Mathématique et musique III

Serge Robert
Cégep Saint-Jean-sur-Richelieu

Introduction

Cet article fait suite aux deux premiers articles précédemment parus dans le bulletin. Dans le premier, nous avons fait la démonstration mathématique de la loi de Mersenne donnant la fréquence d'une corde vibrante en fonction de trois paramètres : la longueur ℓ de la partie vibrante, la tension T dans la corde et la densité linéaire ρ de celle-ci :

$$f = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Cette formule peut aussi se démontrer expérimentalement en laboratoire, c'est d'ailleurs un des sujets possibles de travaux pour l'activité d'intégration en sciences de la nature. Le problème consiste à mesurer la fréquence exacte d'un son accompagné de ses harmoniques.

Dans le second article, nous avons vu comment Pythagore définissait une gamme basée sur l'accumulation successive de quintes, et nous verrons dans le présent article la définition de la gamme de Zarlino, basée sur les harmoniques naturelles, et la gamme bien tempérée, qui pourrait être considérée comme une gamme scientifique.

La gamme de Pythagore

Rappelons la définition d'harmonique que nous avons vue dans le second article : chaque note émise sur un instrument de musique est accompagnée de ses harmoniques, qui sont des sons dont les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence de cette note, dite la fondamentale.

La n^{e} harmonique d'un son de fréquence f_0 est :

$$f_n = (n+1) \cdot f_0.$$

La première harmonique est ainsi l'*octave*, un son ayant une fréquence deux fois plus élevée :

$$\textbf{Octave} : f_1 = (1+1) \cdot f_0 = 2f_0 \Rightarrow \frac{f_1}{f_0} = 2.$$

Le rapport entre la deuxième harmonique et la première est la définition de la *quinte* :

$$\textbf{Quinte} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}.$$

Comme nous l'avons vu dans le second article, la gamme de Pythagore est basée sur l'accumulation successive de quintes ; cela donne la gamme suivante :

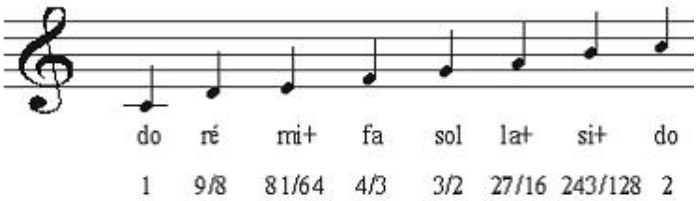

Figure 1

Les fractions sous les notes indiquent les rapports harmoniques entre une note et la fondamentale (la note de départ). Comme on va le voir dans cet article, les notes avec un + sont un peu plus hautes que celles obtenues avec les harmoniques naturelles.

La gamme de Zarlino

Cette gamme porte le nom du théoricien et compositeur italien Gioseffo Zarlino (1519-1590), qui en donna une définition dans ses deux livres *Institutioni harmoniche*, 1558, et *Dimostrationi harmoniche*, 1571.

Il n'a pas été le premier à utiliser cette gamme, mais il en a favorisé l'adoption à un moment où il devenait nécessaire de modifier la gamme de Pythagore. Elle est beaucoup plus simple que celle de Pythagore puisque les rapports harmoniques qu'elle utilise sont des fractions plus simples.

Comme on l'a vu dans le second article, la *quarte* est l'inverse de la quinte.

$$\textbf{Quarte} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{4}{3}.$$

Avec l'octave et la quinte, ces trois rapports harmoniques sont présents dans toutes les musiques, aussi bien occidentale qu'orientale. Ce sont aussi les trois rapports les plus facilement discernables par une oreille non professionnelle.

Plus deux notes ont d'harmoniques en commun, plus le rapport harmonique entre ces notes est consonant. La quarte est donc le troisième rapport par ordre décroissant de consonance, après l'octave et la quinte. Plusieurs instruments sont accordés par quartes dont les plus connus sont la guitare, la contrebasse, le luth et toute la famille des violes, tandis que les instruments de la famille du violon sont accordés par quintes.

La gamme de Zarlino est construite uniquement à partir des harmoniques d'une note dite la fondamentale. Si f_0 est la fréquence de cette note,

1) La première harmonique est l'octave : $f_1 = 2f_0$; $\dfrac{f_1}{f_0} = 2$.
2) La deuxième harmonique est la quinte au-dessus de l'octave : $f_2 = 3f_0$; $\dfrac{f_2}{f_1} = \dfrac{3}{2}$.
3) La troisième est la deuxième octave de la fondamentale : $f_3 = 4f_0$; $\dfrac{f_3}{f_0} = 4 = 2^2$.

La troisième harmonique est à la quarte de la deuxième : $\dfrac{f_3}{f_2} = \dfrac{4f_0}{3f_0} = \dfrac{4}{3}$.

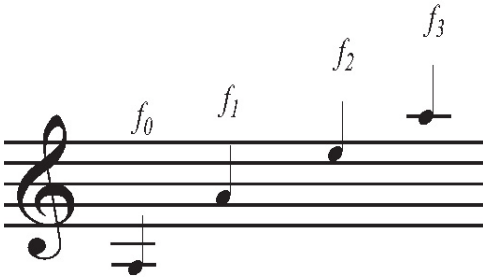

Figure 2

Ces trois rapports harmoniques, la quarte, la quinte et l'octave, sont les plus simples puisqu'ils peuvent s'exprimer avec les entiers 1, 2, 3 et 4.

À la fin du Moyen Âge, début Renaissance, l'art polyphonique se développa énormément et les compositeurs prirent la liberté de faire entendre d'autres rapports harmoniques. Par exemple, il était devenu courant de faire entendre ensemble le *do* et le *mi*.

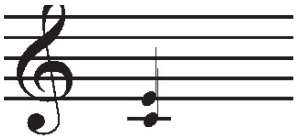

Figure 3

Ce rapport harmonique est plutôt désagréable lorsque les notes utilisées proviennent de la gamme de Pythagore puisque ce rapport est égal à 81/64 qui n'est pas une fraction simple.

Une façon plus simple d'obtenir le *mi* consiste à utiliser la quatrième harmonique :

$$f_4 = 5 \cdot f_0,$$

$$\frac{f_4}{f_3} = \frac{5}{4}.$$

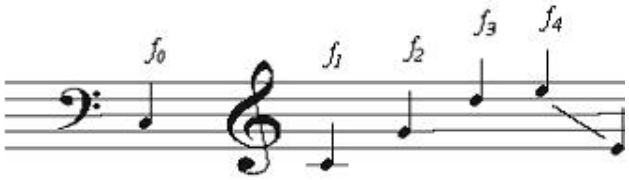

Figure 4

Ce rapport harmonique entre deux notes de fréquence f_1 et f_2 s'appelle la *tierce majeure* :

$$\textbf{Tierce majeure} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{5}{4}.$$

Ce *mi* ne correspond pas au *mi* que nous avions obtenu avec la gamme de Pythagore ; pour cette raison nous l'avions noté *mi+*.

$$\frac{mi+}{mi} = \frac{\frac{81}{64}}{\frac{5}{4}} = \frac{81}{64} \cdot \frac{4}{5} = \frac{81}{80}.$$

Cet intervalle porte le nom de *comma* de *Zarlino*. Il représente à peu près le plus petit intervalle décelable lorsque deux sons sont joués l'un à la suite de l'autre. Lorsqu'ils sont joués simultanément, les battements nous permettent de dire qu'ils ne sont pas égaux, ce qui n'est pas le cas lorsqu'ils sont joués consécutivement. Comme c'est le cas avec tous nos sens, il existe une quantité minimale, un quantum, requis pour déclencher une perception. Dans le cas des intervalles musicaux, cette quantité est à peu près égale à 5 savarts.

Le savart est une unité qui mesure les rapports musicaux ; elle est définie ainsi :

$$\#\text{savart} \ = 1000 \cdot \log_{10}\left(\frac{f_2}{f_1}\right).$$

En utilisant la tierce majeure comme nouveau rapport harmonique, en plus de la quinte, de la quarte et de l'octave, nous obtenons la gamme suivante :

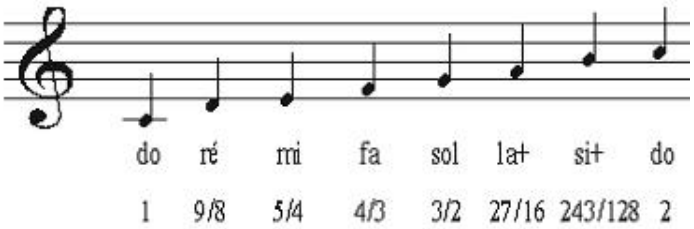

Figure 5

Le $mi+$ de la gamme de Pythagore a été remplacé par un mi beaucoup plus simple : 5/4. Il nous reste à en faire autant avec le $la+$ et le $si+$.

Si on définit le la comme étant la quarte au-dessus du mi, on obtiendra

$$la = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot f_0 = \frac{5}{3} \cdot f_0.$$

Cette fraction est simple et remplacera le $la+$ de la gamme de Pythagore.

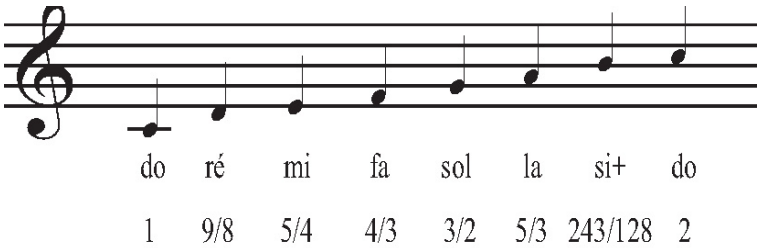

Figure 6

Le rapport entre ce la et le do s'appelle une *sixte majeure* :

$$\textbf{Sixte majeure} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{5}{3}.$$

Et, pour terminer la gamme de Zarlino, il reste à remplacer le $si+$, par une fraction plus simple : il suffit de considérer le si comme étant la quinte du mi.

$$si = \frac{3}{2} \cdot mi = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot f_0 = \frac{15}{8} \cdot f_0.$$

Nous obtenons ainsi une gamme complète, beaucoup plus simple que celle de Pythagore, basée sur les harmoniques naturelles : la gamme de Zarlino.

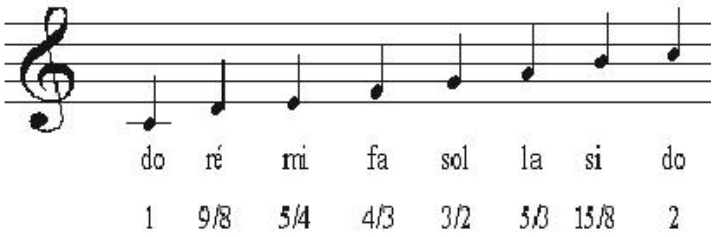

Figure 7

Nous avons défini la sixte majeure comme étant le rapport entre le *la* et le *do*, 5/3. L'inverse de ce rapport, du *la* au *do* supérieur, s'appelle la *tierce mineure* :

$$\frac{do^2}{la} = \frac{2}{\frac{5}{3}} = 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}.$$

$$\textbf{Tierce mineure} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{6}{5}.$$

La tierce mineure de *do* est le *mi* bémol, ce qui nous amène à définir le bémol de la façon suivante :

$$\frac{mi\,b}{do} = \frac{6}{5}, mi\,b = \frac{6}{5} \cdot f_0.$$

$$\frac{mi\,b}{mi} = \frac{\frac{6}{5} \cdot f_0}{\frac{5}{4} \cdot f_0} = \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

Dans la gamme de Zarlino, le bémol est défini comme étant ce rapport et est utilisé en descendant.

$$\textbf{Bémol harmonique} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{24}{25}.$$

Le *demi-ton mineur* est l'inverse de ce rapport :

$$\frac{mi}{mi\,b} = \frac{25}{24}.$$

$$\textbf{Demi-ton mineur} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{25}{24}.$$

Nous avons défini la sixte majeure comme étant l'inverse de la tierce mineure ; de même, nous définissons la *sixte mineure* comme étant l'inverse de la tierce majeure :

$$\frac{do^2}{mi} = \frac{2 \cdot f_0}{\frac{5}{4} \cdot f_0} = \frac{8}{5}.$$

$$\textbf{Sixte mineure} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{8}{5}.$$

Le rapport entre le *do* et le *si* s'appelle le *demi-ton majeur* :

$$\frac{do^2}{si} = \frac{2 \cdot f_0}{\frac{15}{8} \cdot f_0} = \frac{16}{15}.$$

$$\textbf{Demi-ton majeur} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{16}{15}.$$

Ce rapport est le même entre le *mi* et le *fa* :

$$\frac{fa}{mi} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{16}{15}.$$

La gamme de Zarlino est donc constituée de la suite de rapports harmoniques suivants.

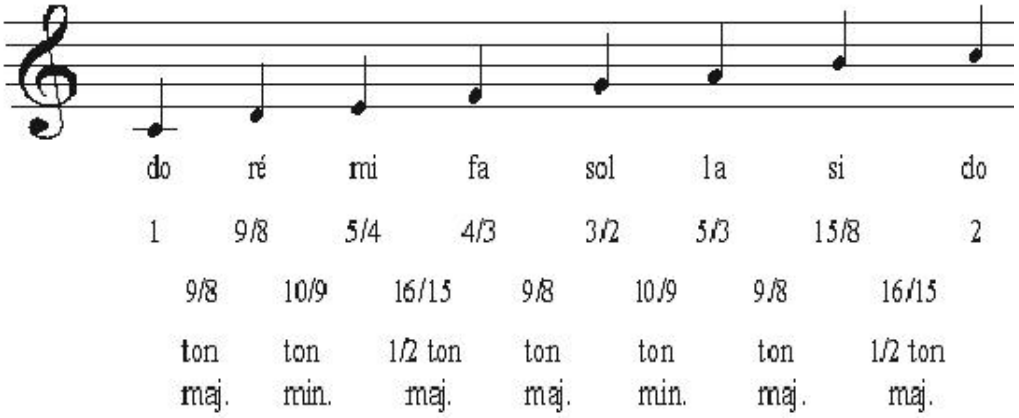

Figure 8

Le rapport entre un ton majeur et le ton mineur est le + que nous avions défini dans la gamme de Pythagore : c'est le *comma harmonique* :

$$\frac{\text{ton majeur}}{\text{ton mineur}} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{10}{9}} = \frac{81}{80}.$$

Cette gamme, basée sur l'introduction de la tierce majeure, provoquée par l'adjonction de la quatrième harmonique naturelle, fut mise au point par Zarlino et se généralisa dans toute la musique occidentale à partir de la Renaissance.

Malheureusement, son architecture n'est pas aussi symétrique que celle de la gamme de Pythagore qui est constituée de deux tétracordes identiques séparés par un ton majeur. Un tétracorde est une suite de quatre sons.

La gamme de Zarlino est constituée de trois tons majeurs (9/8), deux tons mineurs (10/9) et de deux demi-tons majeurs (16/15). Elle est moins symétrique que celle de Pythagore et admet ainsi beaucoup plus de modes différents ; cependant, elle permet de faire entendre l'*accord parfait majeur do-mi-sol*, qui sera la base de tout le développement harmonique de notre musique occidentale.

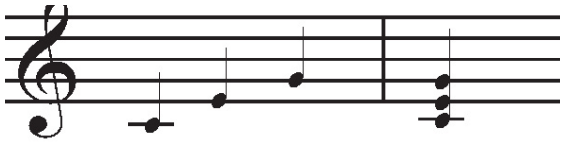

Figure 9

Cette gamme permet donc une polyphonie plus riche. On peut faire entendre plusieurs notes de la gamme simultanément sans que cela soit désagréable.

Problèmes de la gamme de Zarlino

Les quintes de la gamme de Zarlino ne sont pas toutes exactes ; par exemple, la quinte $ré - la$:

$$\frac{la}{re} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{9}{8}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{40}{27} = 1,4815\ldots < 1,5.$$

Ce rapport est plus petit que 3/2. En fait, comme on l'a vu dans la gamme de Pythagore, pour que la quinte soit juste, il faut aller chercher le $la+$, 27/16. Les autres quintes : *do-sol, mi-si, fa-do* sont exactes.

Le second problème rencontré avec l'utilisation de cette gamme fut la modulation, c'est-à-dire le passage d'une tonalité à une autre.

Les luthistes avaient popularisé les suites de pièces qu'on jouait dans une même tonalité[1]. Mais on finit par se lasser de toujours jouer des pièces en do majeur, même si le nombre de pièces possibles est infini !

Même à l'intérieur d'une pièce en do majeur, par exemple, il devint ennuyant de s'en tenir uniquement aux sept notes de la gamme. L'attrait de la dominante (la cinquième note

[1] Il est toujours très laborieux d'accorder un luth : on coince les cordes avec des chevilles coniques en bois ; toutes les cordes sont doubles, sauf la plus aïguë, (un luth baroque pouvait avoir jusqu'à 26 cordes). C'est un travail de bénédictin que d'accorder un tel instrument. Donc, une fois accordés, les luthistes jouaient assez longtemps dans cette tonalité, histoire de ne pas passer la moitié de leur vie à s'accorder, comme le veut la légende.

de la gamme, la quinte) devint de plus en plus fort au fur et à mesure du développement de l'harmonie. Il devint fréquent de reprendre le thème du début une quinte plus haut, le thème devait ainsi être joué en sol majeur ; c'est ce qu'on appelle une modulation.

Une autre tendance était de diviser la pièce en sections, chacune ayant une tonalité propre. Par exemple, dans une pièce en do majeur, la deuxième partie pouvait être en sol majeur pour revenir à la fin en do majeur ; c'est un peu la forme tripartite si chère à l'époque classique. Prenons par exemple cette sonate de Domenico Scarlatti (1685-1757), la pièce est en sol majeur :

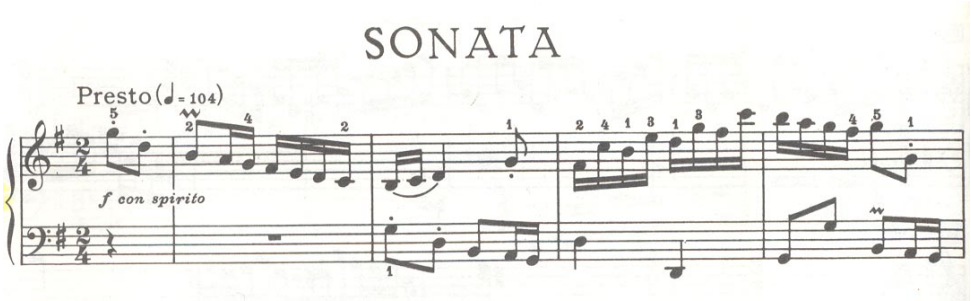

Figure 10

Le début de la deuxième partie reprend le même thème à la quinte supérieure :

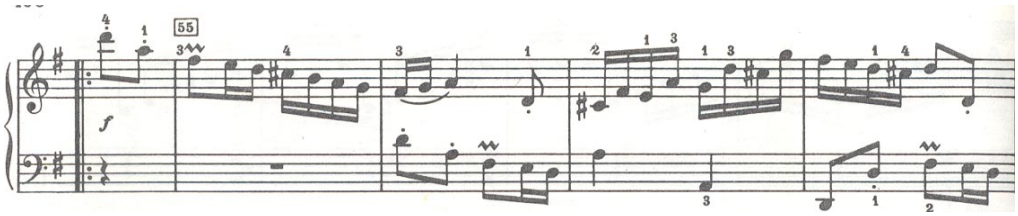

Figure 11

Le thème est donc transposé en *ré* majeur ; le *do* est alors affecté d'un dièse. Voyons maintenant la définition du dièse.

Le problème avec la gamme de Zarlino c'est que les notes de la gamme de *do* ne donnent pas une gamme de *sol* exacte : les intervalles de la gamme originale ne coïncident pas avec la gamme de Zarlino construite sur le *sol*. En d'autres mots, les intervalles ne sont pas conservés par les translations.

Examinons cela de plus près.

La gamme de Zarlino construite sur *do* est la suivante :

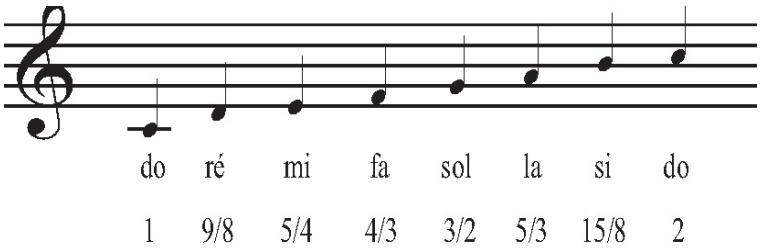

Figure 12

Construisons la gamme de Zarlino sur le *sol* :

$$la = \frac{9}{8} \cdot sol = \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} \cdot do = \frac{27}{16} \cdot do$$

qui est le $la+$ de la gamme de Pythagore construite sur *do* ; le *la* de la gamme de *do* n'est donc pas juste quand on joue en *sol*, il est trop bas d'un comma $\left(\frac{81}{80} = +\right)$.

$$si = \frac{5}{4} \cdot sol = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot do = \frac{15}{8} \cdot do$$

qui est le même que dans la gamme de *do* ; le *si* est donc juste dans les deux tonalités.

La quarte du *sol* (le *do*) est évidemment exacte puisqu'elle est commune aux deux gammes, le *sol* ayant été défini comme la quinte de *do* et la quarte étant l'inverse de la quinte.

La quinte du *sol* (*ré*) sera aussi exacte puisque la note *ré* a été définie comme étant justement la quinte de *sol*, c'est-à-dire la deuxième quinte de *do* :

$$mi = \frac{5}{3} \cdot sol = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot do = \frac{5}{2} \cdot do$$

qui est exactement l'octave du *mi* de la gamme de *do* ; cette note est donc juste.

Nous arrivons maintenant au problème de la définition du dièse ; la note qui suit doit être :

$$\frac{15}{8} \cdot sol = \frac{15}{8} \cdot \frac{3}{2} \cdot do = \frac{45}{16} \cdot do$$

ce qui devrait nous donner un $fa\#$ égal à :

$$fa\# = \frac{45}{32} \cdot do.$$

Ce $fa\#$ correspond à la quinte exacte du *si*, 15/8, mais le rapport entre le $fa\#$ et le fa ne donne pas le demi-ton majeur comme on aurait pu l'espérer :

$$\frac{fa\#}{fa} = \frac{\frac{45}{32}}{\frac{4}{3}} = \frac{45}{32} \cdot \frac{3}{4} = \frac{135}{128}.$$

Ainsi, la gamme de Zarlino construite sur le *sol* nous donne :

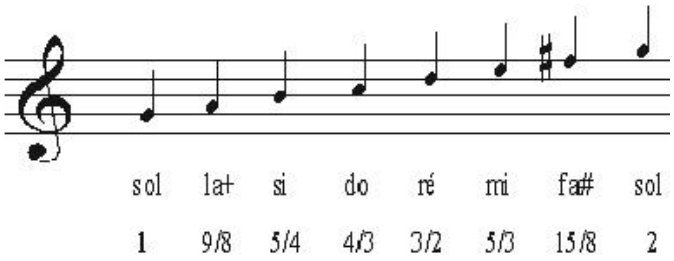

Figure 13

La seule note de cette gamme qui n'est pas exacte en *do* est le *la*. Il était donc possible de moduler à la dominante sans trop de problème.

Rameau, dans sa théorie de l'harmonie, nous indique les tonalités dans lesquelles il est prescrit de moduler. Par exemple, les tons voisins de *do* sont :

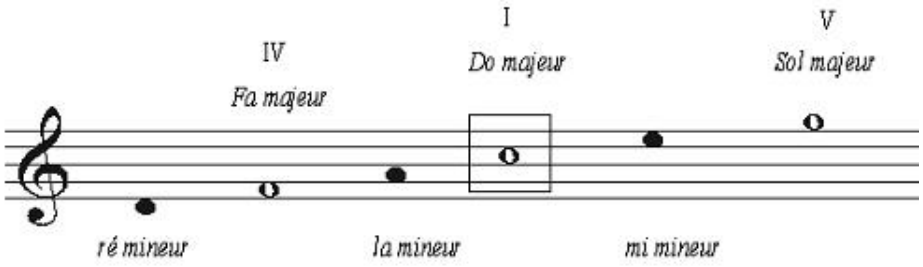

Figure 14

Les deux tonalités voisines de *do* majeur sont *sol* majeur (V^{e} degré), la dominante, et fa majeur (IVe degré) qui est la quinte inférieure de *do*. Le fa qui est le quatrième degré de la gamme de *do* est appelé la *sous-dominante*.

En admettant les relatifs mineurs de ces trois tonalités, on obtient six tonalités. Il n'y a pas trop de problèmes à moduler entre ces tonalités puisque chacune de ces gammes ne contient au plus qu'une note pas tout à fait juste. À chaque fois qu'on s'éloigne d'une quinte

dans les modulations, on introduit une note qui n'est pas juste, ce qui limite quelque peu les modulations.

Mais l'esprit inventif des humains est tel que jamais il n'accepte bien longtemps les contraintes. Les musiciens avaient souvent le goût de moduler dans des tons de plus en plus éloignés. Bach s'était fait avertir par ses supérieurs de ne pas moduler trop loin dans ses improvisations à l'orgue ; cela nuisait à la concentration des fidèles.

Le dièse et le bémol

Revenons à la définition du dièse que nous avons rencontré lors de la construction de la gamme de Zarlino sur le *sol*.

$$\frac{fa\#}{fa} = \frac{\frac{45}{32}}{\frac{4}{3}} = \frac{45}{32} \cdot \frac{3}{4} = \frac{135}{128}.$$

$$\textbf{Dièse harmonique} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{135}{128}.$$

Ce rapport harmonique est plus petit que le demi-ton majeur :

$$\frac{135}{128} \approx 1,0547 \text{ et } \frac{16}{15} \approx 1,0667.$$

Avec cette définition, le $mi\#$ est plus bas que le fa :

$$mi\# = \frac{135}{128} \cdot mi = \frac{135}{128} \cdot \frac{5}{4} \cdot do = \frac{675}{512} \cdot do$$

$$\frac{675}{512} \approx 1,3184 \text{ et } fa = \frac{4}{3} \cdot do \approx 1,3333 \cdot do$$

Le $fa\ b$, quant à lui, a la valeur suivante :

$$fa\,b = \frac{24}{25} \cdot fa = \frac{24}{25} \cdot \frac{4}{3} \cdot do = \frac{32}{25} do = 1,28 \cdot do.$$

On obtient ainsi la relation d'ordre suivante :

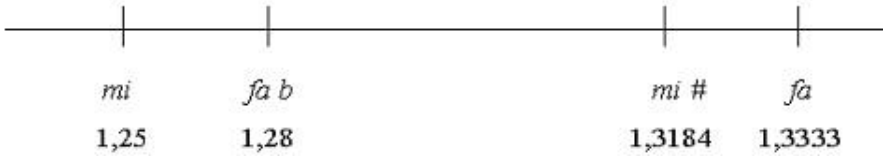

Figure 15

Le mode mineur

Le mode mineur, l'éolien des modes grecs, s'obtient en faisant une gamme à partir du *la* en utilisant les notes de la gamme de *do* :

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do	Ré	Mi	Fa	Sol	la
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2	9/4	5/2	8/3	3	10/3

Cela nous donne la gamme suivante :

la	si	do	ré	mi	fa	sol	la
1	9/8	6/5	27/20	3/2	8/5	9/5	2

Le rapport entre le *do* et le *la* est le tierce mineure (6/5) qui caractérise le mode mineur. Le rapport entre *ré* et *la* n'est pas une quarte juste, il est légèrement supérieur à 4/3 $\left(\frac{27}{20} = 1,35\right)$. Il faut prendre le *ré*– pour que la quarte soit respectée. On définit le – comme étant l'inverse du +.

$$ré- = \frac{80}{81} \cdot ré = \frac{80}{81} \cdot \frac{27}{20} \cdot la = \frac{4}{3} \cdot la$$

Rappelons que deux rapports harmoniques I_1 et I_2 sont l'inverse l'un de l'autre si :

$$I_1 \cdot I_2 = 2 \ ;$$

Le rapport de 8/5, entre le *fa* et le *la* est l'inverse de la tierce majeure (5/4), c'est la *sixte mineure*.

$$I_1 \cdot \frac{5}{4} = 2$$

$$I_1 = 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\textbf{Sixte mineure} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{8}{5}.$$

Le rapport de 9/5, entre le *sol* et le *la* initial est l'inverse du ton mineur (10/9), c'est la *septième majeure*.

$$I_1 \cdot \frac{10}{9} = 2$$

$$I_1 = 2 \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{5}$$

$$\textbf{Septième majeure} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{9}{5}.$$

La gamme mineure construite sur le *la* (en prenant le *ré–*) est donc constituée de la séquence suivante :

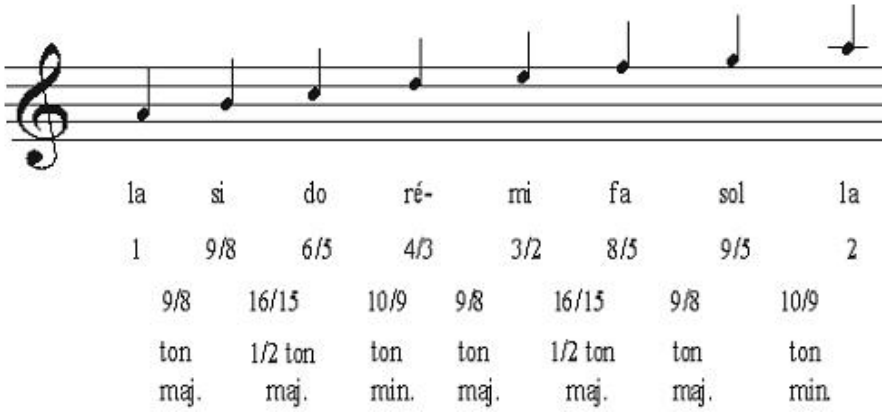

Figure 16

La définition du *ton mineur* est le rapport *sol–la* qui termine la gamme.

$$\textbf{Ton mineur} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{10}{9}.$$

Le *demi-ton mineur* est l'inverse du bémol :

$$\textbf{Demi-ton mineur} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{25}{24}.$$

On peut établir les relations suivantes :

$$\text{limma} + = \text{demi-ton majeur}$$
$$\frac{256}{243} \cdot \frac{81}{80} = \frac{16}{15}.$$

Rappelons que le limma pythagoricien, que nous avons vu dans le deuxième article, correspond au rapport entre le do^2 et le $si+$.

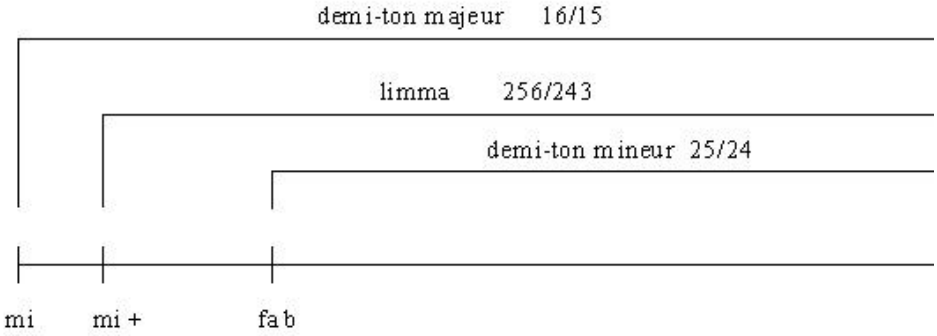

Figure 17

$$\text{ton mineur} + = \text{ton majeur}$$

$$\frac{10}{9} \cdot \frac{81}{80} = \frac{9}{8}$$

et,

$$\text{demi-ton mineur} + =$$

$$\frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80} = \frac{135}{128}.$$

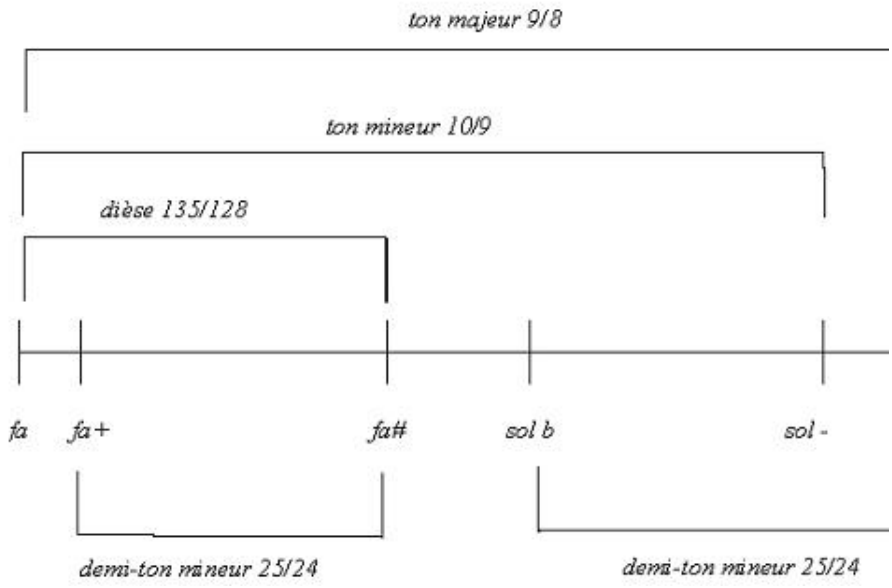

Figure 18

Les principaux rapports harmoniques		
Note	Rapport harmonique avec do	Fraction
do	unisson	1
do +	comma	81/80
do#–	demi-ton mineur	25/24
do#	dièse	135/128
ré b–	demi-ton majeur	16/15
ré b	demi-ton majeur fort	27/25
ré –	ton mineur	10/9
ré	ton majeur	9/8
mi b	tierce mineure	6/5
mi	tierce majeure	5/4
mi+	diton (tierce majeure Pyth.)	81/64
fa	quarte	4/3
fa+	quarte forte	27/20
fa#	quarte augmentée (triton)	45/32
sol b	quinte diminuée	36/25
sol	quinte	3/2
la b	sixte mineure	8/5
la	sixte majeure	5/3
la+	sixte de Pythagore	27/16
si b–	septième mineure faible	16/9
si b	septième mineure	9/5
si	septième majeure	15/8
si+	septième majeure Pythagore	243/128
do	octave	2

La gamme tempérée

Dans la gamme de Zarlino, les quintes sont toutes différentes et les accords ne sont justes que si l'on est dans le ton de la note fondamentale. Par exemple, en *do*, l'accord majeur est *do-mi-sol*, ce qui représente les rapports 1 – 5/4 – 3/2. Par contre, l'accord de *ré* majeur est *ré-fa#-la*. Dans la gamme de *do*, ces notes sont 9/8 – 45/32 – 5/3, ce qui donne comme rapports harmoniques 1 – 5/4 – 40/27.

Un instrument accordé en *do* sonne légèrement faux si on joue en *ré*.

Mais même à l'intérieur d'une pièce, les musiciens, de plus en plus audacieux, avaient pris l'habitude de passer d'une tonalité à l'autre et souvent dans des tonalités assez éloignées. Un compositeur comme Scarlatti, par exemple, n'avait pas peur d'introduire dans ses sonates des modulations surprenantes ; de tels sauts harmoniques exigeaient un clavecin accordé selon un tempérament assez égal, c'est-à-dire qu'il devait sonner assez juste dans plusieurs tonalités.

Le problème consistait à accorder l'instrument de telle sorte que les quintes soient à peu près toutes égales ; il s'agissait de répartir le comma pythagoricien sur l'ensemble des 12 quintes du cycle complet des quintes.

De nombreuses solutions avaient été proposées, entre autres par Kepler et Euler. Mais elles demeuraient insatisfaisantes puisque certaines modulations étaient toujours impossibles. C'est un mathématicien flamand, Simon Steven, qui le premier accorda un monocorde en tempérament égal, c'est-à-dire une gamme composée de douze demi-tons exactement égaux. C'est ce qu'on a appelé la gamme tempérée. Évidemment, cela s'appliquait surtout aux instruments qui jouent des notes fixes comme le clavecin, l'orgue et la guitare, mais non aux instruments de la famille du violon, ni au luth, sur lequel les frettes ne sont que des cordes enroulées autour du manche et que l'on peut déplacer.

Mersenne avait déjà calculé un tempérament égal dans son *Harmonie universelle* paru en 1636. Son usage fut adopté dans le nord de l'Allemagne dès le XVIIe siècle et on l'entendit pour la première fois sur l'orgue construit par Arp Schnitger à Hamburg en 1692. C'est pourquoi Bach pouvait se permettre dans ses pièces pour orgue de moduler dans des tons très éloignés. L'Angleterre fut un des derniers pays à accepter ce tempérament ; aucun des orgues montrés à la Grande Exposition en 1851 n'était accordé selon ce principe.

Bach adopta ce système à tous ses instruments à clavier : clavecin, épinette, clavicorde et orgue. Il donna ses lettres de noblesse à ce système en composant deux séries de 24 préludes et fugues dans tous les tons, montrant ainsi ce que l'on pouvait faire avec un clavier bien tempéré.

(prelude en do bach.mp3)

Mathématiquement, la gamme tempérée est telle que si $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{11}$ sont les fréquences des douze demi-tons de la gamme, alors

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = \cdots = \frac{f_{11}}{f_{10}}.$$

Si ε représente ce rapport commun, alors

$$\frac{f_1}{f_0} \cdot \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{f_3}{f_2} \cdot \cdots \cdot \frac{f_{11}}{f_{10}} \cdot \frac{f_{12}}{f_{11}} = \frac{f_{12}}{f_0} = 2;$$

$$\varepsilon^{12} = 2;$$

$$\varepsilon = \sqrt[12]{2} = 2^{1/12} = 1,059463094\ldots$$

Ce rapport est un nombre irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'exprimer comme une fraction ; ce n'est pas un rapport harmonique naturel.

Il en découle qu'aucun rapport dans cette gamme n'est harmonique, sauf évidemment l'octave. Par exemple, la quinte *do-sol* est égale à ε^7 puisqu'il faut sept demi-tons pour aller à la quinte :

$$do - do\# - ré - ré\# - mi - fa - fa\# - sol.$$

Et ce nombre est aussi un nombre irrationnel, comme la plupart des puissances de ε. En fait,

$$\varepsilon^7 = 1,498307073\ldots$$

La différence entre cette quinte tempérée et la quinte harmonique peut ne pas sembler grande, mais si on calcule les fréquences à partir du *do* 256, cela donne une fréquence de 383,57 pour la quinte tempérée et 384 pour la quinte harmonique, ce qui cause 0,43 battements par seconde, donc un battement par deux secondes environ. Cela n'est pas trop gênant. Mais si on refait les mêmes calculs à partir du *la* 440, on obtiendra alors des battements qui seront d'environ un par seconde, ce qui dérange un peu plus.

Dans la gamme tempérée, aucun rapport n'est juste sauf l'octave.

Beaucoup de guitaristes ignorent cette propriété et s'accordent avec les harmoniques, ce qui leur cause de légers problèmes de justesse dans les notes élevées. Mais il faut dire que les problèmes de justesse sont nombreux sur une guitare ; la pression exercée sur la corde et la hauteur de la corde au-dessus du manche sont des facteurs plus importants.

Dans la gamme tempérée, un dièse ascendant est équivalent au bémol de la note supérieure ; un double dièse ou un double bémol ne sont utilisés que pour mettre en évidence l'harmonie.

De plus, l'harmonie occidentale n'a conservé que deux modes : le majeur et le mineur. Il y a donc uniformisation à tous les niveaux. Seuls ceux qui ont l'oreille absolue peuvent vraiment voir une différence entre *do* majeur et *ré* majeur, surtout que le diapason a changé au cours des âges. Par exemple, les instruments anciens sont souvent accordés un demi-ton plus bas que le *la* 440 ; il en résulte qu'un *do dièse* majeur de l'époque sonne à peu près comme un *do* majeur moderne. Il faut beaucoup d'imagination pour voir toutes les couleurs que semblent voir certaines personnes dans les différentes tonalités. Dans le système tempéré, que l'on pourrait qualifier de scientifique, il n'y a strictement aucune différence, ce sont de pures translations ; si on n'a pas l'oreille absolue, on ne peut percevoir de différence.

Le triton, « Diabolus in musica »

Les rapports de tierce majeure et de tierce mineure furent considérés à partir de la Renaissance comme consonants ; de même pour leur inverse respectif, la sixte majeure et la sixte mineure, qui apparaissent lors des renversements des accords majeurs.

Mais le rapport qui fut longtemps considéré comme étant le plus dissonant est le triton ou quarte augmentée : le rapport $fa - si$. Il était nommé *Diabolus in musica* et représentait le diable.

Toute la musique de Bach, surtout la musique sacrée, est truffée de symboles musicaux que les auditeurs de l'époque savaient décoder. Par exemple, une descente aux enfers pouvait être représentée par une descente chromatique (un demi-ton à la fois) ou une chute d'une septième majeure. Le diable, lui, était personnifié par le triton.

Un exemple parmi tant d'autres : la magnifique fugue de la seconde suite pour luth transcrite ici pour guitare.

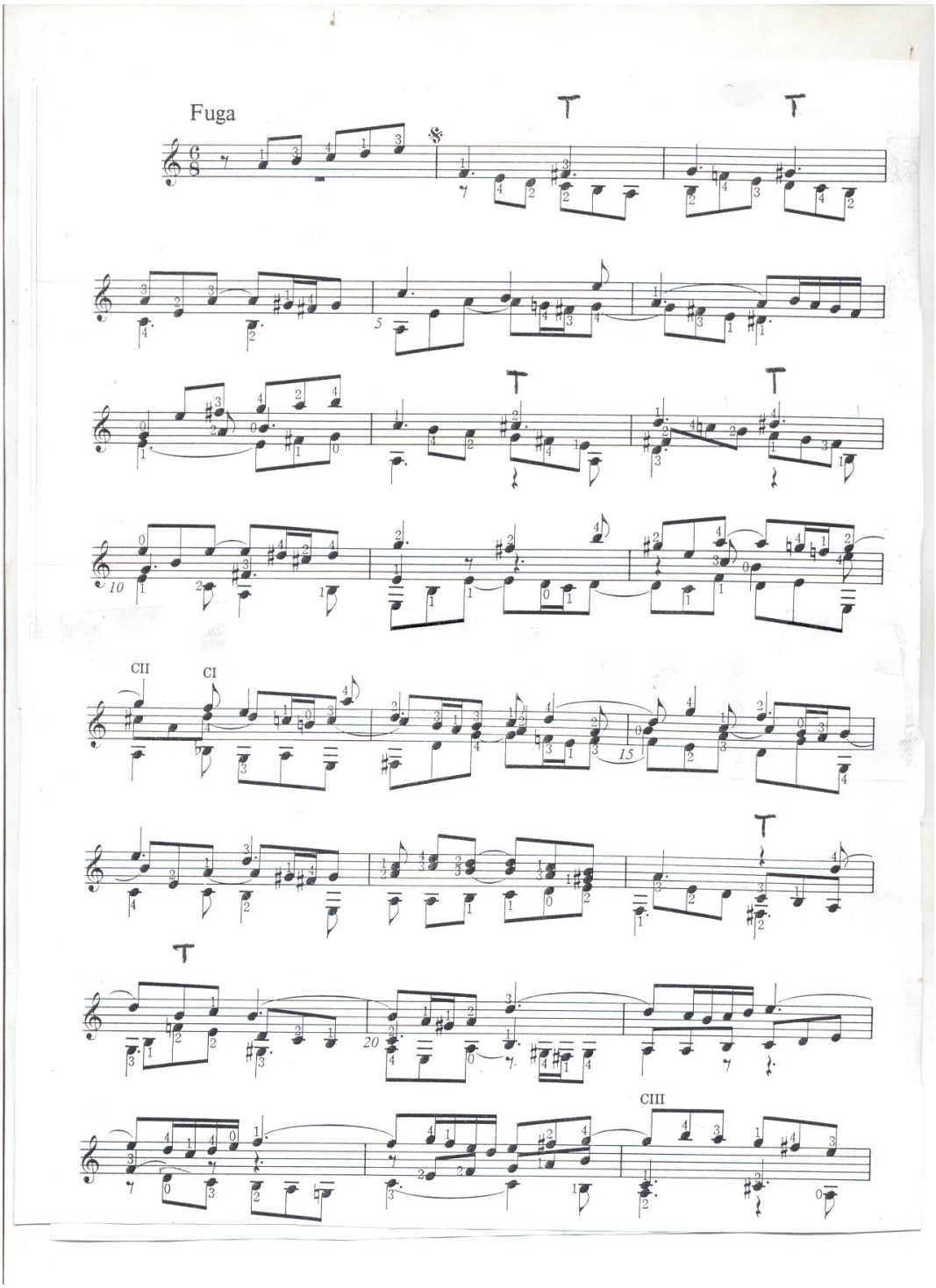

Figure 19a

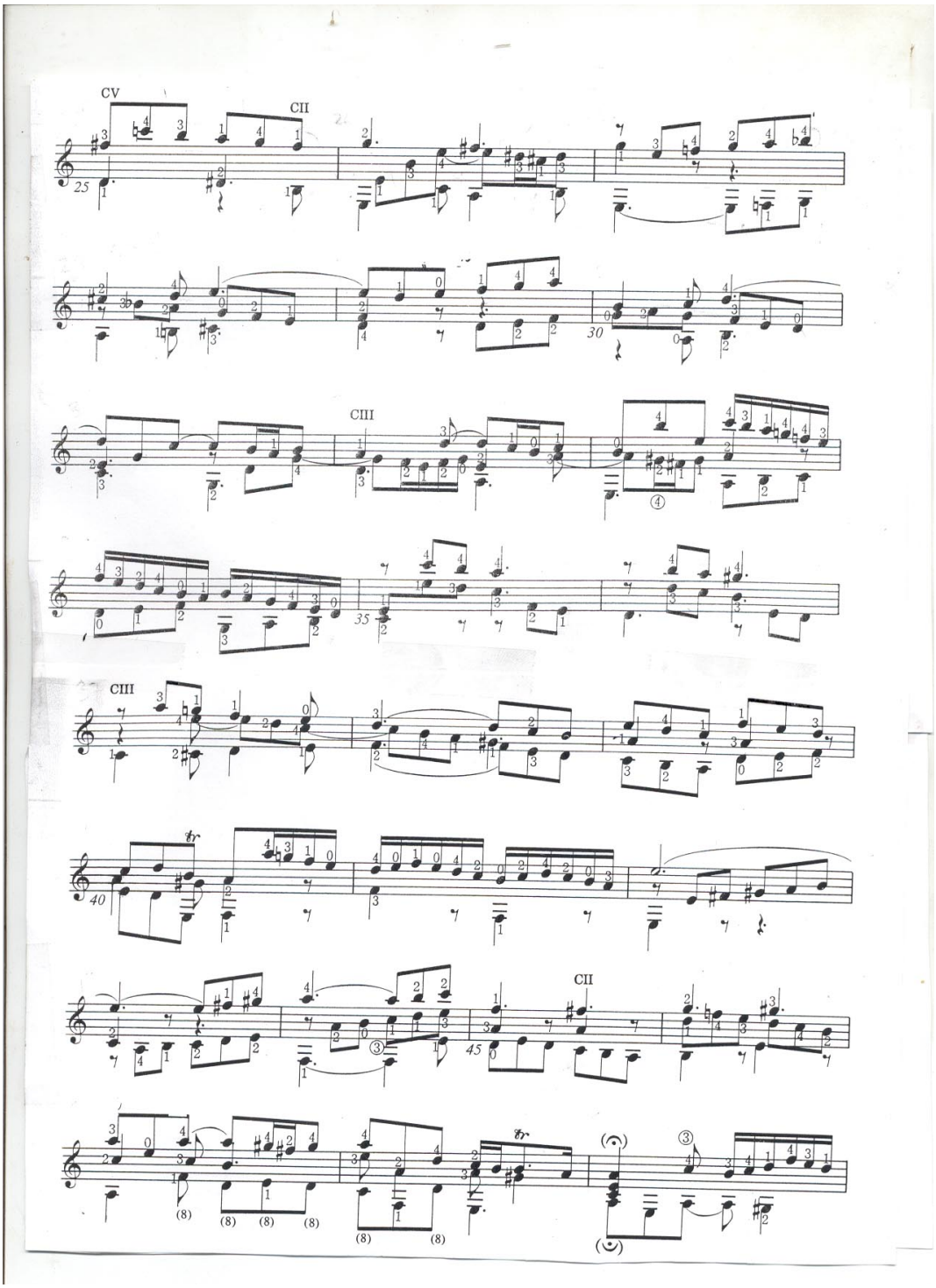

Figure 19b

La pièce débute par une montée qui tout à coup chute d'une septième majeure (descente aux enfers) suivi d'une descente avec rencontre du diable (les tritons T).

Le triton correspond à la quarte augmentée (ou quinte diminuée, dans la gamme tempérée), comme le rapport du fa au si. Il est composé de six demi-tons, c'est-à-dire trois tons. C'est le milieu géométrique de la gamme tempérée :

$$\varepsilon^6 = \left(2^{1/12}\right)^6 = 2^{6/12} = 2^{1/2} = \sqrt{2}.$$

Nous voyons donc ici la représentation mathématique du diable : $\sqrt{2}$!

Diabolicus in mathematica : c'est cette même racine carrée qui causa l'exclusion de l'adepte de la secte de Pythagore qui avait démontré que c'est un nombre irrationnel.

Références

[1] Alain Daniélou, *Traité de musicologie comparée* ; Éditions Hermann, Paris 1959.

[2] James Jeans, *Science and music* ; Dover Publications, 1968.

[3] Jean Lattard, *Gammes et tempéraments musicaux* ; Masson 1988.

[4] Émile Leipp, *Acoustique et musique* ; Masson 1984.

[5] Frederick Saunders et al., *Sons et musique* ; Pour la Science, Bélin 1980.