbitres externes.
- S'il y a divergence de vue entre les arbitres, on fait appel à un troisième arbitre, externe.
- Les résultats de l'arbitrage sont communiqués aux auteurs et, le cas échéant, des corrections sont demandées.

Normes de présentation

- La longueur maximale d'un article est de 20 pages dactylographiées, incluant tableaux, graphiques, notes, références, bibliographie, etc.
- Les textes doivent être écrits à double interligne sur du papier de format 21,6 cm x 27,9 cm (8 1/2 x 11) au recto seulement et en utilisant une police de caractères de 12 points.
- Les termes en langues autres que le français sont en italique.
- Les illustrations, tableaux, graphiques doivent être fournis, accompagnés des références et légendes, sur des pages distinctes avec, dans le corps du texte, une indication sur leur position approximative. Le cas échéant, l'auteur veillera à obtenir les droits de reproduction.
- Les notes doivent être rassemblées à la fin du texte et précéder les références bibliographiques. Leur numérotation doit être continue.
- Les citations courtes (moins de cinq lignes) sont placées entre « guillemets français » et sont suivies de la mention de la source (Unetelle, 1999, p. 23). Si le nom de l'auteur cité apparaît déjà dans le texte, on ne le répète pas dans la parenthèse.
- Les citations longues sont placées dans un paragraphe distinct, sans guillemets, à simple interligne avec retrait de 1,5 cm à droite et à gauche. La source est mentionnée de la même manière que pour les citations courtes.
- Les sources et références sont fournies à la toute fin du texte, coiffées du titre **Références bibliographiques** et présentées en ordre alphabétique en s'inspirant des exemples suivants :
    - LIVRE
      Ma, O. et Toungue, E. (1997). *Faire des statistiques des populations*. Shangaï, Éditions populaires chinoises.
    - CHAPITRE DE LIVRE
      Perlbien, J. (1996). Les mots mathématiques. Dans Otis-Alpin, A. (Dir.) *Élever le langage à la hauteur des esprits*. Montréal, Langues mêlées, p. 125-174.
    - ARTICLE DE PÉRIODIQUE
      Phun, S. (1995). Faire des mathématiques. *En gang, revue sur l'apprentissage coopératif*, 4(2), p. 24-29.
- L'exactitude des renseignements bibliographiques relève de la responsabilité de l'auteur.
- L'auteur doit faire parvenir au rédacteur en chef quatre exemplaires papier de l'article. Pour assurer l'anonymat lors de l'évaluation de l'article, trois de ces copies doivent être dépourvues des indications permettant d'identifier l'auteur.
- Si des corrections sont demandées, l'auteur devra fournir une version papier du texte corrigé. Le rédacteur en chef précisera le nombre d'exemplaires attendus, deux ou trois, suivant le caractère mineur ou majeur des corrections effectuées.
- Une fois les corrections acceptées ou si aucune correction n'est requise, l'auteur fournira le texte définitif en version papier et en version électronique en langage traitable en Word ou Word Perfect.
- Afin d'assurer une meilleure reproduction des images et des graphiques et limiter les coûts de production, l'auteur devra nous fournir les images et graphiques en format tif, eps ou pcx.

Éditorial

Jean Dionne

Deux idées qui meublent mes insomnies

Dans cet éditorial, vous lirez deux propos *a priori* épars. Du moins est-ce ainsi que je les voyais, jusqu'à ce qu'ils se rejoignent autour d'une idée, celle du rôle que, comme personnes, nous avons à jouer.

Les mathématiques, une science humaine

Le prochain congrès de notre association nous rassemblera cet automne, à Lévis, autour d'un thème qui me paraît d'autant stimulant qu'il rejoint des convictions chez moi profondes et que je sais partagées par plusieurs : les mathématiques comme science humaine.

Car, les mathématiques sont une science humaine. Elles le sont certes au sens large, puisqu'elles demeurent une production par des êtres humains pour des êtres humains, outil d'appréhension de la réalité humaine et de tout ce qui la baigne où elles font preuve d'une « efficacité déraisonnable » selon l'expression du physicien, prix Nobel, Eugene Wigner.

Science humaine, elles le sont dans un sens déjà plus spécifique en ce qu'elles constituent un langage. Encore là, elles se font étonnamment efficaces et d'une universalité qui réjouit, sorte d'espéranto grâce auquel peuvent se rejoindre, du moins en partie, des domaines de savoir très divers.

Science humaine, elles le sont aussi comme domaine de pensée, où elles atteignent les niveaux les plus achevés de cette pensée, lieu privilégié de convergence de la créativité et de la rigueur : car elles font autant de place à l'intuition qu'aux procédures plus formelles et leur formalisme même devient, lorsque bien imaginé, un moteur supplémentaire de la pensée.

Et puis, elles se font souvent si belles, source d'émerveillement, voire d'émotions, confinant ainsi à l'art. Combien satisfaisante peut, par exemple, se révéler l'architecture des nombres naturels ! Quelle splendeur dans certaines démonstrations comme cette extraordinaire preuve diagonale de Cantor qui ne cesse de me réjouir depuis que je l'ai admirée une première fois à la fin de l'adolescence !

Science pure oui, mais aussi science humaine et langage et art, les mathématiques — c'est chez moi une conviction sans cesse affirmée — ne relèvent pas d'un quelconque univers idéal où elles seraient cueillies par quelques esprits éthérés. Elles demeurent au contraire profondément marquées par ce qui est humain, dépendant dans leur essence même de l'activité des humains, la nôtre, celle de nos élèves autant que de celles des grands mathématiciens.

Une association mathématique : des gens pour une idée

Une association n'est pas, non plus, un être en soi, existant au-dessus des personnes, autour d'une idée. J'y vois plutôt une organisation autour de convictions portées par des personnes : elle existe par ces personnes, pour les idées de ces personnes.

Ainsi en va-t-il de l'AMQ.

C'est une organisation qui existe pour les mathématiques, portée par les préoccupations et les intérêts de personnes qui croient en l'importance des mathématiques, à la nécessité d'en assurer le développement, la défense et l'illustration.

Ces convictions sont profondes et le noyau des personnes qui les partagent est solide. Heureusement d'ailleurs, car la tâche se fait rude et nos moyens paraissent souvent pauvres pour ne pas dire dérisoires. D'où la nécessité vitale pour la communauté mathématique de les renouveler et de les développer en redonnant une nouvelle vigueur à l'association.

Diverses mesures ont été décidées que nous souhaitons voir mises en place bientôt et dont vous entendrez parler : établissement de liens avec les gens d'autres disciplines, amélioration des communications entre nous, réanimation du site Internet, etc.

Mais, l'essentiel n'est pas là : il est dans l'association elle-même, se fonde sur sa nature de regroupement de personnes convaincues, sur la force de ses membres actifs. Cette force sera d'autant grande que nous serons nombreux, d'où la mission que je nous invite à remplir : recrutons ! Convainquons les gens qui travaillent autour de nous, de travailler aussi avec nous.

J'ajoute que le congrès qui vient, pourrait constituer une belle occasion de convaincre : car, quoi de plus rassembleur que des idées stimulantes !

Jean Dionne
Président par intérim

AMQ en action

Quelques nouvelles

1. Les prix de l'AMQ pour 2003

Voici venu le temps de préparer vos propositions de candidatures aux divers prix de l'AMQ pour l'an 2003, lesquels seront remis au congrès 2004 à Lévis. Vous trouverez la liste de ces prix ci-dessous avec, le cas échéant, quelques précisions sur l'un ou l'autre, ainsi que les coordonnées des présidents ou présidentes des jurys à qui expédier les dossiers. Pour tous sauf un, le Prix Rolland-Brossard, la date limite de réception des propositions est fixée au 15 juin, ce qui ne doit surtout pas vous empêcher de les soumettre plus tôt.

Prix Abel-Gaulthier : personnalité de l'année

Présidente du jury : Lyse Favreau
174, rue Fraser
Québec (Québec) G1R 2B8
Tél. (bur.) : 418-646-4501
Courriel : Lyse.Favreau@meq.gouv.qc.ca

Prix Adrien-Pouliot : meilleur matériel édité

Président du jury : Matthieu Dufour
Département de mathématiques et statistiques
Université du Québec à Montréal
Case postale 8888, succ. Centre-ville
Tél. rés. : 450-445-6634
Tél. bur. : 514-987-3000, poste7791
Courriel : dufour.matthieu@uqam.ca

Prix Frère-Robert : meilleur matériel non édité

Président du jury : Jean Turgeon
Département de mathématiques et de statistiques
Université de Montréal
Case postale 6128, Succ. Centre-ville
Montréal (Québec) H3C 3J7
Tél.: 514-343-7178
Télécopieur: 514-343-5700
Courriel : turgeon@dms.umontreal.ca

Pour ce prix, il faut expédier le matériel proposé **en 5 exemplaires si possible**.

Prix Roland-Brossard : meilleur article publié dans le *Bulletin AMQ*

Président du jury : Fernand Beaudet
Cégep de St-Hyacinthe
Tél.: (cégep) : 450-773-6800, poste 395
Télécopieur : 450-773-9971
Courriel : fernand@medusesetlicornes.com

Ce prix est attribué à la suite d'un vote des lecteurs du *Bulletin AMQ* : il suffit de retourner le bulletin de vote reçu avec le numéro de mars, ce que vous avez normalement dû faire avant le premier mai dernier.

Prix Dieter-Lunkenbein : meilleure thèse de doctorat en didactique des mathématiques déposée au cours des deux années précédentes

Présidente du jury : Pascale Blouin
Département des sciences de l'éducation
Université du Québec à Trois-Rivières
3351, boulevard des Forges
Case postale 500
Trois-Rivières (Québec) G9A 5H7
Tél. (bur.) : 819-376-5011, poste 3657
Courriel : Pascale_Blouin@uqtr.ca

Ce prix est accordé pour une maîtrise une année et pour un doctorat l'année suivante. Cette année, c'est le tour des thèses de doctorat de se voir célébrer.

2. 125^e anniversaire de l'Université de Montréal

Dans le cadre des fêtes du 125^e anniversaire de l'Université de Montréal, plusieurs mathématiciens et personnes impliquées dans le développement des sciences mathématiques ont été honorées récemment dans un cahier « Hommage aux pionnières et pionniers » disponible sur le site www.125.umontreal.ca . On y trouve Maurice L'Abbé, fondateur de notre association et membre émérite de l'AMQ, Jacques St-Pierre, l'un des pionniers de la statistique et de l'informatique au Québec et Lucille Roy, membre émérite de l'AMQ. On y trouve également Jean Beaudot, Pierre Robert, Henri-François Gautrin, Abel Gauthier en compagnie de plus d'une centaine d'autres personnes s'étant illustrées à l'Université de Montréal depuis 1878.

Lucille Roy est l'une des rares personnes honorées qui ne provienne pas du corps professoral. On l'a choisi comme cas d'espèce des personnes qui ont « accompagné » de façon remarquable l'institution dans son développement au cours du dernier siècle. On a mis en évidence sa contribution « tout à fait exceptionnelle » au développement du Département d'informatique dont elle a occupé des postes importants sous les huit premiers directeurs en commençant par Jacques St-Pierre qui l'avait d'ailleurs recrutée dès 1959 pour son Centre de statistique du Département de mathématiques.

Rappelons que le *Bulletin AMQ* a déjà publié des articles ou entrevues sur Maurice L'Abbé et Jacques St-Pierre (Vol. XXXV, mai 1995, p.21 et Vol. XXXVII, mai 1997, p. 10). Félicitations à toutes ces personnes de la communauté mathématique du Québec qui ont été honorées comme pionnières de l'Université de Montréal.

3. Publication en Suisse

L'un de nos membres, Philippe R. Richard, professeur à la Faculté des sciences de l'éducation de l'Université de Montréal, vient de publier à la maison d'édition Peter Lang de Berne un important ouvrage intitulé « Raisonnement et stratégies de preuves dans l'enseignement des mathématiques ». Il s'agit du numéro 125 de la collection « Exploration » de la *Société Suisse pour la Recherche en Éducation.* D'autres détails sont disponibles sur le site de l'éditeur http://www.peterlang.net/. Félicitations à Philippe Richard.

4. Prix Abel 2004

L'Académie norvégienne des sciences et des lettres a décidé d'attribuer le Prix Abel 2004 conjointement à Sir Michael Francis Atiyah, de l'Université d'Edinburgh et Isadore M. Singer, du Massachusetts Institute of Technology, « pour la découverte et la démonstration du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer, qui unifie la topologie, la géométrie et l'analyse, et pour leur rôle déterminant dans l'établissement de nouvelles passerelles entre les mathématiques et la physique théorique ».

Ce prix de grand prestige de 6 millions de couronnes (environ 800 000$ US) sera remis le 25 mai prochain à l'Université d'Oslo. Le premier Prix Abel a été décerné en 2003 à Jean-Pierre Serre du Collège de France. Il s'agit pour les mathématiques de l'équivalent du Prix Nobel.

Pour d'autres informations, dont une présentation « grand public » du théorème d'Atiyah-Singer, voir le site http://abelprisen.no/en/.

5. Congrès international des mathématiciens

Le congrès quadriennal de l'Union mathématique internationale (UMI) aura lieu à Madrid en 2006. Les informations se trouvent sur le site http://www.icm2006.org.

Par ailleurs, sur le site http://www.ceic.math.ca/Publications/ se trouvent les recommandations du Comité sur l'information et la communication électronique (CEIC) de l'UMI face aux prix exorbitants de certaines revues scientifiques.

6. Concours et camp mathématiques du secondaire. Prix Hector-Gravel

Le concours mathématique secondaire 2004 de l'AMQ a été remporté par Peter Drianov, de l'École secondaire Sophie-Barat (Montréal), qui mérite ainsi le Prix Hector-Gravel de l'AMQ. Le deuxième prix va à Nora Ruo, de l'École Georges Vanier (Montréal) et le troisième à Zhe Tian, de l'École secondaire Mont-Royal (Montréal). Félicitations à ces grands gagnants.

Merci à Véronique Hussin et à son équipe qui a organisé ce concours cette année.

L'Association Mathématique du Québec (AMQ) et la Société Mathématique du Canada (SMC) organisent un camp pour les élèves qui se sont classés parmi les vingt premiers au concours provincial de mathématiques. Cette année, le camp se tiendra à Rimouski du 21 juin au 26 juin 2004 et sera organisé par le Carrefour des Sciences et des Technologies sous le parrainage de l'UQAR, du Cégep de Rimouski et de la Commission scolaire des Phares. La direction est assurée par Philippe Etchecopar. Vous pourrez obtenir toutes les informations sur les activités du camp en visitant le site : http://www.csteq.com/contenu/camp/camp.htm

7. Concours et camp mathématique du collégial. Prix Michel-Girard

Le concours mathématique collégial 2004 de l'AMQ a été remporté par Mathieu Guay-Paquet, du Cégep de Maisonneuve et Gabriel Gauthier-Shalom, du Collège Marianopolis, tous deux en première place et qui se méritent ainsi le Prix Michel-Girard de l'AMQ. Le Troisième prix va à Karol Przybytkowski, du Collège Marianopolis. Féliciations à ces grands gagnants qui méritent ainsi le prix Michel-Girard de l'AMQ.

Merci à Jacques Labelle et à son équipe qui ont organisé ce concours cette année.

Pour une quatrième année consécutive, le camp mathématique du collégial se tiendra à l'UQAM en 2004. Les participants en sont principalement les lauréats du Concours mathématique du Québec, niveau collégial. Le camp aura lieu du 23 mai au 4 juin, sous la direction de Pierre Bouchard (bouchard.pierre@uqam.ca). Vous pourrez obtenir des informations sur les activités du camp en visitant le site : http://campmath.uqam.ca/.

8. Rubrique « Enseignement »

À compter de ce numéro, le bulletin présentera une nouvelle rubrique intitulée **Enseignement**. Sous la direction de Diane Demers et Marie-Jane Haguel, cette rubrique traitera de didactique et de pédagogie. Les responsables y présenteront des éléments de réflexion qui, nous l'espérons, susciteront chez nos lecteurs un intérêt pour de nouvelles idées en enseignement des mathématiques.

9. Jeu et psychologie : une professeure de mathématiques s'y intéresse

Louise Pagé, professeure de mathématiques au Collège Montmorency, a rédigé un article publié dans Le Devoir les 2 et 3 août 2003 sous le titre *Le calcul illusoire du jeu*. Ce texte, publié dans la section Libre opinion, consiste en une présentation *large public*, sans formule, de la notion d'espérance mathématique de gain, plus précisément dans le cadre des loteries. Madame Pagé a eu la bonne idée d'introduire l'espérance mathématique de gain en termes de taux de retour des loteries aux consommateurs, ce qui la rend facilement compréhensible et lui permet un impact direct. On apprend en particulier qu'une loi québécoise impose aux producteurs de loteries un pourcentage minimal de retour des recettes en lots gagnants. Des exemples numériques référant à des loteries réelles illustrent très simplement le propos. Un fait s'impose : l'auteure a travaillé avec des psychologues traitant des joueurs compulsifs. La question du lien entre l'addiction au jeu et la compréhension de l'espérance mathématique de gain est donc soulevée, en conclusion du texte, ce qui ne manque pas d'intriguer et d'intéresser le lecteur. En tant que professeur, il est toujours souhaitable de relier les concepts que nous enseignons avec la réalité du monde qui nous entoure. À cet effet, les étudiants de niveau secondaire ou encore de niveau collégial, par exemple dans des classes de méthode quantitatives, pourraient bénéficier largement de la lecture de ce texte. Louise Pagé a d'ailleurs utilisé son article dans sa classe de statistique et récupéré les commentaires d'étudiants. L'article est disponible à l'adresse électronique suivante : http://www.ledevoir.com/2003/08/02/33094.html.

Diane Demers/Collège de Maisonneuve

10. Une nouvelle revue virtuelle

Nous avons reçu de Richard Pallascio un bref message annonçant l'arrivée prochaine d'une nouvelle revue virtuelle. Surveillez dans notre *Bulletin* d'octobre une page de publicité avec tous les détails ! Nous reproduisons ce message ci-après.

Une nouvelle publication sur les mathématiques du primaire ! Une nouvelle revue virtuelle ciblant l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'or-

dre primaire paraîtra dès l'automne 2004 sur le site de l'Association mathématique du Québec. Dans la continuité de la revue Instantanés mathématiques éditée pendant plus de 30 ans par la regrettée association APAME, la revue virtuelle, qui portera le même nom, paraîtra trois fois par an, en octobre, en janvier et en mai, et contiendra des articles de réflexion liée à la réforme en cours, parfois accompagnés de documents vidéo, de même qu'une partie pratique pouvant contenir des idées d'activités mathématiques, des situations-problèmes, des descriptions de logiciels ouverts, des repères culturels et historiques, des hyperliens, etc, le tout dans l'environnement dynamique qu'offre l'Internet ! L'accès sera gratuit pour les deux premières années : informez-en vos collègues !

Les auteur-e-s et vidéastes intéressés sont invités à contacter Richard Pallascio à l'adresse suivante : Pallascio.Richard@uqam.ca .

Merci à Diane Demers et Bernard Courteau pour leur contribution à cette chronique.■

Fernand Beaudet
Pour le comité de rédaction

Conférence de clôture du congrès

Une introduction à l'ingénierie financière

Geneviève Gauthier
HEC, Montréal

Introduction

Les récents accords internationaux sur la gestion des risques des institutions financières obligent ces dernières à se doter d'un système de contrôle d'évaluation des risques. Le Bureau du surintendant des institutions financières (BSIF), l'organisme régissant les opérations des institutions financières canadiennes, offre deux alternatives suite aux spécifications sur les risques de marché des accords internationaux de Bâle (1) : l'utilisation d'un système stansardisé très mécanique et peu flexible ; ou (2) : la mise en oeuvre d'un système interne d'évaluation des risques répondant à plusieurs critères. La grande majorité des banques optent pour la deuxième option, offrant une estimation des risques plus précise et mieux adaptée aux caractéristiques de l'établissement. En général, l'outil de référence pour accomplir cette tâche est la valeur à risque (VaR) pour les risques de marché et pour les risques de crédit.

Derrière cette évaluation des risques se cachent des modèles mathématiques complexes exigeant des compétences dans divers domaines : équations différentielles, analyse numérique, probabilité et statistique, calcul stochastique, optimisation, recherche opérationnelle, programmation, etc.

Par conséquent, les grandes banques, certaines compagnies d'assurances et de grandes entreprises embauchent de plus en plus de personnels spécialisés en mathématiques.

L'exposé propose un survol de quelques problématiques liées à la gestion d'un portefeuille et leurs liens avec les mathématiques.

La gestion du risque dans les banques

Le risque de marché : la valeur d'un portefeuille varie dans le temps même si son détenteur ne modifie pas ses positions. La variation est attribuée aux fluctuations des prix des composantes du portefeuille (actions, obligations, produits dérivés).

Le risque de crédit : les institutions doivent encaisser des pertes causées par le défaut de paiement d'une contrepartie.

Le risque de liquidité : certains titres du portefeuille ne peuvent pas être vendus puisque l'institution ne trouve pas d'acheteurs. Ces titres ont une valeur « théorique » mais sont difficilement échangeables sur les marchés.

Notation

$$V(t)=\sum_{n=1}^{N}\phi_n(t)S_n(t) \qquad (1)$$

où $V(t)$ = valeur du portefeuille au temps t,
N = nombre de titres détenus dans le portefeuille,
$S_n(t)$ = valeur au temps t du $n^{\text{ème}}$ titre du portefeuille,
$\phi_n(t)$ = nombre de parts détenues au temps t du $n^{\text{ème}}$ titre.

Pour l'instant, nous supposerons que $\phi_n(t) = \phi_n$ pour tout $t \geq 0$, c'est-à-dire que les positions du portefeuille ne changent pas au cours du temps, mais la valeur de ce dernier peut varier à cause de la fluctuation des valeurs des titres le composant.

Problématique

La valeur du portefeuille aujourd'hui $(t = 0)$ est connue avec certitude puisqu'on trouve les valeurs $S_n(0)$, $n \in \{1, ..., N\}$ des titres sur les marchés.

$$\begin{aligned} V(0) &= \sum_{n=1}^{N}\phi_n S_n(0) \\ &= \text{valeur du portefeuille aujourd'hui.} \end{aligned} \qquad (2)$$

La valeur $S_n(t)$ du $n^{\text{ème}}$ titre au temps t est supposée aléatoire puisqu'il s'agit de la valeur de ce titre à un instant t situé dans le futur. Par conséquent, la valeur future du portefeuille est, elle aussi, aléatoire :

$$\begin{aligned} V(t) &= \sum_{n=1}^{N}\phi_n S_n(t) \\ &= \text{valeur du portefeuille au temps } t. \end{aligned} \qquad (3)$$

Processus stochastique

Nous nous intéressons à l'évolution $\{V(t) : t \geq 0\}$ de la valeur du portefeuille au cours du temps.

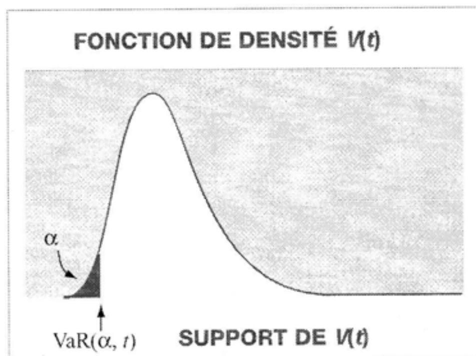
Une succession de variables aléatoires indicées par le temps forme un processus stochastique. Il est plus intéressant de considérer le processus dans son ensemble que chacune de ses composantes prises individuellement puisque cela nous permet de prendre en compte la dépendance de $V(t)$ par rapport à ses valeurs passées.

Valeur-à-risque (value at risk)

Afin de répondre aux exigences des organismes de régulation, il faut estimer la distribution (ou certains de ses paramètres) de la valeur du portefeuille dans le futur. La VaR est un paramètre de cette distribution qui est accepté par les organismes de contrôle comme mesure de risque.

La Valeur-à-risque (value at risk) est une mesure de risque largement utilisée par les institutions.

$$\begin{aligned} \text{VaR}(\alpha, t) = {} & \text{quantile d'ordre } \alpha \\ & \text{de la distribution de } V(t). \end{aligned} \qquad (4)$$



Interprétation

La probabilité que la valeur au temps t du portefeuille soit inférieure à la valeur à risque est de α.

Problématique

Afin de déterminer la VaR associée à un portefeuille ou de calculer d'autres mesures de risque, il nous faut déterminer la distribution de V à divers moments dans le futur.

Commençons par modéliser la distribution des constituants du portefeuille. Comment détermine-t-on la loi du processus stochastique

$$\{S_n(t) : \tau \geq 0\}$$

représentant l'évolution du $n^{\text{ème}}$ titre ?

Cela dépend de la nature du titre. Est-ce une action ? Un produit dérivé ?

Les actions
Introduction aux équations différentielles stochastiques

Le processus stochastique

$$S = \{S(t) : t \geq 0\}$$

représente l'évolution du prix d'une action.

Nous ne connaissons pas, en général, la loi qui gouverne un tel processus, mais nous avons peut-être une idée de son comportement local. Par exemple, sur un court intervalle de temps de longueur Δt, il est possible que ce prix ait tendance à varier proportionnellement à la longueur de la période et au prix de l'actif au début de la période. Nous écrivons, pour débuter,

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu\, S_t\, \Delta t. \qquad (5)$$

Si, en général, les prix augmentent, alors μ est une constante positive et si les prix tendent à diminuer, alors μ est négative.

Il y a cependant un problème avec cette dernière équation : nous ne sommes pas certain que le prix varie proportionnellement à la longueur de la période et au prix de l'actif, nous prétendons seulement qu'il a tendance à le faire. Il faut donc incorporer à notre équation un terme d'erreur. Nous pouvons toutefois contrôler l'ampleur de cette erreur aléatoire.

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu\, S_t\, \Delta t + \underbrace{\sigma\, S_t \times \underbrace{\xi_t}_{N(0,\,\Delta t)}}_{\text{Erreur aléatroire}} \qquad (7)$$

Par exemple, nous pouvons supposer que l'erreur dépend du prix de l'actif en début de période. En effet, nous constatons que plus le prix est élevé, plus le prix de l'actif risqué peut s'écarter de la tendance. De plus, l'erreur aléatoire doit aussi dépendre de la longueur de l'intervalle de temps considéré : plus l'intervalle est grand, plus le prix risque de s'écarter de la tendance. Nous ajoutons un terme stochastique à notre équation de départ.

Cette équation nous permet d'anticiper les variations du prix du titre du temps t au temps $t + \Delta t$. Elle ne permet pas de modéliser l'évolution de cette dynamique dans le temps, c'est-à-dire aux instants :

$$0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \ldots$$

Pour ce faire, nous devons introduire un processus stochastique pour les erreurs.

Intermède : le mouvement brownien

Nous cherchons à modéliser ce qui n'a pas été prévu par les investisseurs. Nous voulons donc un processus possédant les caractéristiques suivantes :

1. Le présent est observé. L'erreur devrait donc être nulle ;
2. Un processus d'espérance nulle puisqu'une espérance non nulle signifierait une tendance à la hausse ou à la baisse ;
3. Puisque le futur rapproché est plus facilement prévisible qu'un futur éloigné, nous voulons un terme d'erreur qui ait tendance à être de plus en plus grand au fur et à mesure que le temps passe. Cela peut se traduire statistiquement par une augmentation de l'écart-type dans le temps ;
4. Nous voulons que les erreurs futures soient indépendantes de celles observées dans le passé. Techniquement, nous désirons un processus à incréments indépendants.

Définition du mouvement brownien

Un mouvement brownien standard $\{W_t : t \geq 0\}$ est un processus stochastique tel que

(MB1) $W_0 = 0$.

(MB2) $\forall\, t_i,\ 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k$, les variables aléatoires $W_{t_1} - W_{t_0},\ W_{t_2} - W_{t_1},\ \ldots,\ W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ sont indépendantes,

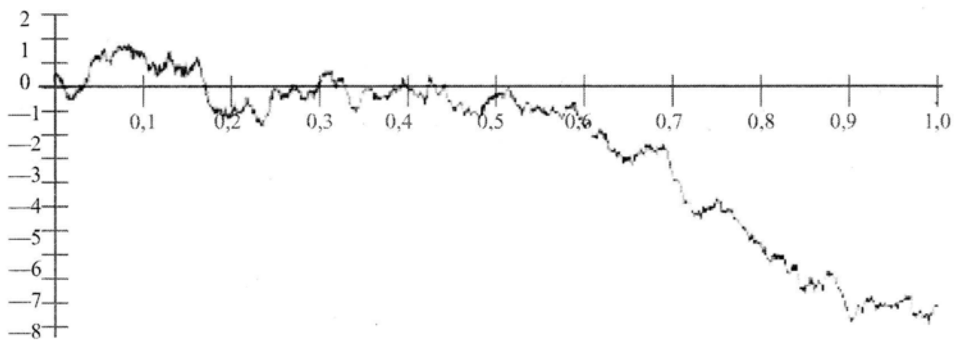
(MB3) $\forall\, s, t \geq 0$ tel que $s < t$, la variable aléatoire $W_t - W_s$ est de distribution normale d'espérance 0 et de variance $t - s$

$$(W_t - W_s \sim \mathrm{N}\,(0, t - s)),$$

(MB4) les trajectoires sont continues.

LE MOUVEMENT BROWNIEN

Une trajectoire d'une approximation du mouvement brownien standard



Réécrivons l'équation (7) :

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \times \underbrace{\xi_t}_{N(0,\,\Delta t)} \qquad (9)$$

Nous introduisons le mouvement brownien W puisqu'il peut bien modéliser la dynamique des erreurs :

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \times (W_{t+\Delta t} - W_t). \qquad (10)$$

Notons que la loi de $W_{t+\Delta t} - W_t$ est la même que la loi de ξ_t : elles sont toutes deux de loi $N(0, \Delta t)$.

Reprenons l'équation (10) :

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t (W_{t+\Delta t} - W_t). \qquad (11)$$

Lorsque les intervalles de temps de longueur Δt deviennent de longueur infinitésimale, nous obtenons une équation du type :

$$dS_t = \mu\, S_t dt + \sigma S_t dW_t. \qquad (12)$$

Cette dernière équation est un exemple d'équation différentielle stochastique.

Lorsque nous écrivons :

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (13)$$

nous cherchons un (ou des) nombre(s) satisfaisant cette équation. Lorsque nous considérons une équation différentielle, par exemple :

$$df(t) = af(t)\, dt, \qquad (14)$$

l'inconnue recherchée est une fonction. Avec les équations différentielles stochastiques :

$$dX(t) = b\,(X(t)\,,\,t)\, dt + a\,(X(t)\,,\,t)\, dW(t)\,, \qquad (15)$$

l'inconnu est un processus stochastique. Selon la nature de l'équation différentielle stochastique, certaines questions sont soulevées :

1. Existe-t-il une solution à l'EDS ? Si oui, est-elle unique ?

Si X et W sont multidimensionnels, alors nous obtenons un système d'équations différentielles stochastiques analogue aux équations aux dérivés partielles dans le cas déterministe.

2. Il est possible que le SEDS doive être solutionné numériquement.

Si tel est le cas, nous obtenons un processus stochastique multidimensionnel qui est une approximation de la solution. Quelle est l'ordre de grandeur de l'erreur commise ? Comment cela se répercute-t-il dans les calculs d'espérance, de variance et de quantiles ? Combien de temps est nécessaire au calcul de la solution ?

Les produits dérivés

Définition
Les produits dérivés sont des contrats dont les flux monétaires sont fonctions d'autres produits tels les actions, les taux de change, les indices boursiers, les obligations, les taux d'intérêt, etc.

Exemple de produits dérivés
Une option d'achat donne le droit (et non l'obligation) à son détenteur d'acheter une quantité d'actions donnée, à un prix K fixé à l'avance et à un instant T aussi déterminé dans les clauses du contrat.

Exemple
Vous désirez acheter une option d'achat vous permettant d'acheter dans trois mois $(T = 90/365)$, 100 actions de la compagnie *XYZ* au même prix qu'elles se vendent aujourd'hui (disons $K = S(0) = 10$ \$).

Au bout des trois mois, deux situations peuvent se produire.

- Si le prix est supérieur à K (disons 12 \$/action), alors vous exercez votre option, achetez les 100 actions à $K = 10$ \$/action au vendeur de l'option et revendez ces actions sur les marchés au prix de 12 \$/action. Vous réalisez un profit de :
$$100 \times (12\$ - 10\$) = 200\$.$$

- D'autre part, si le prix de l'action dans trois mois est inférieur au prix d'exercice, $S(90/365) < K$, vous n'avez aucun avantage à lever votre option et vous ne réalisez aucun profit.

Le flux monétaire engendré par cette option est :
$$\max(S(T) - K; 0).$$

La problématique est la suivante : quel est le juste prix de cette option d'achat ?

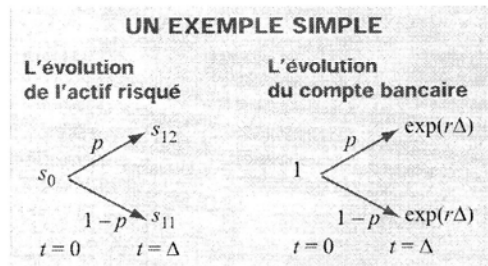
À brûle-pourpoint, la plupart des mathématiciens répondent

$$\mathrm{E}\left[\underbrace{\alpha(T)}_{\substack{\text{Facteur}\\ \text{d'actualisation}}} \quad \underbrace{\max(S(T)-K;\ 0)}_{\substack{\text{Flux monétaire}\\ \text{engendré par l'option}}}\right] \qquad (17)$$

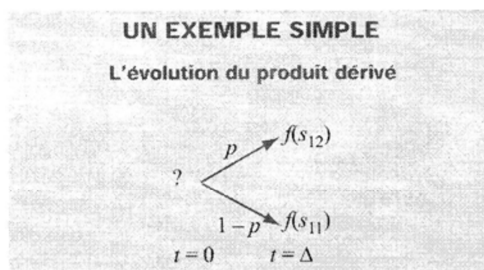
puisque les valeurs marchandes d'un dollar aujourd'hui et d'un dollar dans trois mois sont différentes, il faut introduire un facteur d'actualisation. Or, cette réponse est peut être incorrecte ...

La tarification des produits dérivés

Un exemple simple (simpliste)
Considérons le modèle à une seule période suivant :



Un investisseur considère l'achat (ou la vente) d'un droit contingent à l'actif risqué (produit dérivé), c'est-à-dire que les flux monétaires engendrés par le produit dérivé sont une fonction $f(S_\Delta)$ du prix de l'actif risqué.

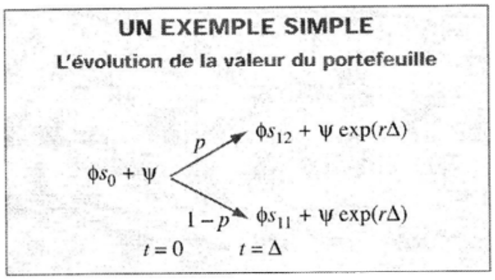


Quelle est la valeur initiale (au temps $t = 0$) de ce produit dérivé ?

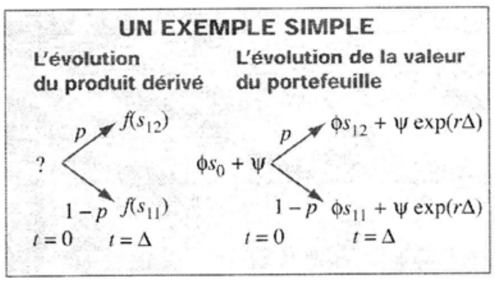
Le portefeuille (ϕ, ψ), constitué de ϕ parts de l'actif risqué et de ψ parts de l'actif sans risque a une valeur initiale de

$$V_0^{(\phi,\psi)} = \phi\ s_0 + \psi\,. \qquad (18)$$

Comme sa valeur au temps $t = \Delta$ dépend de la valeur de l'actif risqué, nous avons :



Il est possible de choisir ϕ et ψ de sorte que le portefeuille réplique le produit dérivé.



Il nous faut résoudre le système d'équations linéaires

$$\phi\, s_{12} + \psi \exp(r\Delta) = f(s_{12}), \qquad (19)$$

$$\phi\, s_{11} + \psi \exp(r\Delta) = f(s_{11}). \qquad (20)$$

Sous forme matricielle, le système linéaire à résoudre est :

$$\begin{pmatrix} s_{12} & \exp(r\Delta) \\ s_{11} & \exp(r\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(s_{12}) \\ f(s_{11}) \end{pmatrix} \qquad (21)$$

Si la matrice

$$\begin{pmatrix} s_{12} & \exp(r\Delta) \\ s_{11} & \exp(r\Delta) \end{pmatrix}$$

est inversible $(s_{11} \neq s_{12})$, l'unique solution est :

$$\phi = \frac{f(s_{12}) - f(s_{11})}{s_{12} - s_{11}}, \qquad (23)$$

$$\psi = \exp(-r\Delta)\, \frac{s_{12} f(s_{11}) - s_{11} f(s_{12})}{s_{12} - s_{11}}. \qquad (24)$$

La valeur initiale du portefeuille de réplication est :

$$V_0^{(\phi,\,\psi)} = \phi s_0 + \psi \qquad (25)$$

$$= \frac{f(s_{12}) - f(s_{11})}{s_{12} - s_{11}} s_0 + \exp(-r\Delta) \frac{s_{12} f(s_{11}) - s_{11} f(s_{12})}{s_{12} - s_{11}} \qquad (26)$$

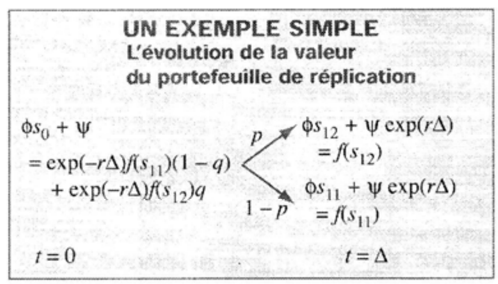
$$= \exp(-r\Delta) f(s_{11})(1-q) + \exp(-r\Delta) f(s_{12}) q \qquad (27)$$

où

$$q = \frac{\exp(r\Delta) s_0 - s_{11}}{s_{12} - s_{11}} \qquad (28)$$

Notons que q ne dépend aucunement du produit dérivé.

Il faut que deux stratégies d'investissement produisant les mêmes flux monétaires aient la même valeur initiale. Par conséquent, il faut que la valeur initiale du produit dérivé soit égale à la valeur initiale du portefeuille de réplication.



Comme le choix de notre produit dérivé était arbitraire, le résultat est valide pour tous les produits dérivés de notre modèle de marché :

la valeur initiale

$$\exp(-r\Delta) f(s_{11})(1-q) + \exp(-r\Delta) f(s_{12}) q \qquad (29)$$

d'un produit dérivé est l'espérance, sous une nouvelle mesure de probabilité Q, de la valeur actualisée de ses flux monétaires où

$$q = \frac{\exp(r\Delta) s_0 - S_{11}}{s_{12} - s_{11}}. \qquad (30)$$

Notons que cette valeur initiale est différente de l'espérance, sous la « vraie » mesure de probabilité P, de la valeur actualisée des flux monétaires :

$$\exp(-r\Delta)f(s_{11})(1-p)+\exp(-r\Delta)f(s_{12})p. \quad (31)$$

La raison est qu'il n'est pas justifiable d'actualiser les flux monétaires d'un actif risqué avec un facteur d'actualisation construit à partir de l'actif sans risque. Un investisseur exige un rendement moyen plus élevé pour un actif risqué.

Comme la valeur initiale du droit contingent est

$$\exp(-r\Delta)f(s_{11})(1-q)+\exp(-r\Delta)f(s_{12})q, \quad (32)$$

la mesure Q est appelée ***mesure neutre au risque*** puisque l'on travaille avec le taux d'intérêt sans risque pour actualiser les flux monétaires.

La tarification des produits dérivés

Les concepts introduits dans cet exemple simple trouvent leur extension dans les modèles multivariés en temps continu (à périodes multiples).

Le changement de mesure donnant l'accès au monde neutre au risque dans lequel se fait la tarification des produits dérivés fait appel à la théorie de la mesure et à d'autres concepts d'analyse.

Rappel :

$$\text{prix} = \mathbf{E}^Q\left[\underbrace{\beta(T)}_{\substack{\text{facteur}\\ \text{d'actualisation}}} \quad \underbrace{f(S(T))}_{\substack{\text{flux}\\ \text{monétaire}}}\right] \qquad (33)$$

Dans bien des cas, il n'est pas possible d'obtenir une expression « analytique » pour le prix d'un produit dérivé. L'espérance est calculé numériquement et ...

Simulation de Monte Carlo

Rappel : il faut évaluer

$$\text{prix} = \mathbf{E}^Q[\beta(T)f(s(T))]. \qquad (34)$$

Étape 1. L'EDS du prix de l'action nous permet de simuler par ordinateur m scénarios possibles pour le prix de l'action : $s_1(T),\dots,s_m(T)$.

Étape 2. Nous pouvons alors déterminer m valeurs possibles de la valeur actualisée du flux monétaire de l'option

$$\beta_1(T)f(s_1(T)), \dots, \beta_m(T)f(s_m(T)).$$

Étape 3. Le prix du produit dérivé est estimé à l'aide de la moyenne échantillonnale

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\beta_i(T)f(s_i(T)) \; .$$

À l'étape 1, il faut utiliser des suites de nombres pseudoaléatoires et/ou des suites à discrépance faible. Or, selon la nature de la simulation, certains problèmes surgissent (longueur du cycle, dimension, calcul de la précision de l'estimé, solution numérique de l'EDS, etc.) et il faut alors faire appel à l'analyse numérique.

$$dS_t = b\,(t, S_t)\,dt + a\,(t, S_t)\,dW(t) \qquad (35)$$

peut s'obtenir, entre autres, par l'approximation d'Euler stochastique :

$$S_{t+h} = S_t + b(t, S_t)\,h + a(t, S_t)\,(W(t+h) - W(t)). \quad (36)$$

Il faut être capable d'estimer les paramètres cachés dans les expressions $b(t, St)$ et $a(t, St)$. Par exemple, si

$$dS_t = \mu(t, S_t)\,dt + \sigma S_t\,dW(t)\,, \qquad (37)$$

alors il faut estimer μ et σ.

Une première façon de faire est d'utiliser un échantillon de prix d'actions observés (ex. le prix de l'action à la fermeture des marchés tous les jours de l'année précédente). Cette approche requiert des connaissances en séries chronologiques et en économétrie.

Une deuxième approche est appelée la méthode implicite. Il s'agit de sélectionner un échantillon de j produits dérivés tous basés sur le même titre sous-jacent. Les estimés des paramètres sont ceux qui minimisent la différence entre le prix donné par le modèle et celui observé

$$Q(\mu,\sigma) = \sum_{i=1}^{j}\left(\text{Prix}_i^{\text{modèle}} - \text{Prix}_i^{\text{observé}}\right)^2 \qquad (38)$$

La fonction $Q(\mu,\sigma)$ étant non linéraire et non convexe, il faut utiliser des techniques sophistiquées d'optimisation (particulièrement quand le nombre de paramètres à estimer est grand).

VaR

Rappelons que l'idée première est de déterminer la distribution de la valeur d'un portefeuille à un instant t situé dans le futur :

$$V(t)=\sum_{n=1}^{N}\phi_n\, S_n(t). \qquad (39)$$

Étape 1. Déterminer les processus stochastiques (le système d'équations différentielles stochastiques) qui caractérisent les sources de risques (actions, taux d'intérêts, taux de change, etc.).

Étape 2. Estimer les paramètres des modèles. L'estimation globale du système permet de prendre en compte la dépendance entre les facteurs de risques.

Étape 3. Utiliser la simulation de Monte Carlo afin d'obtenir des scénarios pour chacun des titres du portefeuille.

À ce stade, il faudra utiliser des techniques de réduction de la variance afin d'améliorer l'efficacité de la simulation. En effet, les institutions détiennent généralement de très gros portefeuilles (N est grand) et il faut simuler beaucoup (disons m) de trajectoires afin d'obtenir une bonne évaluation de la distribution de $V(t)$.

Or, le temps est un facteur très important en finance. Les VaR de marché doivent être calculées plusieurs fois par jour. Ces techniques requièrent une bonne connaissance des probabilités et des statistiques, de l'optimisation et de l'analyse numérique.

Étape 4. L'étape 3 nous permet d'obtenir m scénarios possibles pour $V(t)$ et nous permet d'estimer sa distribution.

Conclusion

D'autres problèmes quantitatifs surviennent fréquemment. Voici quelques problématiques :

1. Comment déterminer l'allocation optimale d'un portefeuille afin de maximiser ses revenus tout en minimisant son risque et en s'assurant d'avoir les fonds nécessaires à toutes les fois que des paiements sont requis (gestion de portefeuille) ?

2. Comment détermine-t-on la fonction de paiement d'un produit dérivé afin que ce dernier réponde à des besoins particuliers de couverture (« design » de produits dérivés) ?

3. Comment utiliser les énormes bases de données disponibles dans ces institutions afin de prendre les meilleures décisions d'affaires possibles ? ■

Geneviève Gauthier
École des Hautes études commerciales (HEC)
Montréal

Évaluation par inclusion et similarité

Omar Boutéglifine
Centre de recherche sur l'enseignement des mathématiques - Agadir

Introduction

L'évaluation pédagogique se base sur plusieurs facteurs dont l'observation, l'écoute et le calcul. Cependant, pour s'assurer un certain degré d'objectivité, l'évaluation fait parfois appel à l'analyse de données statistiques non seulement pour observer ces données mais également pour en déduire des tendances générales en vue de prendre des décisions importantes. L'analyse de données statistiques se base sur des théories mathématiques qui donne des résultats convaincants, révèle le secret des phénomènes que cache la réalité, établit des liens entre différentes composantes de cette réalité et permet de maîtriser ces phénomènes en réduisant les fluctuations du hasard qui peuvent les atteindre.

Dans cet article, nous présentons deux outils simples de l'analyse de données qui ont un rôle à jouer dans l'évaluation, il s'agit de l'*Analyse hiérarchique des similarités et de l'analyse implicative* qui permettent de grouper et hiérarchiser les individus et les variables selon leur degré de ressemblance.

Dans l'*Analyse hiérarchique des similarités* selon Lerman, « on cherche à constituer sur l'ensemble des variables des partitions de moins en moins fines telles que : deux variables a et b, caractérisant respectivement les parties A et B d'un ensemble E de sujets, se ressemblent d'autant plus que l'effectif des sujets les satisfaisant ($A \cap B$) est important eu égard d'une part à ce que qu'il aurait été dans le cas d'absence de lien a priori entre a et b et d'autre part, aux cardinaux de A et B. On mesure cette ressemblance par la probabilité de son invraisemblance »[1].

Gras (1979) puis Lerman, Gras, Rostam (1981) ont défini et précisé la notion de quasi-implication mesurée par une intensité d'implication et la notion de graphe d'implication, image de la relation d'ordre partiel qui en découle. L'intensité d'implication s'exprime, dans le cas général, par une intégrale gaussienne, qui rend compte du caractère invraisemblable de l'observation faite du nombre de cas où l'implication $X \Rightarrow Y$ se trouve défaillante, dans une hypothèse d'absence de lien implicatif a priori. Nous n'allons pas nous engager dans la théorie mathématique relative aux propriétés de cette intensité rappelées dans la thèse de Larher (1991) et dans d'autres travaux (Almouloud, Totohasina, Ratsimba-Rajhon et Bailleul). Le logiciel CHIC conçu par Régis Gras et ses collaborateurs de l'IRMAR-Rennes traite de la *Classification hiérarchique implicative et cohésive* ; il est vivement conseillé pour le genre de travail que nous présentons dans cet article.

Notre but est d'abord de familiariser l'utilisateur, scientifique ou non, avec ces techniques en présentant un exemple concret utilisant la quasi-inclusion au lieu de la quasi-implication et l'approche statistique au lieu de l'approche probabiliste pour atténuer le degré de difficulté.

Construction à la main d'une hiérarchie implicative et de similarité à travers un exemple

Considérons qu'un enseignant s'intéresse aux erreurs des élèves dans un contrôle, et pour ne pas alourdir la tâche, limitons le nombre d'erreurs à 5 (5 erreurs Ei) et le nombre d'élèves à 10 (10 individus Ij). Nous résumons cette collecte dans le tableau suivant :

Les 10 individus qui ont subi le contrôle	Différentes erreurs rencontrées chez les 10 élèves					
	E1	E2	E3	E4	E5	Total
I1	1	1	1	0	1	4
I2	0	0	0	1	1	2
I3	0	1	1	1	0	3
I4	1	0	1	0	1	3
I5	1	1	1	0	0	3
I6	0	0	0	0	1	1
I7	1	1	0	1	0	3
I8	1	1	0	0	1	3
I9	1	0	0	0	1	2
I10	0	0	0	0	1	1
Total	6	5	4	3	7	25

Au centre du tableau, le chiffre 1 signifie la présence de l'erreur et le chiffre 0 son absence.

Parmi les 5 erreurs, l'individu I1 en a commis 4, l'individu I2 en a commis 2, etc.

L'erreur E1 a été rencontrée chez 6 individus, l'erreur E2 chez 5, etc.

On convient d'appeler l'effectif de la variable Ei, que l'on note Ni, le nombre d'individus ayant commis l'erreur Ei. De même Nij représente l'effectif de $Ei \cap Ej$, c'est-à-dire le nombre d'individus qui ont commis conjointement les erreurs Ei et Ej.

A) Inclusions des erreurs

L'idée est de hiérarchiser les erreurs selon le principe suivant : « En considérant deux erreurs Ei et Ej telles que le nombre d'individus qui ont commis l'erreur Ei est inférieur au nombre d'individus qui ont commis l'erreur Ej, Ei est incluse dans Ej avec un taux de t % si le nombre d'individus qui ont commis l'erreur Ei et Ej conjointement représente t % du nombre total de ceux qui ont commis Ei ». Comme l'inclusion n'est pas souvent totale, le terme de quasi-inclusion convient mieux, mais nous parlerons d'inclusion en précisant le taux pour alléger l'expression.

En d'autres termes, si $\mathrm{Ni} < \mathrm{Nj}$, alors $\mathrm{Ei} \subset \mathrm{Ej}$ avec un taux de $\dfrac{\mathrm{Nij}}{\mathrm{Ni}}$.

Cette hiérarchie nous indique d'une part, les erreurs plus fréquentes que d'autres, et d'autre part, la possibilité de corriger parfois Ej en corrigeant simplement les Ei qu'elle renferme. Exemple : dans la résolution de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ qui admet deux solutions, on désigne par

E1 : l'erreur dans le calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$,

E2 : l'erreur dans l'expression des solutions $Xi = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$,

E3 : l'erreur dans l'expression de l'ensemble des solutions.

Il va de soi que l'on s'attend aux inclusions : $E_1 \subset E_2 \subset E_3$ qui signifient que l'erreur E_3 est plus fréquente que E_2 qui est elle-même plus fréquente que E_1 et que la correction de l'erreur E_3 passe par celle de E_1 et E_2. De là, on peut évidemment en déduire les questions plus difficiles que d'autres, etc. Si une question connaît plus d'erreurs qu'une autre, c'est qu'elle est plus difficile dans la plupart des cas.

1) Croisement des variables Ei

	E1	E2	E3	E4	E5	Total
E1		4	3	1	4	6
E2			3	2	2	5
E3				1	2	4
E4					1	3
E5						7
Total						

Ce tableau donne le nombre Nij d'individus qui ont commis les erreurs Ei et Ej conjointement. Ainsi, $N_{12} = 4$, c'est-à-dire 4 individus ont commis les erreurs E1 et E2 conjointement. Nous remarquons que $N_4 < N_3 < N_2 < N_1 < N_5$ ce qui autorise à chercher les taux des inclusions : $E_4 \subset E_3 \subset E_2 \subset E_1 \subset E_5$.

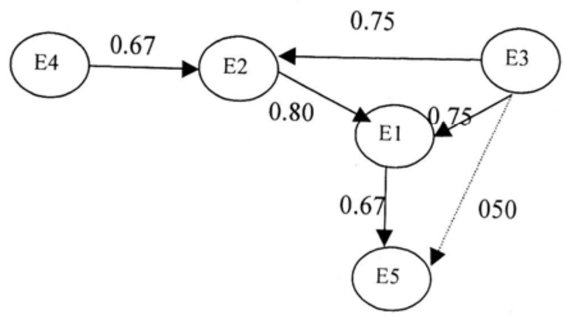
2) Rapports des Nij aux Ni

Dans le tableau qui suit, nous présentons les rapports $\dfrac{\mathrm{Nij}}{\mathrm{Ni}}$ (ou pourcentages) lorsque $\mathrm{Ni} < \mathrm{Nj}$.

	E1	E2	E3	E4	E5
E1		4/5 ou 80%	3/4 ou 75%	1/3 ou 33%	4/6 ou 67%
E2			3/4 ou 75%	2/3 ou 67%	2/5 ou 40%
E3				1/3 ou 33%	2/4 ou 50%
E4					1/3 ou 33%

3) Inclusions

À partir du tableau du 2), on peut par exemple construire le graphe des inclusions au seuil faible de 50 % comme suit :



4) Interprétation

L'ordre dans ces inclusions montre que E5 est une erreur plus fréquente que E1, qui est elle-même plus fréquente que E2, E3 et E4.

Ainsi, 67 % des individus qui ont commis l'erreur E1 ont aussi commis l'erreur E5.

Remarquons des transitivités comme « E3 est incluse dans E1 avec un taux de 75 %, E1 est incluse dans E5 avec un taux de 67 %, et E3 incluse dans E5 avec un taux de 50 % ».

(Voir aussi l'annexe).

B) Regroupement des élèves selon les erreurs commises (Méthode de Gras)

L'objectif est de regrouper les élèves selon leur degré de ressemblance dans les erreurs commises.

Choix d'une distance :

En notant

Mij : le nombre d'échecs communs aux individus Ii et Ij pour N items,

Rij : le nombre de réussites communes pour N items,

on peut donner la priorité aux échecs et considérer la similarité entre deux individus Ii et Ij comme

$$s(\mathrm{Ii}, \mathrm{Ij}) = \frac{\mathrm{Mij}}{\mathrm{N}}.$$

Si l'on donne la priorité aux réussites, on pose

$$s(\mathrm{Ii}, \mathrm{Ij}) = \frac{\mathrm{Rij}}{\mathrm{N}}.$$

On peut également considérer un indice symétrique en posant

$$s(\mathrm{Ii}, \mathrm{Ij}) = \frac{\mathrm{Mij} + \mathrm{Rij}}{\mathrm{N}}.$$

On définit alors une distance entre Ii et Ij par

$$d(\mathrm{Ii}, \mathrm{Ij}) = 1 - s(\mathrm{Ii}, \mathrm{Ij}) \in [0,1].$$

$$s(\mathrm{Ii}, \mathrm{Ij}) = \frac{\mathrm{Mij}}{\mathrm{N}}.$$

Ici, $\mathrm{N} = 5, d(\mathrm{Ii}, \mathrm{Ij}) \in [0,1]$.

Considérons d'abord le croisement des lignes relatives aux individus comme suit :

	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10
I1		1	2	**3**	3	1	2	3	2	1
I2			1	1	0	1	1	1	1	1
I3				1	2	0	2	1	0	0
I4					2	1	1	2	2	1
I5						0	2	2	1	0
I6							0	1	1	1
I7								2	1	0
I8									2	1
I9										1
I10										

On peut passer maintenant au calcul des rapports $\frac{\mathrm{Mij}}{\mathrm{N}}$, mais remarquons que deux individus Ii et Ij sont proches si $d(\mathrm{Ii}, \mathrm{Ij})$ est petite, ce qui revient à dire que $d(\mathrm{Ii}, \mathrm{Ij})$ ou encore Mij est grand. Ceci nous laisse travailler uniquement avec le tableau ci-dessus en conservant seulement le numérateur de *t* comme fait Gras en cas d'ex-æquo, on conserve le premier regroupement possible dans l'ordre de lecture du tableau de gauche à droite et de haut en bas.

Hiérarchie au niveau 1 :

Ainsi, au niveau 1, on rassemble I1 et I4, car M_{14} est le plus élevé en lisant le tableau de gauche à droite et de haut en bas.

Distance entre deux groupes G1 et G2 d'élèves :

On peut définir une distance entre deux groupes d'élèves G1 et G2 de plusieurs manières :

- $d(G1,G2) = \inf_{A \in G1,\, B \in G2} d(A, B)$, cet algorithme considère la plus petite distance entre les élèves de G1 et les élèves de G2 (lien minimum) ;
- $d(G1,G2) = \sup_{A \in G1,\, B \in G2} d(A, B)$ (lien maximum) ;
- moyenne des distances respectives entre les éléments de G1 et ceux de G2 (lien moyen) ;
- vraisemblance du lien de Lerman.

Ici, on retient le lien minimum, ce qui revient à chercher Mij le plus grand.

En cas d'ex-aequos, on réunit préférentiellement des éléments isolés et on place en dernière ligne du tableau, la dernière classe formée.

	I2	I3	I5	I6	I7	I8	I9	I10	I1-I4
I2		1	0	1	1	1	1	1	1
I3			2	0	2	1	0	0	2
I5				0	2	2	1	0	**3**
I6					0	1	1	1	1
I7						2	1	0	2
I8							2	1	3
I9								1	2
I10									1

Hiérarchie au niveau 2 :

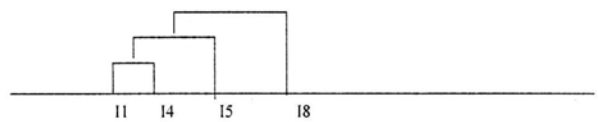
On réunit (I1, I4) et I5, on obtient :

On a alors le nouveau croisement suivant :

	I2	I3	I6	I7	I8	I9	I10	I1-I4-I5
I2		1	1	1	1	1	1	1
I3			0	2	1	0	0	2
I6				0	1	1	1	1
I7					2	1	0	2
I8						2	1	**3**
I9							1	2
I10								1

Hiérarchie au niveau 3 :

On réunit (I1, I4 ,I5) et I8, on obtient :

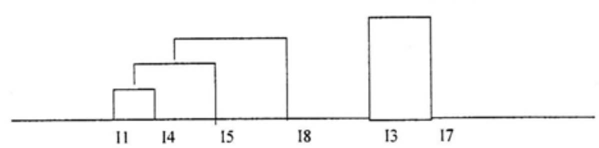


Nouveau croisement :

	I2	I3	I6	I7	I9	I10	I1-I4-I5-I8
I2		1	1	1	1	1	1
I3			0	**2**	0	0	2
I6				0	1	1	1
I7					1	0	2
I9						1	2
I10							1

Hiérarchie au niveau 4 :

On réunit I3 et I7, on obtient :

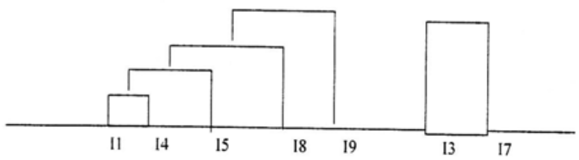


Nouveau croisement :

	I2	I6	I9	I10	I1-I4-I5-I8	I3-I7
I2		1	1	1	1	1
I6			1	1	1	0
I9				1	**2**	1
I10					1	0
I1-I4-I5-I8						2

Hiérarchie au niveau 5 :

On réunit I1-I4-I5-I8 et I9, on obtient :

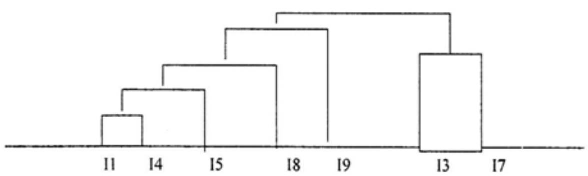


Nouveau croisement :

	I2	I6	I10	I3-I7	I1-I4-I5-I8-I9
I2		1	1	1	1
I6			1	0	1
I10				0	1
I3-I7					**2**
I1-I4-I5-I8-I9					

Hiérarchie au niveau 6 :

On réunit I1-I4-I5-I8-I9 et I3-I7, on obtient :

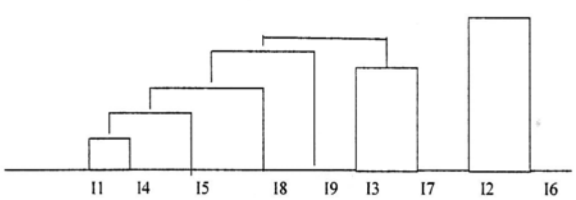


Nouveau croisement :

	I2	I6	I10	I1-I4-I5-I8-I9- I3-I7
I2		**1**	1	1
I6			1	1
I10				1
I1-I4-I5-I8-I9-I3-I7				

Hiérarchie au niveau 7 :

On réunit I2 et I6, on obtient :

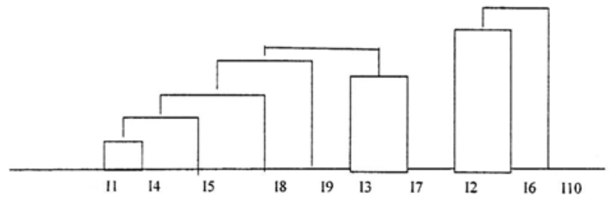


Nouveau croisement :

	I2-I6	I10	I1-I4-I5-I8-I9- I3-I7
I2-I6		**1**	1
I10			1
I1-I4-I5-I8-I9-I3-I7			

Hiérarchie au niveau 8 :

On réunit I2 -I6 et I10, on obtient le graphe suivant :

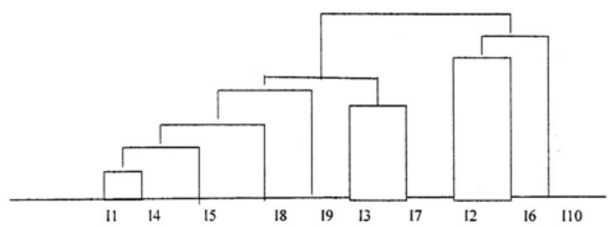


Nouveau croisement :

	I2-I6- I10	I1-I4-I5-I8-I9- I3-I7
I2-I6- I10		1
I1-I4-I5-I8-I9-I3-I7		

Hiérarchie au niveau 9 :

On réunit I2 -I6-I10 et I1-I4-I5-I8-I9- I3-I7, on obtient le graphe suivant :



Commentaire :

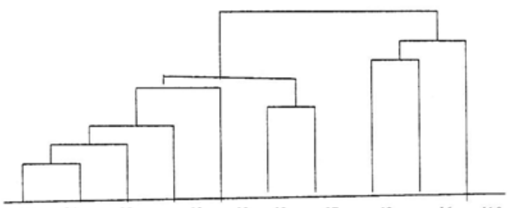
Il est souvent intéressant de chercher les erreurs qui contribuent à la formation d'un groupe.

Quelques contraintes :

- Les erreurs n'ont pas toutes la même importance ;
- Les erreurs sont souvent conditionnées et hiérarchisées ;
- Les élèves ne commettent pas forcément les mêmes erreurs ;
- Certaines erreurs ne sont pas significatives.

Récapitulation :

En croisant les individus du graphe précédent avec les erreurs commises, nous obtenons le schéma suivant que nous allons commenter.



	I1	I4	I5	I8	I9	I3	I7	I2	I6	I10
E1	X	X	X	X	X		X			
E2	X		X	X		X	X			
E3	X	X	X			X				
E4						X	X	X		
E5	X	X		X	X			X	X	X

Commentaire :

Les élèves I1 et I4 ont en commun les erreurs E1, E3 et E5 ; ils nécessitent donc une activité qui vise le renforcement aux concepts qui ont fait l'objet de ces erreurs.

Ainsi, E1, E3 et E5 ont plus contribué à la formation du groupe G1 = I1 – I4.

I5 joint G1 pour sa ressemblance avec I1 aux erreurs E1, E2 et E3 et avec I4 aux erreurs E1 et E3. I5 forme donc avec G1 un deuxième groupe G2.

De même, I8 joint G2 et forme avec lui un groupe G3 pour sa ressemblance avec I1 aux erreurs E1, E2 et E5, avec I4 aux erreurs E1 et E5 et avec I5 en E1 et E2.

De même, I9 forme le groupe G4 avec G3 pour les erreurs E1 et E5. I9 est loin dans ce groupe pour n'avoir que peu d'erreurs contrairement à I4 par exemple.

I3 et I7 se sont réunis en formant un autre groupe G5 isolé de G4 à partir du quatrième niveau. I3 et I7 ont E2 et E4 comme erreurs communes et, ce qui les associe à G4 au quatrième niveau est E1, E2 et E3. G4 et G5 forment au niveau 6 un groupe G6.

I2, I6 et I10 ont en commun E5 et forment ainsi un groupe G7 lié à G6 au dernier niveau.

Remarquons que G4 a aussi pour caractéristique l'absence de l'erreur E4 qui caractérise G5.

Soit Ai l'activité obligatoire que doivent traiter les élèves qui ont commis l'erreur Ei. Alors,

A1 concerne : I1, I4, I5, I7, I8 et I9,

A2 concerne : I1, I3, I5, I7 et I8,

A3 concerne : I1, I3, I4 et I5,

A4 concerne : I2, I3 et I7,

A5 concerne : I1, I2, I4, I6, I8, I9 et I10.

Si l'on groupe les élèves pour chaque activité en classe, on voit par exemple que I1 doit appartenir à 4 groupes. Il faut donc attendre qu'un groupe d'élèves termine son activité pour former un autre ce qui est long et fastidieux. Il est alors important de grouper les élèves comme l'indique la hiérarchie. Exemple, ne former que 3 groupes isolés d'élèves : G4, G5 et G7.

G4 doit traiter A1, A2, A3 et A5.

G5 doit traiter A1, A2, A3 et A4.

G7 doit traiter A4 et A5.

Si un élève est affecté à un groupe devant traiter une activité qu'il a déjà réussie, il peut servir de « leader » et participe à l'encadrement de ses camarades de groupe. Par exemple, I9 est l'élève qui a commis le moins d'erreurs dans le groupe G4 ; il peut aider ses camarades aux activités A2, A3 et A4.

Conclusion

L'*Analyse hiérarchique des similarités* permet de grouper les individus suivant leurs degrés de ressemblance, ce qui facilite la gestion des tâches et activités les concernant. On peut ainsi former des groupes d'élèves ayant les mêmes problèmes d'apprentissages ou encore ayant acquis un certain niveau pour passer au suivant.

L'*Analyse implicative* établit des liens entre les variables statistiques en vue d'étudier l'influence des unes sur les autres. On peut parfois remédier à une ou plusieurs situations en traitant seulement celle dont elles dépendent et le graphe implicatif peut donner une idée sur la priorité à adopter dans l'exécution d'un programme pour en assurer un enchaînement convenable.■

ANNEXE

Résultats obtenus avec le logiciel CHIC

1) Calcul initial pour les inclusions et les implications

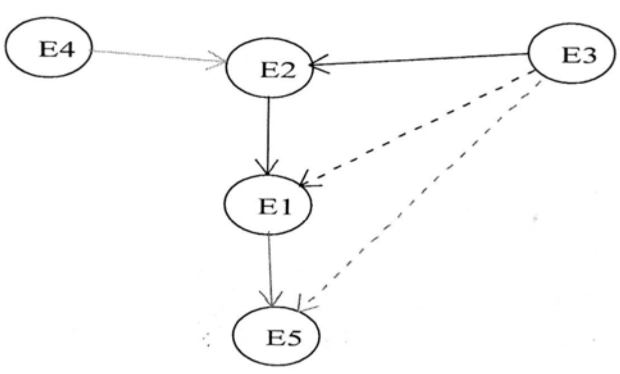
a) Tableau de données

	E1	E2	E3	E4	E5
I1	1	1	1	0	1
I2	0	0	0	1	1
I3	0	1	1	1	0
I4	1	0	1	0	1
I5	1	1	1	0	0
I6	0	0	0	0	1
I7	1	1	0	1	0
I8	1	1	0	0	1
I9	1	0	0	0	1
I10	0	0	0	0	1

b) Graphe inclusif des erreurs Ei

Nous obtenons un graphe identique à celui que nous avons construit à la main.

- E2 est incluse dans E1 avec un seuil de 95 ;
- E3 est incluse dans E2 (et dans E1 par transitivité) avec un seuil de 94 ;
- E4 est incluse dans E2 avec un seuil de 92 ;
- E1 et E3 sont incluses dans E5 avec un seuil de 82.



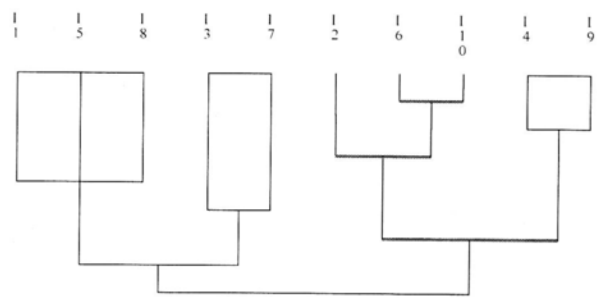
Graphe inclusif : C:\CHIC.CV\Exemple traité avec CHIC.csv 95 94 92 82

2) Groupement des individus

a) Tableau de données

	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10
E1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0
E2	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0
E3	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
E4	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
E5	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1

b) Arbre de similarité



Arbre de similarité : C:\CHIC.CV\Groupement des individus.csv

Ce graphe donne deux super groupes,
G_A = I1 - I5 - I8 - I3 - I7 et G_B = I2 - I6 - I10 - I4 - I9
que l'on peut également fractionner en deux groupes chacun ce qui donne :

G'1 = I1 - I5 - I8
G'2 = I3 - I7
G'3 = I2 - I6 - I10
G'4 = I4 - I9

Nous remarquons que le logiciel a juste partagé notre groupe G4 construit à la main en deux sous-groupes G'1 et G'4.

Note

[1] Cité par Gras dans (11).

Références bibliographiques

Thiebault, A. (1988). *La logique des erreurs*. I.R.E.M. de Reims.

Larher, A. (1991). *Implication statistique et applications à l'analyse de démarches de preuve mathématique*. Thèse de l'Université de Rennes 1, Mathématiques et Applications.

CHIC : *Classification hiérarchique implicative et cohésive*, Université de Rennes 1, Institut de mathématique, Association pour la recherche en didactique des mathématiques (ARDM).

Bidar, H. (1995-1996). *Les erreurs en mathématiques et conceptions des enseignants sur l'apprentissage*. Rabat, Centre de formation des inspecteurs de l'enseignement secondaire.

Lerman, I. C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données*. Paris, Dunod.

Lerman, I. C. (1977). Formal Analysis of a General Notion of Proximity Between Variables. In Proceedings « Congrès européen des statisticiens, Grenoble », sept. 1976, North Holland.

Bailleul, M. (1995). Pourquoi s'intéresser aux représentations de l'enseignement des mathématiques chez les professeurs de mathématiques. Actes du colloque *Méthodes d'analyses statistiques multi-dimensionnelles en didactique des mathématiques,* organisé à l'IUFM de Caen du 27 au 29 janvier 1995.

Boutéglifine, O. (2002). *Techniques de regroupement des élèves*. Mons, Ecole Normale, Hautes Écoles de la Communauté française.

Boutéglifine, O. (2001). *Similarité et regroupement hiérarchique*. Agadir, Délégation du MEN.

Gras, R. et Totohasina, A. (1993). Conceptions d'élèves sur la notion de probabilité conditionnelle révélées par une méthode d'analyse des données : implication, similarité, corrélation. IRMAR de Rennes.

Gras, R. *L'analyse statistique implicative*. IREM de Rennes.

Gras, R. et Ratsimba-Rajohn, H. *Analyse non symétrique de données par l'implication statistique*.

Gras, R. (1995). *Traitement « à la main » de tableaux de données par des méthodes classificatoires*. Actes de l'Université d'été « Méthodologie d'analyse de systèmes d'observation et d'évaluation de l'enseignement des mathématiques ; leurs retombées sur l'enseignement ». Antipolis, Centre International de Valbonne-Sophia.

Roland Charnay, R. *Les enseignants de mathématiques et les erreurs de leurs élèves.* Paris, Équipe didactique des mathématiques INRP.

Concours de l'Association mathématique du Québec 2004
Ordre collégial

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note : *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

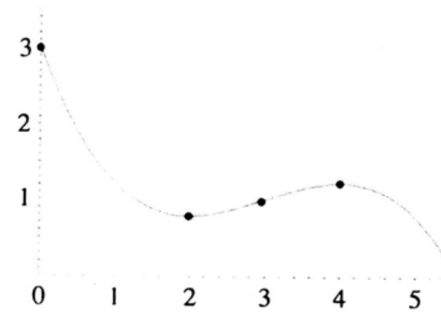
QUESTION 1 – Le polynôme du chimiste

Pour simuler adéquatement une expérience, un chimiste a besoin d'un polynôme du troisième degré,

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

possédant un minimum relatif en $x = 2$, un maximum relatif en $x = 4$ et passant par les points $(0, 3)$ et $(3, 1)$, (voir figure).

Quel est ce polynôme ?



Esquisse de solution

Les conditions $p(0) = 3$, $p'(2) = 0$, $p(3) = 1$, $p'(4) = 0$ correspondent au système d'équations

$$\begin{aligned} d &= 3 \\ 12a+4b+c &= 0 \\ 27a+9b+3c+d &= 1 \\ 48a+8b+c &= 0. \end{aligned}$$

Résolvant le système, on trouve

$$a=-\frac{1}{9},\, b=1,\, c=-\frac{8}{3},\, d=3.$$

Donc,

$$p(x)=-\frac{1}{9}x^3+x^2-\frac{8}{3}x+3.$$

QUESTION 2 – Le système d'équations tordues

Trouvez une solution du système d'équations

$$\begin{aligned} x_1 + x_2x_3x_4 &= 25 \\ x_2 + x_1x_3x_4 &= 10 \\ x_3 + x_1x_2x_4 &= 14 \\ x_4 + x_1x_2x_3 &= 11 \end{aligned}$$

sachant que $x_1 = 1$.

Esquisse de solution

Soit $P = x_1x_2x_3x_4$. Multipliant la i^e équation par x_i, pour $i = 1, 2, 3, 4$, on obtient

$$\begin{aligned} x_1^2 + P &= 25x_1 \quad (1) \\ x_2^2 + P &= 10x_2 \quad (2) \\ x_3^2 + P &= 14x_3 \quad (3) \\ x_4^2 + P &= 11x_4 \quad (4)\,. \end{aligned}$$

Ainsi, $p = 24$ car $x_1 = 1$. En substituant dans (2),(3),(4) on trouve $x_2^2 - 10x_2 + 24 = 0$, $x_3^2 - 14x_3 + 24 = 0$, $x_4^2 - 11x_4 + 24 = 0$. En résolvant ces équations, on trouve 8 solutions (x_2, x_3, x_4) ; soient $x_2 = 4$ ou 6, $x_3 = 2$ ou 12, et $x_4 = 3$ ou 8. La seule qui satisfait $x_1x_2x_3x_4 = 24$ est $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

QUESTION 3 - Une question d'irrationnalité

Considérons l'équation $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$, pour des valeurs de t réelles strictement positives.

a) Montrez qu'aucun polynôme $y(t)$ ne peut satisfaire cette équation.

b) Montrez qu'aucune fonction rationnelle $y(t)$ c'est-à-dire $y(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$ où $f(t), g(t)$ sont des polynômes, ne peut satisfaire cette équation.

Esquisse de solution

a) La dérivée d'un polynôme est un polynôme et $\frac{1}{t}$ n'est pas un polynôme.

b) Supposons $y(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$ une fonction rationnelle sous forme irréductible, telles que $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$.

Disons

$$g(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0\,,$$

et

$$f(t) = bt^m + b_{m-1}t^{m-1} + \ldots b_0\,,$$

deux polynômes premiers entre eux, i.e. sans facteur commun.

On obtient

$$\frac{\frac{df}{dt}g - f\frac{dg}{dt}}{g^2} = \frac{1}{t}$$

d'où

$$\begin{aligned} t\left(\frac{df}{dt}g - f\frac{dg}{dt}\right) &= g^2 \\ t((bmt^{m-1} + \ldots + b_1)(t^n + \ldots + a_0) & \\ -(bt^m + \ldots + b_0)(nt^{n-1} + \ldots + a_1)) &= t^{2n} + \ldots \\ t(b(m-n)t^{m+n-1} + \ldots) &= t^{2n} + \ldots \\ b(m-n)t^{m+n} + \ldots &= t^{2n} + \ldots \end{aligned}$$

En comparant les degrés, on aurait : si $m - n \neq 0$, alors $m + n = 2n$ et $m = n$, ce qui est exclu. Mais, si $m - n = 0$, alors $m = n$ et les degrés ne peuvent être égaux, ce qui ne pourrait être le cas non plus.

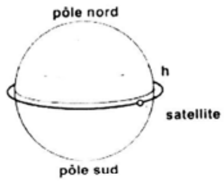
Ainsi, aucune fonction rationnelle ne peut satisfaire l'équation.

N.B. Cette équation définit la fonction logarithmique.

QUESTION 4 – Le satellite autour de l'équateur

Un satellite météorologique fait plusieurs fois par jour le tour de la Terre en restant dans le plan de l'équateur. Son orbite est un cercle dont le centre est le centre de la Terre. À quelle distance h, par rapport au sol, le satellite doit-il être de façon à ce que l'anneau des points visibles sur la Terre (zone grise sur la .figure) à partir du satellite ait une aire de 30 % de celle de la Terre.

Note : On suppose que la Terre est une sphère de rayon R et on demande d'exprimer la réponse sous la forme $h = kR$ où k est un nombre à déterminer.



Esquisse de solution

L'aire d'une surface de révolution pour la courbe $y = f(x)$ tournant autour de l'axe des x pour x allant de a à b est

$$2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(f'(x))^2}dx \ .$$

Pour $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} = a - c, b = c,$ on a

$$f'(x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \ ;$$

on a

$$2\pi \int_{-c}^{c} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx$$

$$= \ 2\pi \int_{-c}^{c} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx = 4\pi RC.$$

On veut donc $\dfrac{4\pi RC}{4\pi R^2} = \dfrac{3}{10}$ c'est-à-dire $\dfrac{C}{R} = \dfrac{3}{10}$.

D'après la figure (où S est le satellite), on a

$$\frac{3}{10} = \frac{C}{R} = \sin\alpha.$$

Mais,

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+h} = \frac{R}{R+kR} = \frac{1}{1+k}.$$

Donc,

$$\frac{1}{1+k} = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{10}\right)^2}$$

D'où l'on tire

$$k = \frac{10\sqrt{91} - 91}{91}.$$

QUESTION 5 – Mise en plis à s'arracher les cheveux

Plions en deux une feuille de papier rectangulaire infiniment mince, soit selon un pli horizontal, soit selon un pli vertical. Répétons ceci un certain nombre de fois toujours en pliant en deux au choix et indépendamment des plis précédents soit selon un pli horizontal, soit selon un pli vertical. Nous obtenons ainsi un rectangle de papier plié. Avec une paire de ciseaux, coupons en deux ce rectangle au choix et indépendamment des plis effectués précédemment, soit selon une coupure horizontale, soit une coupure verticale.

Pour illustrer cette expérience, si nous plions premièrement selon un pli vertical et ensuite selon un pli horizontal, nous aurons après avoir coupé horizontalement notre rectangle, trois morceaux de papier. Par contre, si nous plions trois fois selon des plis verticaux et coupons ensuite notre rectangle verticalement, nous aurons neuf morceaux de papier.

a) Peut-on obtenir à l'aide de cette expérience exactement 100 morceaux de papier ? Si oui, expliquez comment ? Si non, expliquez pourquoi ?

b) Peut-on obtenir à l'aide de cette expérience exactement 1025 morceaux de papier ? Si oui, expliquez comment ? Si non, expliquez aussi pourquoi ?

Esquisse de solution

À chaque fois que nous plions la feuille de papier selon un pli vertical et que nous regardons les bandes verticales de papier que séparent les plis verticaux ainsi formés, celles-ci doublent. Ces bandes verticales ne sont pas modifiées lorsque nous plions le rectangle selon un pli horizontal. Conséquemment, si nous plions au cours de notre expérience le rectangle v fois selon des plis verticaux, alors il y aura 2^v bandes verticales de papier que séparent les plis verticaux ainsi formés.

De même, si nous plions au cours de notre expérience le rectangle h fois selon des plis horizontaux, alors il y aura 2^h bandes horizontales de papier que séparent les plis horizontaux ainsi formés.

Maintenant, si nous coupons verticalement notre rectangle de papier plié, cette opération correspondra à couper chacune des bandes verticales que séparent les plis verticaux formés par notre expérience en deux. Il y aura donc 2^v+1 morceaux de papier. Similairement, si nous coupons horizontalement notre rectangle de papier plié, cette opération correspondra à couper chacune des bandes horizontales que séparent les plis horizontaux formés par notre expérience en deux. Il y aura donc 2^h+1 morceaux de papier.

Nous sommes maintenant en mesure de répondre aux deux questions.

Pour a) nous ne pourrons jamais avoir 100 morceaux de papier parce que 100 n'est pas de la forme 2^n+1.

Pour b) il est possible d'obtenir 1025 morceaux de papier car $1025=1^{10}+1$. Par exemple, si nous plions dix fois selon des plis verticaux et coupons ensuite notre rectangle verticalement, nous aurons 1025 morceaux de papier.

QUESTION 6 – Une belle décomposition en facteurs

Décomposez complètement en facteurs l'expression

$$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3).$$

Esquisse de solution

En développant, on obtient successivement,

$$\begin{aligned}
&3(ac^2+bc^2+a^2c+b^2c+a^2b+ab^2+2abc)\\
&\quad= 3\left[(a+b)c^2+(a+b)^2c+(a+b)ab\right]\\
&\quad= 3(a+b)\left[c^2+(a+b)c+ab\right]\\
&\quad= 3(a+b)(c+a)(c+b).
\end{aligned}$$

Le concours collégial de l'AMQ (2003) a été organisé par une équipe de l'Université du Québec à Montréal (UQÀM), animée par Jacques Labelle en collaboration avec les départements de mathématiques du réseau collégial. L'équipe de l'UQÀM a conçu les problèmes et corrigé les solutions des participants.

L'AMQ remercie Jacques Labelle et son équipe ainsi que les responsables locaux du concours dans les collèges. Enfin, l'AMQ tient à remercier les étudiantes et les étudiants de leur participation et les félicite de leurs succès.

Résultats du concours 2004 — Ordre collégial		
Position	**Nom**	**Institution**
1 et 2	GUAY-PAQUET, Mathieu	CEGEP de Maisonneuve
1 et 2	GAUTHIER-SHALOM, Gabriel	Collège Marianopolis
3	PRZYBYTKOWSKI, Karol	Collège Marianopolis
4	PICARD, Mathieu	CEGEP Saint-Jean-sur-Richelieu
5 à 7	MARCHI, Pascal	CEGEP Bois-de-Boulogne
5 à 7	PLAMONDON, Pierre-Guy	CEGEP Saint-Jean-sur-Richelieu
5 à 7	WANG, Letao	Collège régional Champlain - St-Lambert
8	LI, Chao	Collège régional Champlain - St-Lambert
9 et 10	DANIEL-RIVEST, Jonathan	CEGEP de Maisonneuve
9 et10	GU, Lifeng	Collège Marianopolis
11	WEIGAN-WARR, Frederic	Collège Jean-de-Brébeuf
12	TSE CHUN, Wing	Collège régional Champlain - St-Lambert
13	LIN, Nan	Collège Marianopolis
14 et 15	LAPOINTE-NGUYEN, Damien	Collège Jean-de-Brébeuf
14 et 15	ZHANG, Yang	Collège Marianopolis
16 à 18	BERNARD, Jacques-Olivier	Collège André-Grasset
16 à 18	LOUGHEED, Joshua	Collège Marianopolis
16 à 18	SUN, Siwen	Collège Marianopolis
19 à 21	QUENNEVILLE-BÉLAIR, Vincent	CEGEP Bois-de-Boulogne
19 à 21	YAO, Zeshan	Collège Marianopolis
19 à 21	DYDA, Sergei	Collège régional Champlain - St-Lambert
22 à 25	LEMIEUX, François	CEGEP Bois-de-Boulogne
22 à 25	TREMBLAY, Nicolas	CEGEP de Chicoutimi
22 à 25	MALONEY, Rémi	CEGEP Saint-Jean-sur-Richelieu
22 à 25	CHARTIER, Guillaume	Collège Marie-Victorin
26 à 31	FAWAZ, Samer	CEGEP Bois-de-Boulogne
26 à 31	FORTIN, Simon	CEGEP de Chicoutimi
26 à 31	GOUPIL, Jean-Philippe	CEGEP régional de Lanaudière à Terrebonne
26 à 31	RAYMOND, Annie	Collège André-Grasset
26 à 31	NGUYEN, Érika	Collège Jean-de-Brébeuf
26 à 31	PODARU, Alex	Collège Marianopolis

Concours de l'Association mathématique du Québec 2004 Ordre secondaire

Le concours de l'Association mathématique du Québec n'est pas un examen. Il vise à déceler les meilleurs talents en mathématiques parmi la population étudiante. Pour permettre à ces grands talents de se détacher nettement des autres étudiants, le questionnaire est abondant et varié : plusieurs genres de questions et divers degrés de difficulté. Qu'un étudiant ne se décourage donc pas s'il n'arrive pas à répondre à plus de trois ou quatre questions. Les auteurs du questionnaire s'attendent à ce que les bons étudiants fournissent quatre ou cinq bonnes réponses. Bonne chance !

1. Les vases d'eau salée

Deux vases, A et B, d'une capacité de six litres chacun, contiennent chacun quatre litres d'eau salée, selon les concentrations suivantes : A contient 5 % de sel et B contient 10 % de sel. On vide un litre d'eau salée du vase A dans le vase B puis on mélange. On vide ensuite un litre du vase B dans le vase A, puis on mélange à nouveau. Quelle concentration de sel (en pourcentage) chacun des vases A et B contiennent-ils maintenant ?

Solution

Il suffit de mesurer le volume (en litres) de sel dans chaque vase, en tenant compte aussi du volume d'eau salée, après chaque transfert.

	Eau salée, vase A	Sel, vase A	Eau salée, vase B	Sel, vase B
Début	4	$\frac{1}{5}$	4	$\frac{2}{5}$
Transfert 1	3	$\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{20}$	5	$\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$
Transfert 2	4	$\frac{3}{20}+\frac{1}{5}\times\frac{9}{20}=\frac{6}{25}$	4	$\frac{9}{20}-\frac{1}{5}\times\frac{9}{20}=\frac{9}{25}$

Concentration finale :

$$\text{vase A} := \frac{6}{25}\times\frac{100\%}{4}=6\%,$$

$$\text{vase B} := \frac{9}{25}\times\frac{100\%}{4}=9\%.$$

2. La multiplication de Koallo

Koallo habite le joli village d'Oloko, au Nigéria. Comme il aime les mathématiques, il a remarqué récemment, qu'avec une correspondance appropriée entre les chiffres et les lettres et en multipliant par 11 le nom de son village, il obtenait son nom ! Êtes-vous capable de faire comme lui ?

Plus précisément, pouvez-vous trouver les chiffres différents que doivent représenter les lettres O, L, K et A pour que l'équation

$$\mathbf{OLOKO \times 11 = KOALLO}$$

soit vraie ?

Attention, OLOKO doit être vu comme un nombre de cinq chiffres et non comme le produit $O \times L \times O \times K \times O$. Il en va de même pour KOALLO.

Solution

En effectuant la multiplication de la façon usuelle, on peut écrire :

$$\begin{array}{cccccc} & \mathbf{O} & \mathbf{L} & \mathbf{O} & \mathbf{K} & \mathbf{O} \\ + & \mathbf{O} & \mathbf{L} & \mathbf{O} & \mathbf{K} & \mathbf{O} & \\ \hline \mathbf{K} & \mathbf{O} & \mathbf{A} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{O} \end{array}$$

On désignera les rangs des colonnes en commençant par la droite. La 6^e colonne nous apprend que $\mathbf{K} = \mathbf{O} + 1$ et que la 5^e colonne génère une retenue. Sachant cela et examinant la 5^e colonne, on déduit que

$\mathbf{L} = 9$ et que la 4e colonne génère une retenue et donc que $\mathbf{O} = \mathbf{A} + 1$. On a donc que les nombres **A, O** et **K** sont consécutifs.

Puisque $\mathbf{L} = 9$, les 2e et 3e colonnes ne génèrent pas de retenues et on a $\mathbf{K} + \mathbf{O} = 9$. Cela nous donne $\mathbf{K} = 5$, $\mathbf{O} = 4$ et alors $\mathbf{A} = 3$.

En somme, **OLOKO** $\times$ **11** $=$ **KOALLO** est équivalent à **49 454** $\times$ **11** $=$ **543 994**, seule solution possible.

3. Les nombres de Fibonacci dans des triangles de Pythagore

La suite: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... est la célèbre **suite de Fibonacci**. On voit que si on commence avec 1 et 2, les termes qui suivent sont toujours obtenus comme la somme des deux nombres précédents de la suite. Ainsi, on a $3 = 2 + 1$, $5 = 3 + 2$, $8 = 5 + 3$ .... Un **triangle de Pythagore** est, quant à lui, un triangle rectangle dont la longueur de chacun des côtés est un nombre entier. On remarque alors que si nous prenons quatre termes consécutifs de la suite de Fibonacci, quelques opérations simples nous permettent de former des triangles de Pythagore. Par exemple, soit les quatre nombres 3, 5, 8 et 13, alors un premier côté x du triangle est obtenu en prenant deux fois le produit des deux nombres du milieu ($x = 2 \times 5 \times = 80$), le deuxième côté y est obtenu en multipliant le premier et le dernier des quatre nombres ($x = 3 \times 13 = 39$) et le dernier côté z est égal à la somme des carrés des deux nombres du milieu ($z = 5^2 + 8^2 = 89$). Ainsi, on a bien obtenu un triangle de Phythagore car on a $80^2 + 39^2 = 89^2$.

a) Vérifiez que cela marche aussi si on prend les quatre nombres 2, 3, 5 et 8.

b) Pouvez-vous montrer que cela marche tout le temps ? Plus précisément, si a, b, c et d désignent quatre nombres consécutifs de la suite de Fibonacci et que l'on pose $x = 2bc$, $y = ad$, et $z = b^2 + c^2$, montrer que x, y et z forment les côtés entiers d'un triangle rectangle.

Solution

Si a, b, c et d sont les éléments consécutifs de la suite de Fibonacci, alors $c = a + b$ et $d = b + c$. Donc, $y = ad = (c-b)(c+b) = c^2 - b^2$.

Maintenant, on a

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2bc)^2 + (c^2 - b^2)^2 \\ &= 4b^2c^2 + c^4 - 2b^2c^2 + d^4 \\ &= c^4 + 2b^2c^2 + d^4 \\ &= (c^2 + b^2)^2 \\ &= z^2 \end{aligned}$$

ce qui est la relation de Pythagore, et donc x, y et z sont les trois côtés d'un triangle rectangle, ce qu'on voulait démontrer.

4. Que de chiffres !

Trouvez le nombre de chiffres et la somme des chiffres de l'entier $16^8 \times 5^{30}$.

Solution

$$\begin{aligned} 16^8 \times 5^{30} &= (2^4)^8 \times 5^{30} = 2^{32} \times 5^{30} = 2^2(2 \times 5)^{30} \\ &= 4000000000000000000000000000000, \end{aligned}$$

i.e. 4 suivi de trente zéros ! Il y a donc trente-et-un chiffres et leur somme est... 4 !

5. Et hop ... sans calculatrice !

Expliquer pourquoi l'égalité suivante est vraie.

$$\frac{2004^2}{2003 \times 2005} + \frac{2005^2}{2004 \times 2006} + \frac{2006^2}{2005 \times 2007} + \ldots + \frac{3004^2}{3003 \times 3005}$$

$$= 1001 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{3004} - \frac{1}{3005}\right).$$

Solution

Examinons l'expression $\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$. On a

$$\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

En faisant prendre à n les 1001 valeurs successives 2003, 2004, ... 3003 et en additionnant, on obtient :

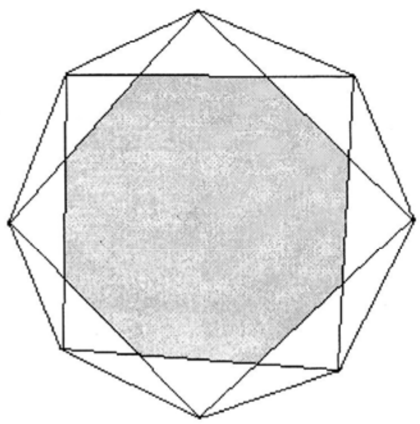
$$\frac{2004^2}{2003 \times 2005} + \frac{2005^2}{2004 \times 2006} + \frac{2006^2}{2005 \times 2007} + \ldots + \frac{3004^2}{3003 \times 3005} =$$

$$1001 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2003} - \frac{1}{2005}\right) + \left(\frac{1}{2004} - \frac{1}{2006}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3002} - \frac{1}{3004}\right) + \left(\frac{1}{3003} - \frac{1}{3005}\right)\right)$$

$$= 1001 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{3004} - \frac{1}{3005}\right)$$

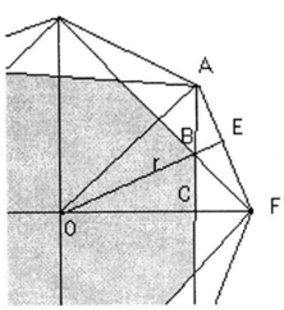
6. L'octogone

Si on relie entre eux les sommets d'un octogone régulier qui ont un sommet voisin en commun, on obtient au centre de la figure un nouvel octogone régulier, décalé et plus petit que le premier (en gris sur le dessin). Si l'aire de l'octogone initial est 1, quelle est l'aire du nouvel octogone ?



Indice : lorsque deux figures sont semblables, le rapport de leurs aires est égal au carré du rapport de leurs côtés homologues.

Solution



Complétons une partie du dessin comme sur la figure ci-contre.

Le rapport des aires entre le grand octogone et le petit (le gris) est donné par $\left(\frac{OA}{r}\right)^2$, où r = OB.

Afin de simplifier, posons pour l'instant $OA = 1$, même si c'est incompatible avec le fait que l'aire totale soit égale à un (car nous ajusterons après et ce qui compte est le rapport entre les valeurs). L'angle ∠AOF vaut 45° puisque la figure est un octogone régulier. Il en va donc de même pour les angles ∠BFC et ∠FBC puisque AC est perpendiculaire à OF. Donc BC = FC, étant les deux côtés égaux d'un triangle isocèle. Les triangles OBC et AFC sont donc congrus par ACA. Donc r = AF. Or, d'après le théorème de Pythagore, on a $AF^2 = CF^2 + AC^2$. Mais puisque ACO est un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse 1, on a, toujours en vertu du théorème de Pythagore, $ac = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

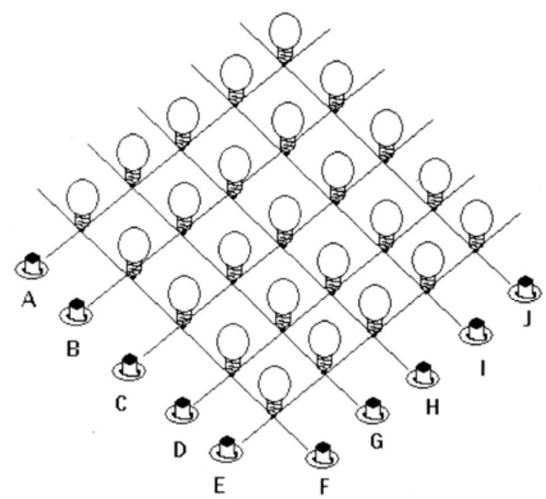
Puisque $CF = 1 - OC = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, on peut maintenant conclure

$$r^2 = AF^2 = CF^2 + AC^2 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 - \sqrt{2} = .585786\ldots$$

ce qui est l'aire du petit octogone.

7. Les ampoules de Raoul

Raoul se confectionne un circuit électrique formé de vingt-cinq ampoules disposées en carrés et de dix interrupteurs, notés de A à J, comme sur le dessin.



S'il appuie sur un interrupteur, alors les cinq ampoules situées sur la ligne de cet interrupteur voient leur état inversé : celles qui sont allumées s'éteignent tandis que celles qui sont éteintes s'allument.

a) Montrer que, quelque soit l'état initial (certaines ampoules peuvent être allumées tandis que d'autres, non) des ampoules, il est toujours possible de manipuler les interrupteurs de telle sorte que, dans chacune des dix rangées correspondantes, il y ait toujours plus d'ampoules allumées qu'éteintes.

les en même temps ? Que votre réponse soit oui ou non, il faut donner la preuve de ce que vous avancez.

Solution

a) Si une rangée contient plus d'ampoules éteintes qu'allumées, alors en appuyant sur l'interrupteur correspondant, on se trouve à augmenter le nombre total d'ampoules allumées dans le circuit. Comme il n'y a que 25 ampoules, il viendra nécessairement un temps où on aura atteint le nombre maximal d'ampoules allumées possible, et donc toutes les rangées contiendront plus d'ampoules allumées qu'éteintes !

c) La réponse est non. Comme la question est un peu complexe, nous donnerons trois solutions possibles.

Solution 1 : il est clair que l'ordre dans lequel on appuie sur les interrupteurs n'importe pas. Par conséquent, s'il existe une solution, il n'y a pas besoin d'appuyer sur un interrupteur donné plus d'une fois, car le fait d'appuyer deux fois sur un interrupteur annule l'effet et ramène à la position qui prévalait avant d'appuyer.

Maintenant, supposons qu'initialement, toutes les ampoules soient allumées sauf l'ampoule du centre, intersection des rangées C et H. Notre but est d'appuyer sur certains interrupteurs de sorte qu'à la fin, toutes les ampoules soient allumées. Clairement, il faudra appuyer sur C ou H, mais pas sur les deux. Comme la situation est symétrique, on peut supposer qu'on appuie sur C. Cela aura pour effet d'allumer l'ampoule du centre mais d'éteindre les quatre autres ampoules sur la ligne C. Pour les rallumer, on devra nécessairement appuyer sur F, G, I et J. Cela éteindra, par exemple, l'ampoule à l'intersection de A et F. Il faut la rallumer en appuyant sur A. Cela éteint l'ampoule à l'intersection de A et H. Pour la rallumer, il faudrait appuyer sur H, mais cela nous est interdit car cela éteindrait l'ampoule du centre !

Solution 2 : partant du fait mentionné dans la solution précédente que l'ordre dans lequel on appuie n'importe pas et qu'on n'appuie qu'une fois ou pas du tout sur chacun des interrupteurs, il y a au plus 2^{10} façon d'appuyer (en fait, il y en a exactement 2^9 puisque le fait d'appuyer sur tous les interrupteurs sauf un est équivalent à appuyer sur l'interrupteur oublié). De plus, chaque modification faite est inversible, car il suffit d'appuyer à nouveau sur les mêmes touches pour revenir à la position initiale. Comme il y a 2^{25} configurations possibles pour les ampoules, il y en a forcément qui n'auront pas de solutions.

Solution 3 : il suffit d'examiner ce qu'il se passe sur un sous-carré de deux lignes et deux colonnes pour réaliser qu'il n'est pas possible d'allumer toutes les ampoules quand on part d'une ampoule allumée et trois éteintes (ou l'inverse). On peut même démontrer plus : il y a une solution à la configuration initiale si et seulement si aucune sous-configuration de deux lignes et deux colonnes ne contient trois ampoules dans un état et une dans l'autre état. ■

Les problèmes et le corrigé du Concours de l'Association mathématique du Québec de l'an 2004 ont été conçus par M. Matthieu Dufour, Mme Véronique Hussin (présidente), M. Gilbert Labelle et M. Jean M. Turgeon.

Il convient de remercier la *Société mathématique du Canada* qui nous a généreusement accordé une subvention de fonctionnement encore cette année.

Résultats du concours 2004 — Ordre secondaire		
Rang	**Nom**	**Institution**
1er	DRIANOV, Peter	École secondaire Sophie-Barat, Montréal
2e	RUO, Nora	École secondaire Georges-Vanier, Montréal
3e	TIAN, Zhe	École secondaire Mont-Royal, Montréal
4e	ZOU, Cheng Long	École secondaire des Sources, Montréal
5e	HUYNH, Kenny	École secondaire Georges-Vanier, Montréal
6e	GU, Ye	École secondaire Antoine-Brossard, Brossard
	SIMARD, Sébastien	Collège St-Louis - Campus Laval
8e	DEMACHEVA, Irina	Collège Français, Montréal
	MARTIN, Vincent	Académie Les Estacades, Cap-de-la-Madeleine
	BRUNET, Thomas	École secondaire de Rochebelle, Québec
	FONTAINE-SPRINGUEL, Nicolas	École secondaire La Magdeleine, La Prairie
	LAURIN, Stéphane	École secondaire La Magdeleine, La Prairie
13e	MINTCHEV, Ivan	Collège Jean-Eudes, Montréal
	NGUYEN, Thi Ngoc Duin	Polyvalente Père Marquette, Montréal
15e	BABENKO, Mikhail	Collège Français, Montréal
16e	POIRIER, Antoine	Collège St-Alexandre, Gatineau
	DAFINOV, Emil Orlinov	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	TRINH, Quoc-Huy	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	BÉRUBÉ, Nicolas	Collège Mont-Saint-Louis, Montréal
	MARIN, Codmita Inlia	École secondaire Mont-Royal, Montréal
21e	DOMOCOS, Gabriel	Collège Beaubois, Pierrefonds
	THIVIÈRGE, Alexandre	Collège Beaubois, Pierrefonds
	CHEN, Lucas Yu-Guang	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	LANDRY, Marie-Ève	Collège Charles-Lemoyne « L'Envol », Longueuil
25e	PARIS-CLOUTIER, Marc-André	Collège St-Alexandre, Gatineau
	BEAUCHAMP-VIEN, Geneviève	Collège Beaubois, Pierrefonds
	MIRFATAHI, Kaven	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	ZAHARIA, Anne Gabrielle	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	XIAO, Hongyu	Collège St-Louis - Campus Lasalle
	CAGELAIS, Chantal	Collège Charles-Lemoyne « L'Envol », Longueuil
	TREMBLAY-SAVARD, Olivier	Collège Charles-Lemoyne « L'Envol », Longueuil
	DENEAULT, Patricia	École St-Jean-Baptiste, Longueuil
	GONTAR, Marina	École St-Jean-Baptiste, Longueuil
	ST-ARNAUD, Thierry	École St-Jean-Baptiste, Longueuil
35e	MICHON, Érik	Collège St-Alexandre, Gatineau
	CIMON, Alexandre	École secondaire d'Iberville, Rouyn-Noranda
	LAO, Yuan Chu Zi	École secondaire Antoine-Brossard, Brossard
	BERGERON, Luc	École secondaire Jacques-Rousseau, Longueuil
	HE, Yifan	Collège St-Louis - Campus Lasalle

André Ross
Louis Charbonneau

La méthode d'Archimède

par André Ross
professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon

Introduction

Démontrer un résultat, c'est intéressant et cela nécessite souvent de l'imagination, mais encore faut-il trouver quoi démontrer. Dans certains cas, il faut peut-être beaucoup plus d'imagination pour trouver quoi démontrer. Ératosthène avait probablement demandé à Archimède comment il s'y prenait pour trouver les propositions qu'il démontrait. En effet, la méthode d'exhaustion est une méthode rigoureuse qui permet de démontrer efficacement des résultats sur les aires et les volumes. Cependant, ce n'est pas une méthode utilisable pour trouver la proposition à démontrer. Les preuves permettent de communiquer les résultats sous une forme que les autres mathématiciens peuvent comprendre et vérifier, mais ce n'est pas en écrivant des preuves que l'on trouve les énoncés des propositions. Ceux-ci doivent être connus avant la construction de la preuve.

Comment Archimède procédait-il pour trouver ses propositions ? Cette question a obtenu réponse en 1906 avec la découverte à Constantinople d'une copie du traité *Méthode* d'Archimède qui était adressé à Ératosthène. Le texte a été découvert sur un palimpseste, c'est-à-dire un parchemin dont la première écriture a été lavée ou grattée et sur lequel un nouveau texte a été écrit (le coût de production des parchemins justifiait le recyclage). Avec le temps, le texte original des palimpsestes réapparaît souvent, ce qui permet une restauration. Le texte original de la *Méthode* avait été lavé au XIII^{e} siècle pour faire place à un texte religieux. Heureusement, la plupart du texte original a pu être restauré, ce qui permet de comprendre comment Archimède est parvenu à certaines de ses découvertes sur le calcul d'aires et de volumes.

Il est intéressant de constater qu'il s'est inspiré de ses travaux sur les leviers pour trouver plusieurs résultats sur les aires et volumes. Sa méthode est basée sur l'idée suivante : pour trouver l'aire d'une figure ou le volume d'un solide, il faut le couper en plusieurs bandes parallèles, ou en plusieurs tranches parallèles, et suspendre mentalement ces bandes, ou ces tranches, à l'extrémité d'un levier de telle sorte qu'elles soient en équilibre avec une figure dont on connaît l'aire ou le volume et le centre de gravité.

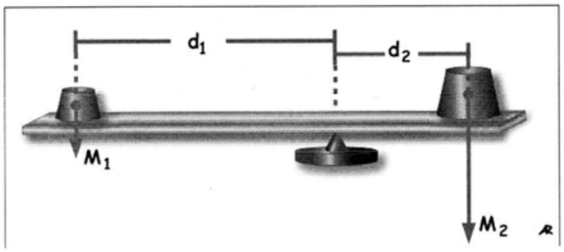
Pour bien saisir l'originalité de cette méthode, nous verrons comment il a comparé l'aire d'un segment de parabole à celle du triangle inscrit et comment il a comparé le volume d'une sphère à ceux d'un cylindre et d'un cône, mais tout d'abord, rappelons certains aspects de son étude des leviers.

Étude des leviers

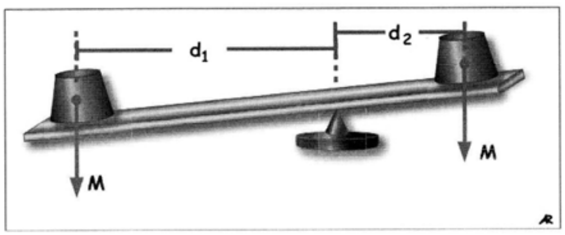
Archimède s'est également intéressé au problème de la manipulation des objets lourds ce qui l'a amené à étudier et classifier les leviers dont il a énoncé les principes. Il a développé plusieurs mécanismes utilisant les poulies, en particulier les catapultes utilisées pour défendre la ville de Syracuse contre les attaques des légions romaines.

Dans son étude des leviers, Archimède adopte une approche analogue à celle de la géométrie en énonçant des principes physiques sous forme de postulats comme suit :

Des masses inégales à des distances proportionnelles sont en équilibre

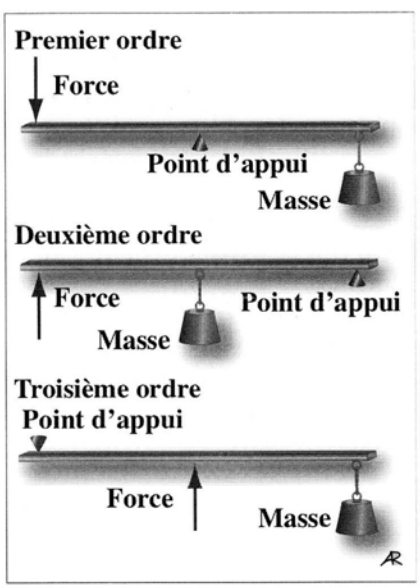


Des masses égales à des distances différentes ne sont pas en équilibre et penchent du côté de la masse qui est à la plus grande distance.



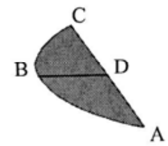
Des masses qui s'équilibrent à des distances égales sont égales.

Archimède n'a pas inventé les leviers, ils étaient utilisés depuis fort longtemps. Il a fait une description mathématique des caractéristiques fondamentales des leviers et a utilisé cette abstraction mathématique pour en démontrer d'autres propriétés. Il y a une grande différence entre l'utilisation d'une technique et la compréhension des principes scientifiques sous-jacents.

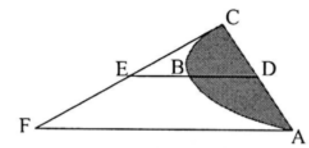


Aire de la parabole

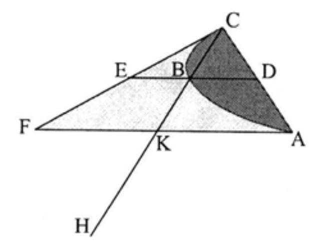
Voyons maintenant comment il a mis en application les principes du levier pour comparer l'aire de la parabole à l'aire du triangle inscrit. Soit un segment de parabole ABC et de diamètre BD (le diamètre de la parabole coupe la corde CA en deux parties égales).



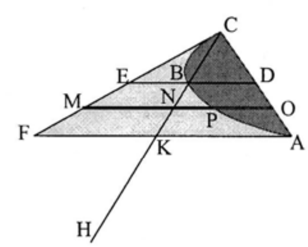
Du point C, il trace la tangente à la parabole et du point A une parallèle au diamètre BD jusqu'à leur point de rencontre F.



Il trace alors la droite CB qui coupe AF en K et qu'il prolonge jusqu'en H de telle sorte que $\overline{CK} = \overline{KH}$ et il prolonge DB jusqu'en E sur CF.



Selon une proposition qu'Archimède attribue à Aristée et à Euclide, $\overline{DB} = \overline{BE}$ puisque CE est tangente au segment de parabole et CD est la demi-longueur de sa corde. Il s'ensuit que CK est la médiane du triangle AFC. Il considère alors que la surface du triangle et celle du segment de parabole sont constituées de bandes parallèles au diamètre de celle-ci. Dans la figure suivante, la bande MO du triangle et la bande OP du segment de parabole sont superposées.



Il cite alors un lemme qu'il a préalablement démontré à l'effet que :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{MO}}{\overline{OP}}.$$

De plus,

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{KN}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{AO}}$$

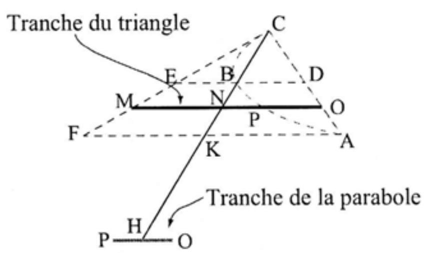
par le théorème de Thalès et $\overline{CK}=\overline{HK}$, par construction. Il peut donc conclure que :

$$\frac{\overline{HK}}{\overline{KN}}=\frac{\overline{MO}}{\overline{OP}}.$$

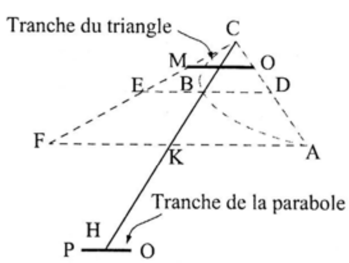
Il utilise alors les principes des leviers. Dans le problème de l'aire du segment de parabole, les masses sont les bandes MO et OP et le levier est le segment CKH où K est le pivot. La proportion

$$\frac{\overline{HK}}{\overline{KN}}=\frac{\overline{MO}}{\overline{OP}}$$

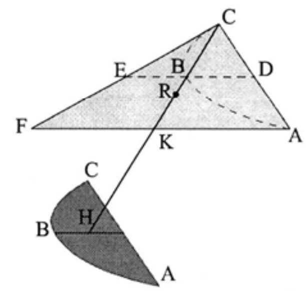
entre les masses et les distances signifie qu'en suspendant la bande OP au point H, elle équilibrera la bande MO suspendue au point N.



De la même façon, chaque tranche de la parabole suspendue au point H équilibrera la tranche correspondante du triangle suspendue en son point d'intersection avec le levier.



Par conséquent, le point K étant le pivot, l'aire de la parabole suspendue au point H par son centre de gravité équilibrera l'aire du triangle suspendu par son centre de gravité sur KC.



Or, ce centre de gravité est en un point R situé au tiers de KC (au deux tiers à partir du sommet C). On peut donc déterminer le rapport de l'aire du triangle AFC sur l'aire du segment de parabole ABC, soit :

$$\frac{\text{Aire du triangle AFC}}{\text{Aire du segment ABC}}=\frac{\overline{HK}}{\overline{KR}}=\frac{3}{1}$$

d'où l'on tire :

$$\text{Aire du segment ABC}=\frac{1}{3}\text{Aire du triangle AFC.}$$

Cependant, l'aire du triangle AFC est quatre fois l'aire du triangle ABC. En effet, les triangles ABD et CBD ont même aire puisque leurs bases sont égales, D étant le point milieu de AD et ils ont même hauteur, la perpendiculaire abaissée de B sur AC. De plus, les triangles EBC et DBC ont même aire puisque B est le point milieu de ED et ils ont même hauteur, la perpendiculaire abaissée du sommet C sur ED. Par conséquent, l'aire du triangle DEC est égale à l'aire du triangle ABC.

De plus, les triangles DEC et AFC sont semblables puisque DE est tracé parallèlement à AF. Puisque D est le point milieu de AC, on a donc $\overline{FA}=2\overline{DE}$.

Puisque les aires de figures semblables sont dans le rapport des carrés de leurs lignes homologues, on obtient que l'aire du triangle AFC est quatre fois l'aire du triangle ABC inscrit dans les segment de parabole. En substituant dans

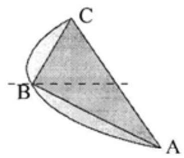
$$\text{Aire du segment ABC}=\frac{1}{3}\text{Aire du triangle AFC}$$

on obtient que :

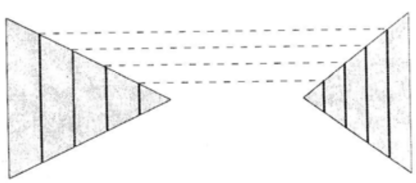
Aire du segment ABC $= \frac{4}{3}$ Aire du triangle ABC.

Archimède obtient alors la proposition à démontrer, soit :

Proposition
L'aire d'un segment de parabole est égale à une fois et un tiers l'aire du triangle inscrit dans ce segment.



Archimède confie avoir suivi cette méthode pour trouver la conjecture sur l'aire de la parabole, mais il n'acceptait pas cette démarche comme preuve et c'est pourquoi il a ensuite démontré ce résultat par la méthode d'exhaustion. Pourquoi n'accepte-t-il pas cette démarche comme preuve ? On peut en illustrer la raison. Considérons la figure suivante dans laquelle apparaissent deux triangles.

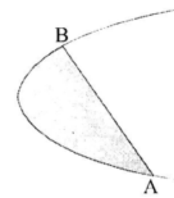


Ces triangles ont manifestement des aires différentes. Cependant, on constate que chaque fois que l'on prend un segment de droite comme tranche de la surface du triangle de gauche, on peut déterminer un segment de droite de même longueur dans le triangle de droite. En suspendant ces tranches aux extrémités d'une balance dont les bras sont de même longueur, on obtient l'équilibre à chaque fois. Ce qui est vrai des tranches ne peut donc se généraliser à toute la surface. Cette situation paradoxale est du même type que le paradoxe d'Achille et la tortue et vient du fait que l'on accepte implicitement la divisibilité infinie de la longueur dans le paradoxe de Zénon et de la surface dans le cas présent. Bonaventura Cavalieri (1598-1647), dans sa méthode des indivisibles, rencontrera la même situation paradoxale.

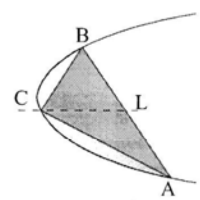
En considérant que la surface des triangles est la somme des tranches, on obtient que les aires des deux triangles sont égales, ce qui n'est pas le cas. La proposition obtenue en comparant l'aire du segment de parabole et le triangle inscrit nous donne un résultat qui peut être faux. Il est important de distinguer la démarche pour échafauder une conjecture et la démarche pour valider ou démontrer celle-ci. Une procédure comme celle des leviers, qui parfois donne des résultats exacts et parfois des résultats erronés, ne peut en aucun cas être une justification suffisante comme preuve de la validité de la proposition obtenue. Par sa méthode d'équilibre des masses, Archimède obtient une conjecture, mais il sait que ce n'est qu'une conjecture et qu'il doit la démontrer. Ce souci est celui d'un grand scientifique.

Démonstration de la proposition

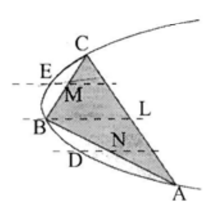
La démarche d'Archimède pour démontrer ce résultat par exhaustion, se résume de la façon suivante. Considérons un segment parabolique AB.



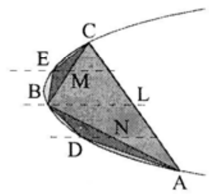
Du milieu L du segment AB, on trace une parallèle à l'axe de la parabole déterminant ainsi un point C.



Par les milieux N et M de AB et BC, traçons des droites parallèles à l'axe de la parabole, déterminant ainsi les points D et E.



Formons les triangles ABD et BCE.



Par les propriétés géométriques de la parabole qu'il a démontrées préalablement, Archimède écrit alors :

$$\Delta ABD + \Delta BCE = \frac{\Delta ABC}{4}$$

En répétant le processus, il obtient que l'aire du segment parabolique est :

$$\begin{aligned} A &= \Delta ABC + \frac{\Delta ABC}{4} + \frac{\Delta ABC}{4^2} + \frac{\Delta ABC}{4^3} + \dots \\ &= \Delta ABC\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots\right). \end{aligned}$$

Il procède ensuite par double réduction à l'absurde. En supposant que la somme des termes à l'intérieur de la parenthèse est plus grande que 4/3 il montre que cela entraîne une contradiction. En supposant que la somme est plus petite que 4/3, cela entraîne encore une contradiction. Par conséquent l'aire du segment parabolique est égale au 4/3 de l'aire du triangle inscrit, soit :

$$A = \frac{4}{3}\Delta ABC .$$

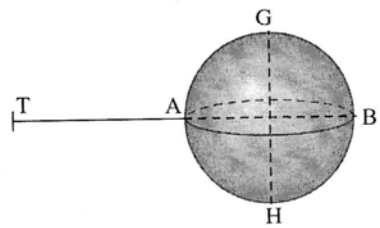
On a maintenant une méthode plus simple pour trouver la somme infinie d'une progression géométrique de cette nature en utilisant les notions de limite et de convergence des séries.

Il a communiqué ce résultat à Dosithée et, en préambule du traité, il écrit :

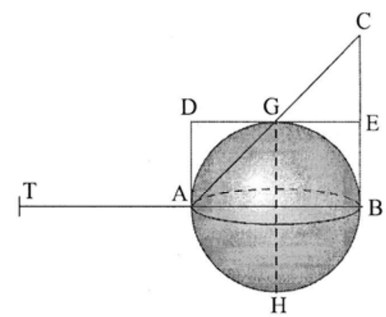
> *Aucun de mes prédécesseurs, n'a encore, que je sache, cherché la quadrature d'un segment délimité par une droite et une parabole, chose que nous avons trouvée maintenant.*

Volume de la sphère

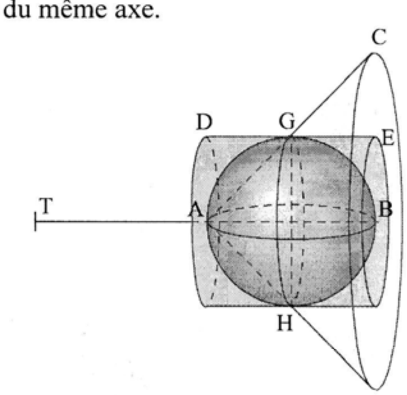
Voyons maintenant comment la méthode du levier peut être utilisée pour trouver le volume de la sphère. Représentons par r le rayon de la sphère et plaçons celle-ci de telle sorte qu'un diamètre AB coïncide avec un axe horizontal et traçons le diamètre perpendiculaire GH.



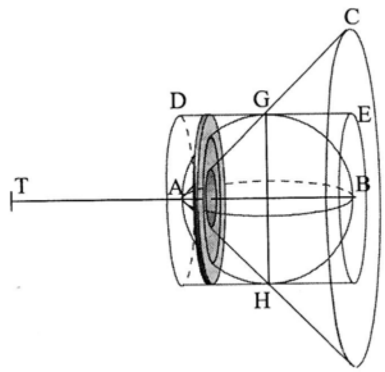
Dans le même plan que le diamètre GH, construisons le rectangle ABED de telle sorte que $\overline{AD} = r$. En prolongeant le segment AG jusqu'à sa rencontre avec le prolongement du côté BE, construisons le triangle ABC.



Imaginons le cylindre engendré par la révolution du rectangle ABED autour de l'axe horizontal TB et le cône engendré par la révolution du triangle ABC autour du même axe.



Coupons ces trois solides en fines tranches d'épaisseur Δx, perpendiculaires à l'axe TB et à une distance x du pôle A que nous utiliserons comme pivot du levier.



Déterminons maintenant le volume de chacune de ces tranches. La tranche du cylindre est un disque dont le rayon est r, son volume est :

$$\Delta V_{\text{cylindre}} = \pi\, r^2\, \Delta x\ .$$

La tranche du cône est un disque dont le rayon est x, son volume est :

$$\Delta V_{\text{cône}} = \pi\, x^2\, \Delta x\ .$$

La tranche de la sphère (figure suivante) est un disque dont le rayon R est tel que :

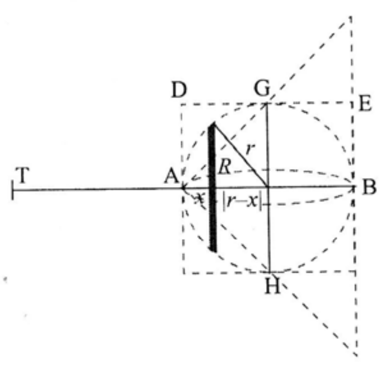
$$r^2 = R^2 + |r - x|^2$$

d'où : $$r^2 = R^2 + r^2 - 2rx + x^2$$

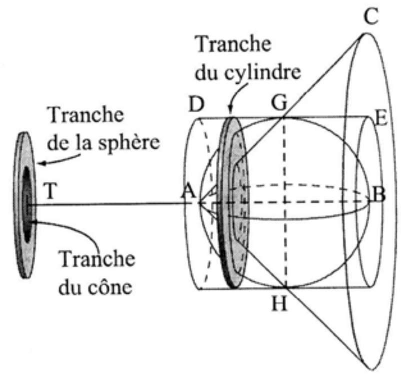
ce qui donne : $$R^2 = 2rx - x^2\ .$$

Le volume de la tranche de la sphère est donc :

$$\Delta V_{\text{sphère}} = \pi\, x(2r - x)\, \Delta x.$$



Suspendons les tranches de la sphère et du cône à l'extrémité T de l'axe où $\overline{\text{TA}} = 2r$.



Le moment d'un volume par rapport à un point étant le produit de ce volume par sa distance du point au centre de gravité du volume, on peut trouver le moment combiné de la tranche de sphère et de la tranche de cône par rapport à A, ce qui donne :

$$\begin{aligned} &[\Delta V_{\text{sphère}} + \Delta V_{\text{cône}}]2r = \\ &[\pi(2rx - x^2)\, \Delta x + \pi x^2\, \Delta x]\, 2r = 4\pi r^2 x\, \Delta x \\ &\qquad = 4x\, \Delta V_{\text{cylindre}}\ . \end{aligned}$$

Le moment combiné de la tranche de sphère et de la tranche de cône est donc égal au moment de la tranche cylindrique dans la position qu'elle occupe, à une distance x du point A. En additionnant les moments de toutes les tranches, on obtient que :

$$2r\,(V_{\text{sphère}} + V_{\text{cône}}) = 4r\, V_{\text{cylindre}}\ .$$

Cependant, le volume du cylindre est le produit de l'aire de sa base, πr^2, par sa hauteur, $2r$, soit $V_{\text{cylindre}} = 2\pi r^3$. Selon un résultat démontré par Eudoxe, le volume d'un cône est le tiers du volume du cylindre de même rayon et de même hauteur, on a donc $V_{\text{cône}} = 8\pi r^3 / 3$. En substituant, on a donc :

$$2r\left[V_{\text{sphère}} + \frac{8\pi r^3}{3}\right] = 8\pi r^4$$

$$V_{\text{sphère}} + \frac{8\pi r^3}{3} = 4\pi r^3$$

$$V_{\text{sphère}} = 4\pi r^3 - \frac{8\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}\ .$$

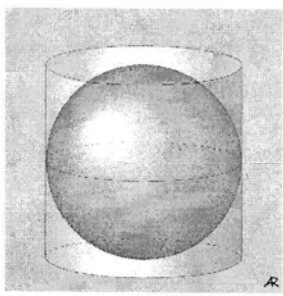
On obtient donc la description du volume de la sphère en fonction de son rayon. Archimède ne procède pas tout à fait de cette façon. Les formules que nous avons utilisées sont des formules modernes. Archimède compare les volume par sa méthode des leviers puis il démontre, par la méthode d'exhaustion, que le résultat obtenu est exact. Il établit le rapport du volume du cylindre sur le volume de la sphère et obtient :

$$\frac{V_{\text{cylindre}}}{V_{\text{sphère}}} = \frac{2\pi r^3}{4\pi r^3/3} = \frac{3}{2}.$$

Il établit le même rapport entre les surfaces du cylindre et de la sphère. Le résultat qu'il obtient s'énonce comme suit :

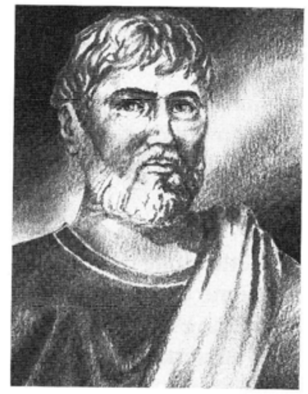
Théorème

Lorsqu'un cylindre est circonscrit à une sphère avec un diamètre égal à celui de la sphère, le volume et la surface du cylindre sont une fois et demie le volume et la surface de la sphère.



Ce théorème fait également l'objet d'une démonstration par exhaustion. Entre les mains habiles d'Archimède, la méthode d'exhaustion a permis d'établir plusieurs résultats intéressants que l'on obtient maintenant avec le calcul intégral. Il a utilisé cette méthode de deux façons : pour calculer une valeur approchée et pour démontrer des formules d'aires et de volumes. Le calcul de π est un exemple du premier type d'utilisation. La démonstration par exhaustion est, en fait, une double réduction à l'absurde. Ainsi, pour montrer que l'aire du cercle est égale à l'aire du triangle dont la hauteur est égale au rayon et la base est égale à la circonférence, il faut montrer que l'aire du triangle ne peut être ni plus grande ni plus petite que celle du cercle. Son idée de décomposer une surface en bandes parallèles et un volume en tranches parallèles sera reprise par Cavalieri dans sa méthode des indivisibles.

Notes biographiques



Mathématicien grec né à Syracuse en Sicile, vers 287 av. J.-C., Archimède est mort en 212, tué par un soldat romain lors de la seconde guerre punique. Sa vie fut entièrement consacrée à la recherche scientifique et ses découvertes sont tellement fondamentales qu'elles ont des retombées dans tous les champs scientifiques.

Il séjourna en Égypte et a peut-être étudié à Alexandrie avec les successeurs d'Euclide. Il correspondait avec Ératosthène qui fut son ami et à qui il communiqua plusieurs de ses découvertes par écrit. On raconte plusieurs anecdotes sur Archimède et la plus célèbre est l'histoire de la couronne du roi Hiéron. Celui-ci, soupçonnant l'orfèvre d'avoir remplacé une partie de l'or par de l'argent demanda à Archimède de trouver comment prouver cette substitution. Selon la légende, il prenait son bain lorsqu'il découvrit comment démontrer la supercherie et, fier de sa découverte, il se serait précipité nu dans la rue en criant : « Eurêka, Eurêka » (j'ai trouvé, j'ai trouvé).

Archimède a écrit plus de dix ouvrages sur différents sujets :

- *Les centres de gravité de parallélogrammes, de triangles et de segments de parabole.*

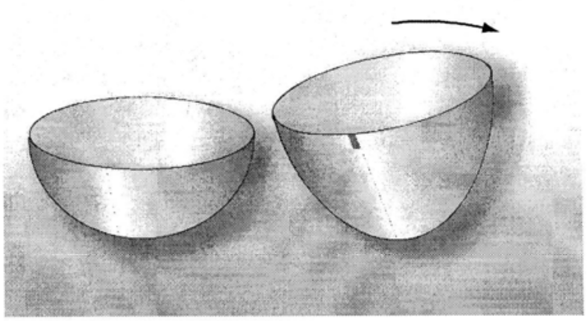
- *La sphère et le cylindre*, traité dans lequel on retrouve les deux résultats suivants :
  - *La surface de la sphère est quatre fois celle d'un grand cercle (cercle dont le diamètre est le même que la sphère).*
  - *Lorsqu'un cylindre est circonscrit à une sphère avec un diamètre égal à celui de la sphère, le volume et la surface du cylindre sont une fois et demie le volume et la surface de la sphère.*

Il était tellement heureux de ce dernier résultat qu'il le fit graver sur sa tombe tout comme la figure de la page précédente.

- *Sur les conoïdes et les sphéroïdes,* essai qui traite des volumes engendrés par des ellipses et des paraboles tournant autour d'un axe de symétrie et des hyperboles tournant autour de l'axe transverse.

- *Sur les corps flottants* qui traite de l'équilibre d'un segment de paraboloïde de révolution flottant dans un liquide et du principe de l'hydrostatique d'Archimède.

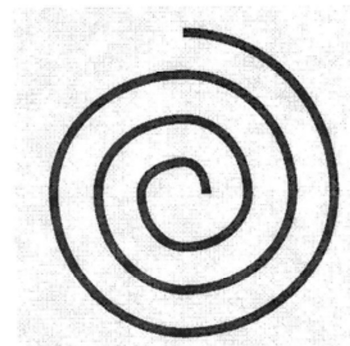
  Cette étude débouche tout naturellement sur le problème de l'équilibre des coques de navire. Le problème est le suivant : si la paraboloïde est penchée d'un certain nombre de degrés, réussira-t-elle à se relever ?



- Un traité, ayant pour titre *Méthode*, où il dévoile quelques-unes des méthodes de recherche qui lui ont permis de trouver plusieurs de ses théorèmes.

  C'est dans ce traité, adressé à Ératosthène qu'il explique sa méthode de comparaison des aires et des volumes par les principes du levier.

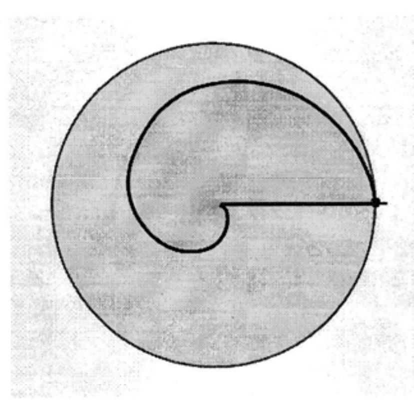
- La spirale qui porte son nom ainsi que l'étude des tangentes et des aires balayées par le rayon vecteur.
  - La spirale d'Archimède est la figure engendrée par un point qui se déplace à vitesse constante sur un rayon vecteur en rotation à une vitesse constante.



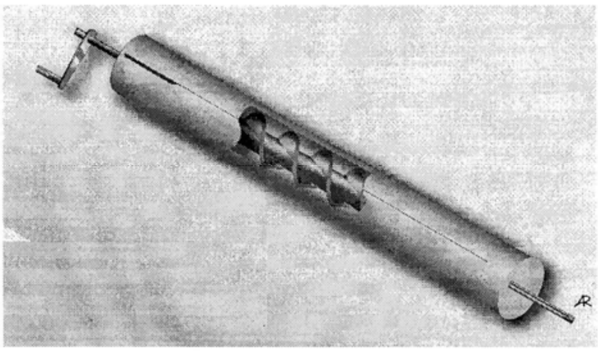
Archimède a également résolu le premier problème de calcul différentiel en construisant la tangente en un point quelconque de sa spirale. Si on connaît l'angle que la tangente fait avec une droite donnée, la tangente est connue car il s'agit de tracer, par un point donné, une droite dont la direction est connue. Le problème consistant à trouver l'angle que fait la tangente à une courbe avec une droite donnée est le problème principal du calcul différentiel.

Archimède, dans son étude de la spirale, compare l'aire du cercle et l'aire comprise entre la spirale et le segment de droite après une révolution. Il obtient alors :

L'aire comprise entre la spirale et la demi-droite replacée dans la position d'où elle est partie vaut le tiers de l'aire du cercle décrit de l'extrémité fixe comme centre et dont le rayon est le segment que le point a parcouru pendant une révolution de la demi-droite.



Les travaux d'Archimède n'ont pas été seulement théoriques, ils furent également pratiques comme en témoigne la vis. C'est durant son séjour en Égypte, où elle est encore utilisée, qu'il aurait inventé cette vis. Dans certaines régions de l'Afrique, la vis est produite en bois par un menuisier ; puis, enfermée dans un cylindre comme dans l'illustration suivante, elle permet aux paysans de pomper l'eau afin d'irriguer les cultures.



Conclusion

Cette présentation de quelques-uns des travaux d'Archimède permet d'apprécier l'imagination dont il a fait preuve dans sa démarche scientifique et le souci qu'il avait de démontrer par différentes approches les résultats que lui suggérait sa méthode de recherche.■

Références bibliographiques

Ball, W. W. R. (1960). *A Short Account of History of Mathematics.* New York (NY), Dover Publications Inc., 522 p.

Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics.* New York (NY), John Wiley & Sons, 717 p.

Caratini, R. (1985). *Les Mathématiques.* Paris, Bordas.

Collette, J.-P. (1979). *Histoire des mathématiques* (2 volumes). Montréal, Éditions du Renouveau Pédagogique Inc., 587 p.

Cuomo, S. (2001). *Ancient Mathematics.* London and New York (NY), Routledge, Taylor and Francis Group, 290 p.

Davis, Ph. J., Hersh, R., Marchisotto, E. A. (1995). *The Mathematical Experience,* Study edition. Boston (MA), Birkhäuser, 485 p.

Dhombres, J. (1978). *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire.* Publications de l'Irem de Nantes, Paris, Cedic/Fernand Nathan, 338 p.

Dunham, W. (1994). *The Mathematical Universe.* New York (NY), John Wiley & Sons Inc., 314 p.

Eves, H. (1976). *An Introduction to the History of Mathematics.* New-York (NY), Holt Rinehart and Winston, 588 p.

Fowler, D. H. (1990). *The Mathematics of Plato's Academy, a New Reconstruction.* Oxford, Oxford University Press, 401 p.

Guedj, D. (1998). *Le Théorème du Perroquet.* Paris, Éditions du Seuil, 520 p.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* New York (NY), Oxford University Press, 1238 p.

Kramer, Edna E. (1970). *The Nature and Growth of Modern Mathematics.* New York (NY), Hawthorn Books Publishers Inc., 758 p.

Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics* (2 volumes). New York (NY), Dover Publications Inc., 1299 p.

Struik, D. (1967). *A Concise History of Mathematics.* New York (NY), Dover Publications Inc., 195 p.

Marie-Jane Haguel
Cégep de Sherbrooke

Exemple du parti que les profs de maths peuvent tirer de la didactique des mathématiques

Ce texte, dont le début reprend une idée présentée par B. Côté (2002), est une illustration des analyses que la didactique des mathématiques permet à propos d'un concept particulier proposé comme objet d'enseignement. Les analyses présentées ici sont des analyses a priori ; elles sont préalables à la prise de certaines décisions à propos de l'enseignement qui sera effectivement réalisé. Elles permettent une prise de décision plus éclairée. On y verra comment elles aident à tirer un bon parti des situations proposées dans un manuel, en explicitant pour soi-même et pour les élèves, certains jugements comparatifs à propos de différentes solutions d'un même problème. Les parties du texte présentées en italique correspondent aux analyses didactiques.

Nous nous centrerons ici sur une partie de l'enseignement du concept de produit scalaire à partir de ce que Papillon propose dans le manuel « Vecteurs, matrices et nombres complexes, Modulo, 1993 » conçu pour l'enseignement de l'algèbre linéaire dans les programmes scientifiques du collégial. On retrouvera, en plus des analyses didactiques, des remarques de prof, identifiées comme telles.

En didactique des mathématiques, on définit une « situation constitutive d'un concept » comme étant un problème dont la formulation ne fait pas intervenir ce concept alors que sa solution le rend obligatoire.

Papillon propose l'exercice suivant :

> L'équation $ab = ac$ où a, b, c sont des scalaires peut toujours se simplifier et donner $b = c$, si $a \neq 0$. Peut-on faire la même simplification pour obtenir $\vec{b} = \vec{c}$ de l'équation $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ si $\vec{a} \neq \vec{0}$? Justifiez votre réponse. (Papillon, p. 64)

Le prof : Illustrer par un exemple ou trouver un contre-exemple sont des activités mathématiques intéressantes mais exigeantes. C'est une habileté qu'il est souhaitable d'exercer. Ici, même avec un schème de pensée relativement limité à propos du produit scalaire, on peut trouver, entre autres, un contre-exemple constitué de deux vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$ non nuls, différents et tous deux orthogonaux au vecteur $\vec{a}$. La question semble close et c'est dommage. En effet, la situation telle que proposée en cache une autre qui nous semble très fructueuse. Il est vrai que l'équation $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ peut être vérifiée sans que $\vec{b} = \vec{c}$; toutefois, si on regarde cette équation comme une contrainte imposée aux vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$, il faut admettre que cette contrainte est forte. Pour mieux la comprendre, nous proposons aux élèves une question voisine :

> Qu'ont en commun les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$ si on exige d'eux qu'ils vérifient $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ pour un vecteur $\vec{a} \neq \vec{0}$?

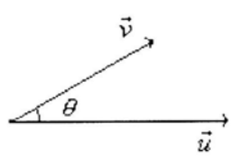
Le concept de cadre conceptuel, issu de la didactique des mathématiques, peut aider à parler des différentes solutions à ce problème. Ce cadre est essentiellement défini par la nature des objets qu'il met en jeu, et en conséquence, par le type d'opérations effectuées sur ces objets et par le type de raisonnements mis en œuvre. Par exemple, l'algèbre linéaire, comme la géométrie analytique, sont des entreprises pour algébriser la géométrie. Cependant, elles se distinguent l'une de l'autre par leurs objets, vecteurs ou points, et par la *représentation choisie pour l'espace. L'espace de la géométrie analytique est constitué de points repérés par rapport à un système d'axes, de telle sorte qu'en bout de ligne on travaille sur des nombres, alors que celui de l'algèbre linéaire est constitué de vecteurs non rapportés a priori à une base, même s'il peuvent l'être ultérieurement. L'algèbre linéaire introduit dans la géométrie des calculs dont la définition, et donc la signification, sont indépendantes de tout repère. La base du travail reste géométrique. Il n'est pas rare qu'un problème puisse être résolu dans le cadre de l'une comme de l'autre.*

Le prof. Dans un cours d'algèbre linéaire, il nous semble important d'inciter fortement les élèves à entrer dans le cadre vectoriel. C'est la raison pour laquelle nous encourageons les élèves à proposer des solutions que nous qualifions de « vectorielles », ne faisant pas intervenir les composantes des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$. Ce faisant, nous pouvons éviter de spécifier la dimension de l'espace dans lequel nous travaillons et ainsi obtenir une solution d'une plus grande généralité.

Dans la première solution, le point de départ est la définition fortement géométrique du produit scalaire de deux vecteurs :

Définition : Le produit scalaire de deux vecteurs

Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un même espace, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, est le nombre réel (scalaire) défini par $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$, où θ est l'angle que forment les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ lorsqu'on les rapporte à une même origine[i]. (Papillon, p. 52)



Solution 1

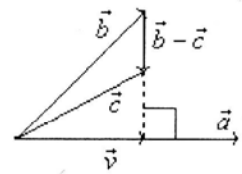
L'hypothèse $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ s'écrit

$$\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\vec{a},\vec{b})=\|\vec{a}\|\,\|\vec{c}\|\cos(\vec{a},\vec{c}).$$

Comme $\vec{a}\neq\vec{0}$, on peut diviser les deux membres de l'équation par $\|\vec{a}\|$ pour obtenir que

$$\|\vec{b}\|\cos(\vec{a},\vec{b})=\|\vec{c}\|\cos(\vec{a},\vec{c}).$$

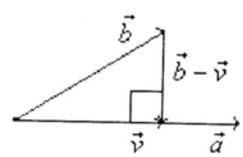
Si on considère $\vec{a}$ comme donné, on cherche l'ensemble des vecteurs $\vec{b}$ pour lesquels $\|\vec{b}\|\cos(\vec{a},\vec{b})$ est un invariant. Cet invariant peut être représenté graphiquement, c'est la mesure algébrique d'un certain segment et on peut exprimer cet invariant de façon vectorielle en faisant intervenir le vecteur $\vec{v}$ parallèle à $\vec{a}$ tel que $\vec{b}-\vec{v}$ soit orthogonal à $\vec{a}$.



Dans la deuxième solution, on a plutôt utilisé les propriétés du produit scalaire pour transformer l'équation hypothèse.

Solution 2

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c} \quad &\Leftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0\\ &\Leftrightarrow\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0\\ &\Leftrightarrow\quad \vec{a}\text{ orthogonal à }\vec{b}-\vec{c}\end{aligned}$$



Une figure dans laquelle on rapporte les 3 vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ à une origine commune montre la même idée que la solution précédente : les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ont en commun un certain vecteur $\vec{v}$ parallèle à $\vec{a}$ tel que $\vec{b}-\vec{v}$ soit orthogonal à $\vec{a}$.

Dans un cas comme dans l'autre, ou plutôt dans un cas et dans l'autre, de façon complémentaire, la classe qui détient ces deux solutions a résolu le problème proposé en construisant le vecteur $\vec{v}$. Il reste à donner à ce vecteur un nom et une définition. Un nouveau concept est constitué qui ne servait pas à définir la situation de départ. C'est un exemple de situation constitutive.

Papillon définit ainsi le nouveau concept :

Définition : Projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$

Étant donné deux vecteurs non nuls et non orthogonaux $\vec{v}$ et $\vec{u}$ dans R^n, la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ est l'unique vecteur (noté $\vec{v}_{\vec{u}}$) pour lequel :

1. $\vec{v}_{\vec{u}}$ est parallèle à $\vec{u}$,

2. $\vec{v}-\vec{v}_{\vec{u}}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

Par ailleurs, si $\vec{v}=\vec{0}$, ou si $\vec{u}=\vec{0}$, ou si $\vec{v}\perp\vec{u}$, alors $\vec{v}_{\vec{u}}=\vec{0}$. (Papillon, p. 61)

Le prof. Remarquons que cette définition énonce l'unicité de $\vec{v}_{\vec{u}}$. Il nous semblerait plus pertinent de consacrer un théorème à l'existence et à l'unicité de $\vec{v}_{\vec{u}}$, d'autant que la démonstration de ce théorème est présentée dans Papillon, p. 61-62. Elle consiste à calculer $\vec{v}_{\vec{u}}$. L'expression obtenue est

$$\vec{v}_{\vec{u}}=\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u}.$$

Elle permet de conclure à la fois à l'existence et à l'unicité de $\vec{v}_{\vec{u}}$. Par ailleurs, la notion d'invariant, notion clé en mathématiques, est rarement invoquée. Il nous semble souhaitable de l'utiliser quand l'occasion se présente et cela ne requiert aucune explication préalable. La première solution est une occasion de le faire.

La didactique des mathématiques s'intéresse aux modalités de constitution de schèmes de pensée riches en lien avec des concepts spécifiques. Pilote de comportements systématiques et invariants dans toute une famille de situations, c'est le schème de pensée qui permet à un sujet (élève, professeur ou mathématicien) de juger qu'il est pertinent de faire intervenir un concept, de chercher des informations spécifiques, de choisir d'effectuer certains calculs ou de mettre en œuvre certains raisonnements. Les schèmes de pensée se combinent, s'enrichissent les uns les autres au fur et à mesure de l'apprentissage. Le schème de pensée associé à la projection orthogonale contribue à la constitution du schème de pensée associé au produit scalaire, voyons en quoi.

Le schème de pensée associé à un concept donné est constitué de plusieurs fragments articulés de connaissance. Pour le produit scalaire, un schème rudimentaire sera constitué de la définition géométrique citée plus haut et de la propriété que deux vecteurs, dont le produit scalaire est nul, sont orthogonaux. Un schème un peu plus élaboré permet de calculer l'angle entre deux vecteurs à partir de leur produit scalaire. Tenir compte de la connaissance de la valeur du produit scalaire de deux vecteurs, donnée dans une hypothèse, demande un schème de pensée beaucoup plus élaboré et donc un contact approfondi (en mode problème et non en mode exercice) avec une situation riche.

Papillon propose les questions suivantes :

L'angle θ tant donné, décrivez et illustrez les lieux représentés symboliquement par les équations suivantes :

a) $\{(x,y)\in R^2:(x,y)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)=0\}$

b) $\{(x,y)\in R^2:(x,y)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)=1\}$

(Papillon, p. 67)

La notation (x,y), traditionnellement utilisée en géométrie analytique pour désigner les coordonnées d'un point variable, incite à résoudre cet exercice dans le cadre de la géométrie analytique :

Solution analytique

Soit $P(x,y)$ un point variable de R^2 vérifiant $(x,y)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)=0$.

Développons cette équation en supposant que (x,y) et $(\cos\theta,\sin\theta)$ sont exprimés dans une base orthonormée :

$$\begin{aligned}(x,y)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)=0 &\Leftrightarrow x\cos\theta+y\sin\theta=0\\ &\Leftrightarrow y\sin\theta=-x\cos\theta\\ &\Leftrightarrow y=x\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right).\end{aligned}$$

Donc, le point variable $P(x,y)$ parcourt une droite d'équation

$$y=x\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

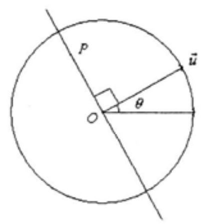
c'est-à-dire passant par l'origine et dont la pente est

$$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Le prof. Dans cette solution, la partie *b*) de cet exercice n'est pas différente de la partie *a*). On a compris et on ne recommencera pas. Et pourtant, on sent bien que l'application du produit scalaire à un point et un vecteur a quelque chose d'étrange ou d'incorrect. Si on insiste sur la nécessité de proposer une solution vectorielle, il en va autrement. L'adoption du cadre vectoriel conditionne l'adoption d'outils de calcul adaptés aux vecteurs et impose d'utiliser en cours de solution comme objets uniquement des vecteurs et de ne revenir aux points qu'à la fin du raisonnement.

Solution vectorielle de la partie a)

Soit $P(x,y)$ un point variable de R^2 rapporté au repère $\langle O,\langle \vec{i},\vec{j}\rangle\rangle$ habituel, posons $\overrightarrow{OP}=(x,y)$ le vecteur-position du point P. Posons aussi $\vec{u}=(\cos\theta,\sin\theta)$. Le vecteur $\vec{u}$ est unitaire et fait avec le vecteur $\vec{i}$ l'angle θ.



Dans ces conditions, l'équation $(x,y)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)=0$ s'écrit $\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}=0$, ce qui signifie que $\overrightarrow{OP}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

Donc, le lieu de P est la droite orthogonale à $\vec{u}$ et passant par l'origine O.

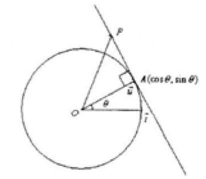
L'interprétation d'un produit scalaire nul en terme d'orthogonalité fait partie, comme mentionné plus haut, du schème de pensée le plus rudimentaire associé au produit scalaire. Dans un schème de pensée peu élaboré, on ne retrouve pas de moyen d'utiliser l'hypothèse que le produit scalaire de deux vecteurs est égal à 1, comme le demande la partie b) de l'exercice.

Le prof. À nos élèves ne voyant pas du tout comment s'y prendre, nous suggérons de relire la théorie et de procéder par élimination. Dans Papillon, la dernière piste qui puisse être explorée est d'utiliser la projection orthogonale d'un vecteur sur un autre. Dans la formule de la projection orthogonale il apparaît un produit scalaire qu'on pourra éventuellement remplacer par sa valeur.

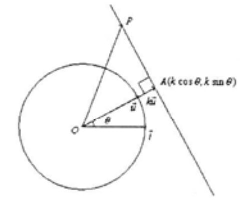
Solution vectorielle (autre)

$$((\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u})=1 \text{ et } \|\vec{u}\|=1) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}_{\vec{u}}=\frac{1}{1}\vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}_{\vec{u}}=\vec{u}.$$

Donc le lieu de P est la droite orthogonale à $\vec{u}$ et passant par le point $A(\cos\theta,\sin\theta)$.



Le prof. Une seconde visite de la situation dans laquelle $\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}=0$ permet la solution unique et générale suivante :



Considérons la contrainte générale $(x,y)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)=k$. Or,

$$((\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u})=k \text{ et } \|\vec{u}\|=1) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}_{\vec{u}}=\frac{k}{1}\vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}_{\vec{u}}=k\vec{u}.$$

Le lieu géométrique correspondant à cette contrainte est donc la droite orthogonale à $\vec{u}$ et passant par le point $A(k\cos\theta,k\sin\theta)$ et ceci quel que soit le réel k.

Il y a d'autres exercices dans Papillon qui proposent ainsi des situations faisant appel à la même dichotomie d'approches, en particulier à propos des déterminants 2x2.

Dans ces solutions[ii]*, on constate que la projection orthogonale est utilisée ici comme outil de résolution alors qu'elle était objet d'apprentissage dans le premier exercice. C'est une distinction importante pour la didactique des mathématiques qui présente la dialectique outil/objet comme deux modalités pour un objet d'être présent dans une situation.*

Le prof. Quelques remarques s'imposent :

1. Le traitement de ces deux questions comme étant deux cas particuliers d'un même cas général donne lieu à des connaissances plus structurées, plus générales et donc plus abstraites.

2. On a appris à utiliser la projection orthogonale pour prendre en compte l'hypothèse que le produit scalaire est connu. C'est une connaissance riche à propos du produit scalaire.

Ce texte ne présente aucune connaissance nouvelle, ni en mathématiques, ni en didactique des mathématiques. Nous souhaitons seulement qu'à la lecture de ce texte les professeurs de mathématiques comprennent mieux en quoi la didactique des mathématiques permet de penser le jeu qui se joue en classe entre les connaissances des élèves et celles du prof.

Une chose est de choisir un manuel qui fait des propositions intéressantes, mais tout se joue lorsque le prof choisit d'imposer des exigences. La didactique des mathématiques permet d'éclairer ces choix. Le concept de cadre conceptuel, précisé par les notions d'objet et d'outil, permet au prof de préciser le sujet d'un cours, de choisir systématiquement des exemples et des exercices qui lui semblent être au cœur du sujet. Il lui permet de décider si, dans un cours d'algèbre linéaire, il encouragera, ou peut-être exigera-t-il, des solutions vectorielles. Il lui permet de parler avec ses élèves de différentes solutions, de différents raisonnements à propos d'une même situation. Ces discussions peuvent aider l'élève à qualifier lui-même sa propre solution de vectorielle ou d'analytique, sachant ainsi quelle solution sera encouragée et laquelle sera jugée hors sujet, bien qu'elle solutionne le problème.

Le concept de schème de pensée permet au prof d'éviter d'être irrité par les questions du type : « Alors, est-ce qu'on fait toujours ainsi ? ». En effet, ces questions ne sont pas toujours le lot de l'élève en quête de recettes. Elles peuvent venir de celui qui cherche à comprendre dans quelles conditions on peut utiliser tel objet, tel opérateur ou tel raisonnement, disons de celui dont la préoccupation est, consciemment ou non, de se construire un schème de pensée riche à propos du concept enseigné. Il nous semble que si le prof reformule systématiquement la question et la réponse qui lui sera associée en termes de connaissances sur des objets, dans des conditions précises d'application, il finira par convaincre même certains chasseurs de recettes que ce n'est pas ce qui est intéressant dans le cours.■

Notes

[i] Les vecteurs étant « libres », c'est-à-dire sans origine fixe, on peut placer les flèches qui les représentent à une origine quelconque et donc à une même origine.

[ii] Il y en a bien d'autres dont une qui serait à rapprocher de la solution 2 de la situation constitutive de la projection orthogonale.

Rérérences bibliographiques

Côté, B. (2002). Analyse épistémologique des concepts vectoriels élémentaires. *Bulletin AMQ*, XLII (2), p. 22-43.

Papillon, V. (1993). *Vecteurs, matrices et nombres complexes*. Mont-Royal, Modulo Éditeur.

Marie-Jane Haguel
Collège de Sherbrooke
haguelma@collegesherbrooke.qc.ca

Calculatrices et ordinateurs

Jean M. Turgeon
Université de Montréal

Multiplications additionnelles pour la TI-83+

La TI-83+ permet de multiplier des nombres, réels ou complexes, ayant un maximum de dix chiffres. Elle permet aussi de multiplier une liste par un nombre ou par les éléments d'une autre liste et de multiplier une matrice par un nombre ou par une autre matrice. Que peut-on désirer encore ? Il m'est arrivé de vouloir aussi :

1. multiplier un polynôme par un autre,
2. multiplier l'un par l'autre deux nombres de plus de dix chiffres,
3. multiplier deux nombres exprimés dans une base autre que 10.

J'ai été surpris de constater comme il est facile de programmer la TI-83+ pour lui faire accomplir ces tâches.

Multiplier des polynômes

Supposons que l'on veuille multiplier

$$f(x)=2x^5-3x^3+5x-6$$

par

$$g(x)=3x^6+x^5-x^2+2x-7.$$

```
PROGRAM:MULPOL
Disp "DONNER LA LISTE"
Disp "DES COEFFICIENTS"
Disp "DU PREMIER"
Input "POLYNOME        ",L1
Input "SECOND POLYNOME ",L2
dim(L1)→N
dim(L2)→M
M+N-1→dim(L3)
Fill(0,L3)
For(I,1,N)
For(J,1,M)
L3(I+J-1)+L1(I)*L2(J)→L3(J+J-1)
End:End
Disp L3
```

La liste des coefficients de $f(x)$ est $\{2, 0, -3, 0, 5, 6\}$ et celle de $g(x)$ est $\{3, 1, 0, 0, -1, 2, -7\}$. Le programme MULPOL calcule la réponse et la met dans la liste L_3. Pour la voir au complet, il faut appuyer sur 2nd et L_3, qui donne

$$\{6, 2, -9, -3, 13, -9, -17, -6, 16, 16, -47, 42\}.$$

Ainsi,

$$f(x)\times g(x)=6x^{11}+2x^{10}-9x^9-3x^8+13x^7-9x^6$$
$$-17x^5-6x^4+16x^3+16x^2-47x+42.$$

Multiplier deux nombres de plus de dix chiffres

Supposons que l'on veuille multiplier les nombres

$$A = 343\ 950\ 649\ 593$$

et

$$B = 222\ 777\ 333\ 555\ .$$

La réponse est un nombre à 23 chiffres,

$$76\ 624\ 408\ 590\ 838\ 685\ 993\ 115$$

trop de chiffres pour la TI-83+ sans l'aide d'un programme. Mais, on peut avoir recours à MULGN.

```
PROGRAM:MULGN
Disp "NOMBRE DE CHIF-"
Disp "FRES DANS CHAQUE"
Input "TRANCHE          ",D
10^D→D
Disp "DONNER LA LISTE"
Disp "DES CHIFFRES DU"
Input "PREMIER NOMBRE   ",L₁
Input "SECOND NOMBRE    ",L₂
din(L₁)→N
dim(L₂)→M
M+N→dim(L₃)
Fill(0,L₃)
For(I,1,N)
For(J,1,M)
L₃(I+J)+L₁(I)×L₂(J)→L₃(I+J)
End:End
For(I,M+N,2,-1)
int(L₃(I)/D)→R
L₃(I)-D×R→L₃(I)
L₃(I-1)+R→L₃(I-1)
End
Disp L₃
```

Multiplier dans une base autre que 10

Supposons que des circonstances saugrenues vous portent à multiplier deux nombres exprimés en base 41, disons :

$$(2,40)_{41} \times (1,38)_{41}\,.$$

Alors le programme MULBASE est là pour vous aider.

```
PROGRAM:MULBASE
Input "BASE A UTILISER ",D
Disp "DONNER LA LISTE"
Disp "DES CHIFFRES DU"
Input "PREMIER NOMBRE  ",L₁
Input "SECOND NOMBRE   ",L₂
dim L₁→N
dim L₂→M
M+N→dim(L₃)
Fill(0,L₃)
For(I,1,N)
For(J,1,M)
L₃(I+J)+L₁(I)×L₂(j)→L₃(I+J)
End:End
For(I,M+N,2,-1)
int (L₃(I)/D)→R
L₃(I)-D×R→L₃(I)
L₃(I-1)+R→L₃(I-1)
End
Disp L₃
```

Dans notre cas, les listes de chiffres sont

$$L_1 = \{2, 40\} \text{ et } L_2 = \{1, 38\}$$

et le programme donne la réponse

$$L_3 = \{0, 5, 30, 3\},$$

c'est-à-dire $(5, 30, 3)_{41}$. ■

Adresser votre correspondance concernant cette rubrique à :

Jean M. Turgeon (Mathématiques)
Université de Montréal
Case postale 6128, Succursale Centre-Ville
Montréal (Québec) H3C 3J7

turgeon@dms.umontreal.ca

Lu pour vous

Robert Bilinski
Cégep de Saint-Laurent et Collège Montmorency

Dans la présente rubrique, vous trouverez la recension de trois superbes livres. J'ai vraiment eu beaucoup de chance : un roman intitulé *Les obstinations d'un mathématicien*, un livre de vulgarisation *Dites un chiffre* et un livre plaidoyer d'amour pour les maths *Voulez-vous jouer avec les maths ?*

Ceci dit, avant de commencer mes recensions, je voudrais solliciter votre aide. J'ai reçu une lettre d'un lecteur qui m'a demandé de lui suggérer une « bibliothèque idéale ». J'ai partiellement relevé le défi, mais je voudrais avoir votre opinion là-dessus. Je vois donc deux grandes catégories à couvrir (si vous en voyez d'autres, ne vous gênez pas pour me le signaler) :

- Meilleurs livres « savants ou scolaires »
- Meilleurs livres de vulgarisation.

De plus, je pense qu'il faudra tenir compte du lectorat possible (primaire, secondaire, cégep, universitaire). Merci de votre collaboration.

Didier Nordon, *Les obstinations d'un mathématicien*, collection « Regards sur les sciences », Belin, Pour la science, 2002, 112 p., ISBN 2-84245-045-0.

Voici un roman qui m'a plu dès la première page. J'aurais même aimé l'écrire, mais nous devons remercier M. Nordon pour cela. L'intrigue est simple : le personne principal, dont le surnom est ArDu (pour Armand Duplessis), est obstinément à la recherche de la preuve de la conjecture de Goldbach. (La conjecture de Goldbach stipule que tout entier pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers.) Le livre nous permet de le suivre au fil de sa carrière et de son projet.

À travers les chapitres, on découvre son histoire, du moment où il fût frappé par cette « obsession d'une vie » jusqu'à ses quatre morts, en passant par sa carrière d'universitaire, mais surtout sa passion de chercheur. À travers ses différentes aventures, comme des contacts avec des collègues ou bien son divorce provoqué par une suite de coïncidences numériques, on découvre différents éléments des mathématiques contemporaines (théorie des nombres, ...). La découverte n'est pas stérile ou scolaire. On l'effectue à travers les yeux et les pensées de notre protagoniste lorsque, entre autres, il joue avec les nombres. Par exemple, on découvre les diverses propriétés mathématiques de sa date de naissance, le 16 avril 1964.

Encore moins stériles sont les jeux de mots qu'engendrent nos collègues mathématiciens. À preuve, on nous donne à la fin de certains chapitres des titres d'articles savants pour appuyer les aventures littéraires d'Armand l'Ardu. Prenons pour exemple le titre du cours de Yoccoz de 1999-2000 s'intitulant « Fers à cheval non uniformément hyperboliques » cité à la page 39. Ainsi, ce personnage fictif peut s'ajouter au panthéon des mathématiciens ou scientifiques ayant écrit des œuvres littéraires aux côtés de ces Vian et Oulipiens qui nous titillent la fibre mathématique avec leurs dires.

Les descriptions du milieu universitaire (réunions, congrès, discussions et rivalités entre collègues...) se font avec humour et vérité. Le personnage principal, simple et réservé, est follement attachant dans son obsession naïve avec Goldbach et, en général, avec les nombres. Un livre à lire et à recommander, et en dépit de la jeunesse de cette année (il est le 7 janvier 2004 pour moi), je pense que ce sera le meilleur livre de l'année ! Compte tenu du nombre élevé de clins d'œil et sous-entendus mathématiques, je me demandais s'il pouvait être aussi bien perçu par un non-mathématicien… J'ai donc demandé à ma tendre moitié (biologiste moléculaire devenue analyste financier) de lire ce livre et de m'en donner des nouvelles. Sa réaction instinctive a été : « super, tu en dis tellement de bien que tu m'as donné le goût de le lire ! ». Ce que je retiens de sa critique est : « Je ne comprends pas tout le contenu mathématique et je manque probablement beaucoup de blagues d'initié, mais je me retrouvais vraiment beaucoup dans la description du monde universitaire. Ces problèmes sont universels. C'est un bon livre ». Bref, je le recommande fortement.

Malcom E. Lines, *Dites un chiffre*, collection « Champs », Flammarion, 1999, 250 p., ISBN 2-08-080049-3.

Voici un excellent livre de vulgarisation, écrit par un mathématicien britannique, puis traduit en français. Il survole plusieurs sujets à la mode dans les livres de vulgarisation : les nombres de Fibonacci, la conjecture de Syracuse, les abus de statistiques, le 5e axiome d'Euclide, la cryptographie, la factorisation de grands nombres, les polyominos, les problèmes P et NP, les fractales, le chaos et la dimension d'Hausdorff. Il y a par contre des sujets moins communs : pavage de carrés par d'autres carrés, l'arithmétique modulaire, le théorème des quatre couleurs, les empilements optimaux et la théorie des groupes. Chaque sujet est traité dans une quinzaine de pages, donc le livre est parfait pour notre rythme de vie où le temps libre est fractionné.

Avant de commencer en profondeur la recension, je voudrais m'attarder à certains aspects du livre qui m'ont beaucoup plu. En effet, j'ai beaucoup apprécié le style de l'auteur. À travers son livre, on retrouve des mentions quant aux limites des connaissances mathématiques dans les sujets traités (classification des polyominos, problèmes NP…) et un style fort personnel avec un rythme rapide et vivant. Chaque fois que je prenais le livre pour avancer ma lecture, soit je continuais de lire jusqu'à m'endormir, soit il fallait que je me dompte pour laisser le livre. Oh, envoûtante lecture ! Ensuite, compte tenu que le livre original a été écrit en 1990, soit neuf ans avant l'édition française, j'ai beaucoup apprécié les notes des traducteurs qui permettaient de savoir que certains des problèmes soulevés par le livre avaient été résolus entre temps !

D'un point de vue vulgarisation mathématique, l'auteur a cerné comment présenter le matériel. Chaque chapitre a été rodé soigneusement pour l'intégrer dans un modèle flexible : introduction du sujet (historique ou autre), présentation d'un exemple simple, explications, portée et limites, application à un sujet plus compliqué, présentation de plusieurs applications réelles, généralisation (à d'autres dimensions ou à d'autres objets). L'explication ainsi fournie par l'auteur est d'une telle clarté qu'à la fin du chapitre, je pensais pouvoir m'attaquer à chacun des problèmes.

Ce livre pourrait franchement servir comme source de matériel supplémentaire pour des profs qui se sentent dépourvus face à des étudiants assoiffés de plus de connaissance. Je le recommande fortement.

Gilles Dowek, *Voulez-vous jouer avec les maths ?*, Collection « Les petites pommes du savoir » #12, Éditions Le Pommier, 2002, 63 p., ISBN 2-74650052-3, 7,95 $.

Petit livre, nouvelle pomme. Le but affiché dans l'introduction (p. 6) est d'« inviter le lecteur à se mettre dans la peau d'un mathématicien ». Le moyen choisi est la résolution de sept problèmes de la « vraie » vie. Bon, l'un d'entre eux est tiré par les cheveux, notamment celui sur le flocon de Koch dans un contexte architectural (problème 6 : l'hôtel de la plage, p. 48), et pas très clair de surcroît. Parmi les six autres problèmes, il y en avait quatre qui m'ont accroché et deux qui m'ont intéressé mais dont le traitement m'a froissé.

J'ai donc bien aimé les problèmes suivants : #2 - Une voile à l'horizon, #3 - La mer a disparu, #4 - Le club des corsaires et #7 - Garçon, une orangeade. Je pense même les insérer au besoin dans des cours tellement ce sont de « vrais » problèmes que tous peuvent se poser. Intrigués ? Il s'agit de connaître la distance entre un observateur et l'horizon, de comprendre les marées, de monter une clôture et d'empaqueter des oranges dans une boîte. Le traitement y est complet, clair et lisible.

Le premier problème concerne un très vieux bateau. On cherche à couper une forme quelconque pour obtenir une voile carrée en recousant les morceaux obtenus lors du découpage. On voit que le découpage fonctionne, mais il n'est pas expliqué. Il me semble que cela contredit le but du livre. Comble de la contradiction, chaque problème est suivi d'une section « Un peu plus loin » où, selon l'introduction (p. 9), on est sensé « trouver le pourquoi de la question ». Chaque jeu a en effet été choisi de manière à illustrer une idée mathématique parfois ancienne, parfois récente. Or, la section « Un peu plus loin » de ce problème parle de Pythagore et on n'explique ni le pourquoi de la question, ni comment passer de Pythagore à la solution du problème. L'auteur aurait pu parler de stratégies comme le pavage du plan et la superposition d'un carré ou je ne sais quelle autre méthode. Le problème est bon et accrocheur, mais je trouve gaspillé. Dommage.

En parlant de pavage, le cinquième problème des dominos sauvages traite du problème de pavage par dominos. Le défaut ici est mineur, le problème est tellement plus simple que les autres qu'il aurait probablement dû être mis au début. Il « choque » un peu à côté des autres. Par contre, j'ai bien aimé la section « Un peu plus loin » qui aborde le problème des preuves par ordinateurs. Le sujet des preuves par ordinateurs est d'ailleurs repris dans le problème de l'empaquetage des oranges, sans toutefois amorcer le débat de leur légitimité.

En somme, ce livre se lit en une heure et peut apporter quelques idées pour des exercices. Je pense qu'il pourrait aussi être lu et apprécié par des étudiants et ce, dès le secondaire 4 (après avoir vu la trigo). Personnellement, je pense poser certains de ces problèmes à des étudiants en technique d'architecture. Je fais remarquer, en passant, que l'auteur est le même que celui qui a écrit la pomme sur les sondages que j'ai moins aimé et recensé antérieurement. Voici donc un livre qui, selon moi, est mieux écrit et destiné pour son lectorat.

À venir :

En français : Graines de sciences, Le roi du boulier compteur, Théorie des probabilités, Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan, L'empire des nombres, Élémentaire mon cher Watson ! …

En anglais : An Adventurer's Guide to Number Theory, Calculated Bets, Codes and Ciphers, All the Mathematics you Missed, Mathematical Bafflers, …■

Robert Bilinski
Cégep de St-Laurent et Collège Montmorency
rbmatab@netscape.net

Vous venez de lire un ouvrage qui vous a passionné ? Ou qui vous a choqué ? Nous attendons vos commentaires : un bref texte que vous postez à Robert Bilinski, 645, rue De L'Épée, Outremont (Québec) H2V 3T7. Vous pouvez aussi utiliser le courrier électronique (rbmatab@netscape.net)

La revue des revues

Driss Boukhssimi
Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

Le Chroniqueur habituel est présentement en sabbatique à l'extérieur du pays.

Sous la présente rubrique, nous présentons cinq revues, dont deux en détails et trois en survol. On y retrouve deux revues hors-série (*La Recherche* et *Pour la science*), deux revues *Tangente* et une revue dans la série des génies de la science.

La Recherche, hors-série #13, *Petits et grands nombres*, ISSN 00295671, 8,50 $

Le titre nous suggère un contenu mathématique avec son énorme « Nombre » rouge en travers de la couverture. Mais sans précision, on ne sait pas de quelle branche des mathématiques il est question. Va-t-on traiter de la théorie des nombres ? Du calcul différentiel ? En fait rien de cela ! On y aborde plutôt les statistiques et la perception psychologique des nombres. L'exposé est séparé en trois sections qui sont agrémentées d'un ajout de jeux mathématiques inspirés du contenu : Construire le réel (avec six articles, une entrevue et un extrait de Laplace), Évaluer les risques (avec cinq articles) et Catastrophes (avec deux articles et deux entrevues).

Dans la première section, on traite de l'usage des statistiques et des indicateurs économiques dans la vie publique. Par exemple, dans le premier article, on apprend que la France vient récemment de se débarrasser de ses recensements en faveur des sondages plus économiques, alors qu'aux États-Unis, on a soumis cette pratique à un test constitutionnel dans les cours avec une poursuite judiciaire… En fait, on perçoit un autre thème se dessiner dans ces pages : « L'usage des mathématiques n'est pas sans controverse » ou bien « Compter certes, mais compter qui ou quoi ? ». On illustre ce questionnement à partir de mesures économiques comme le PIB et l'IPC. Que doit-on inclure dans l'IPC ? Est-ce que le PIB reflète la richesse d'un pays ? Ces remises en question sont fort intéressantes à lire et je pense m'en servir de temps à autre dans des cours comme *Méthodes Quantitatives* pour étoffer l'esprit critique des étudiants. En passant, je rappelle qu'il y a (ou devrait) y avoir polémique sur le taux de chômage aussi (même si ce n'est pas mentionné dans la revue). En effet, on enlève du calcul de ce taux les gens qui ont été sans emploi plus de deux ans (ici, aux États-Unis et probablement ailleurs également).

Dans la seconde partie, on traite du risque inhérent dans la collecte et l'interprétation de données. Il y a trois dossiers bien remplis sur des préoccupations omniprésentes dans les médias : le tabac, le cancer du sein et l'utilisation d'œstrogène après la ménopause. On apporte une dimension historique au dossier. Qui a posé la question ? Pourquoi et comment ? Qui a tenté d'y répondre ? Où en sommes-nous et qui peut-on croire ? Ensuite, par l'entremise d'un petit théâtre

« Watson-Holmes », on aborde l'interprétation de certains graphiques pour essayer d'expliquer une corrélation trouvée entre diverses variables (mortalité et consommation de viande, mortalité et consommation de cigarettes, …) . Fort instructif, mais nécessitant une grande attention ! On finit la section avec un article qui pose un problème intéressant. Même si on effectue les tests de la bonne manière, les personnes qui doivent se servir des résultats (médecins...) sont-elles aptes à les comprendre correctement ? On donne l'exemple du « paradoxe » de l'efficacité des tests de dépistage et les taux d'infection : Comment interpréter un test positif ?

Dans la troisième partie, on commence en douce avec une entrevue qui fait très bien la transition avec la deuxième partie. Comment peut-on évaluer les risques si on n'est pas objectif par rapport à la question posée ? Le problème réel et un peu apeurant est que l'exemple proposé est l'intervention gouvernementale dans le dossier du SRAS ! Par la suite, on met en doute le modèle de la loi normale pour bien des phénomènes : distribution des catastrophes, prix des actions et indices boursiers… Le problème ici est la trop forte présence des queues que n'explique pas la loi normale. Cela donne naissance à des événements non planifiés (faillite, « krach » boursier, verglas, panne, éruptions…). Je vais donc utiliser cette tribune pour reposer ma question à la conférencière de clôture du dernier congrès à Saint-Hyacinthe : « Les modèles pour les produits dérivés (options…) sont basés sur l'utilisation de la loi normale. Ne devrait-on pas explorer l'utilisation d'autres distributions (asymétriques, à queues larges…) sous-jacentes ? »

Tangente #95 , *Mathématiques et religion*, suivi de : *La continuité*, ISSN 0987-0806

C'est ironique comment différentes personnes peuvent avoir la même idée mais à des moments rapprochés. Ainsi, deux semaines après m'être fait demander par ma conjointe si les mathématiques étaient une religion pour moi, la revue *Tangente* publiait un numéro sur ce thème. En six articles et deux pages de vignettes, elle traite des différents aspects de la question. Pour le deuxième sujet de la revue, la continuité est abordée en trois articles.

La première partie débute avec un exposé comparatif du concept de religion et des mathématiques pour identifier les ressemblances et les différences entre elles. On retrouve dans le second article une exploration du fonctionnement de la secte Pythagoricienne. Par la suite, ils expliquent les différences entre les dates des Pâques juive et chrétienne et de la fête correspondante dans l'Islam, l'eïd al Kebir. Naturellement, la raison est mathématique : l'année lunaire n'a pas la même longueur que l'année solaire. Pour les intéressés, on y expose la formule mathématique officielle qui permet de connaître la date de Pâques à partir du nombre de l'année (p. 16). On pourrait croire à ce stade que la revue est centrée sur l'univers judéo-chrétien. Sortez cette idée de votre tête !

Les chiffres et les nombres apparaissent dans toutes les religions. On peut lire une recension des différents sens attribués aux chiffres de 1 à 7 dans diverses religions (parmi lesquelles on retrouve l'hindouisme et le bouddhisme). En fait, il est difficile de trouver une religion ou un groupe ethnique où les mathématiques n'interviennent pas d'une manière ou d'une autre dans les rites religieux. Dans deux des trois autres articles qui traitent de ce thème, on explore ainsi deux autres grandes familles de civilisations : les civilisations précolombiennes, dont les mayas et les civilisations asiatiques, dont la religion shinto du Japon. Dans les civilisations précolombiennes, les rites étaient gérés par le mouvement des astres. Ainsi, les mathématiques intervenaient comme chez nous dans l'identification des moments auxquels ces rites ont lieu. Par contre, dans le cas des temples shinto, on retrouve des plaquettes de problèmes mathématiques qui étaient présentées comme offrande aux dieux et aussi comme aide à l'intériorisation et à la méditation.

Le survol de la présence mathématique dans les diverses religions terminé, le dernier article montre comment des religieux ont pu contribuer aux mathématiques. On y énumère pas moins de 18 noms connus de tous avec une brève mention de leurs contributions respectives. À la fin de cet article, on retrouve des explorations un peu plus longues des contributions, de Mersenne et Mascheroni.

Pour le second thème, on introduit la continuité et quelques exemples de discontinuités. On mentionne en passant un point qui aurait pu être exploré davantage car trop souvent oublié dans nos livres de calcul différentiel : les fonctions discontinues sont « infiniment » plus nombreuses que les fonctions continues. Les valeurs intermédiaires sont ensuite à l'honneur. On pose la question : « Le théorème peut-il être vrai sans que la fonction étudiée ne soit continue ? » La réponse est oui. Dans le troisième article, on explore la topologie, cette science des transformations continues.

Pour la science, hors-série (octobre - décembre 2003) : *La sphère sous toutes ses formes*, ISSN 1-246-7685

Comme le titre l'indique, voici un spécial qui parle de la sphère. On traite le sujet à fond : du point de vue mathématique, physique, chimique et biologique. En tout, on y retrouve 30 articles s'étalant sur 120 pages. Le sujet y est traité en profondeur : définitions, empilements, généralisation de sphères, objets sphériques, propriétés, modélisations possibles, projections, symétries… Ceci dit, je dois ici admettre que je n'ai eu le temps que de lire les deux premiers articles et de feuilleter en diagonale les autres. Mais, cet état de fait provient uniquement d'un manque de temps et non d'un quelconque défaut de la revue.

Les génies de la science #17, *Newton*

Notons la publication d'un dossier sur Newton. On couvre comme à l'accoutumée toute sa biographie et ses diverses contributions aux sciences. Par contre, en le feuilletant rapidement, j'ai trouvé que le contenu n'était pas assez axé sur les mathématiques, ce qui m'a empêché de m'y attarder davantage. Ainsi, je ne peux que mentionner sa publication sans pouvoir en dire plus sur le contenu.

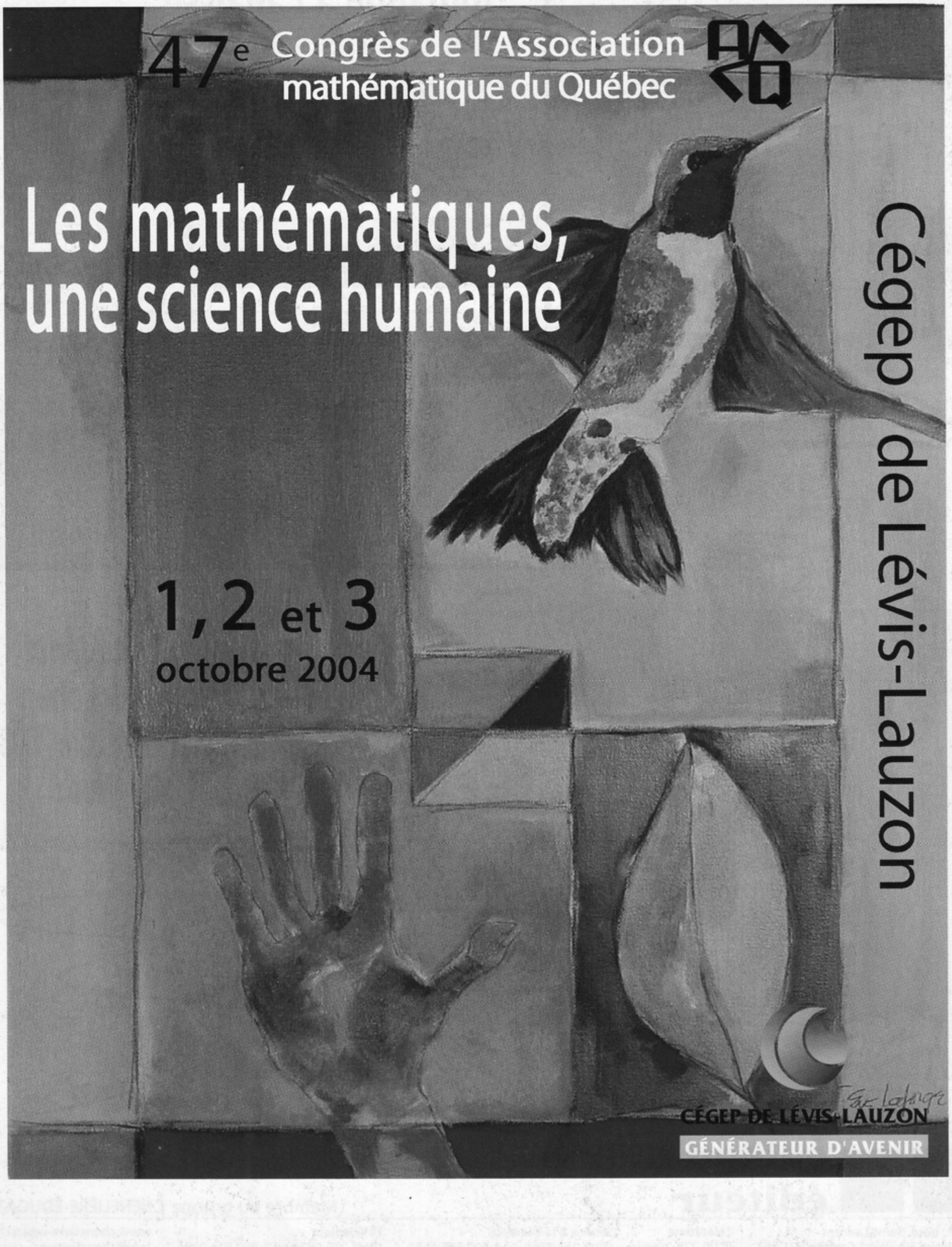
Tangente #96, *Un groupe révolutionnaire*, N. Bourbaki, suivi de *Les groupes, une révolution,* ISSN 0987-0806

Dans cette revue, on retrouve cinq articles qui explorent le mouvement Bourbaki et ses effets sur les mathématiques. On y retrouve un exposé historique, une entrevue et des commentaires. La théorie des groupes est explorée en sept articles. On commence par un article *mini-cours*, un article *lexique* et un article *exemple* pour ensuite traiter des applications (géométrie, groupes de Lie, casses-têtes et résolution d'équations). J'ai beaucoup aimé lire les applications et ce, même si la quatrième était déjà parue dans le spécial sur Galois (Les génies de la science).■

Vous avez lu une revue ou un article qui peut intéresser les lecteurs du *Bulletin* ? Si cela vous plaît, faites-en une critique ou une recension que nous pourrons publier dans cette chronique. Il me fera plaisir de recevoir vos textes par la poste ou par courriel.

Driss Boukhssimi
Module des sciences de l'éducation
Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue
445 boul. de l'Université
Rouyn-Noranda (Québec) J9X 5E4

Driss.Boukhssimi@uqat.uquebec.ca


47e Congrès de l'Association
mathématique du Québec
Les mathématiques,
une science humaine
1, 2 et 3
octobre 2004
Cégep de Lévis-Lauzon
CÉGEP DE LÉVIS-LAUZON
GÉNÉRATEUR D'AVENIR