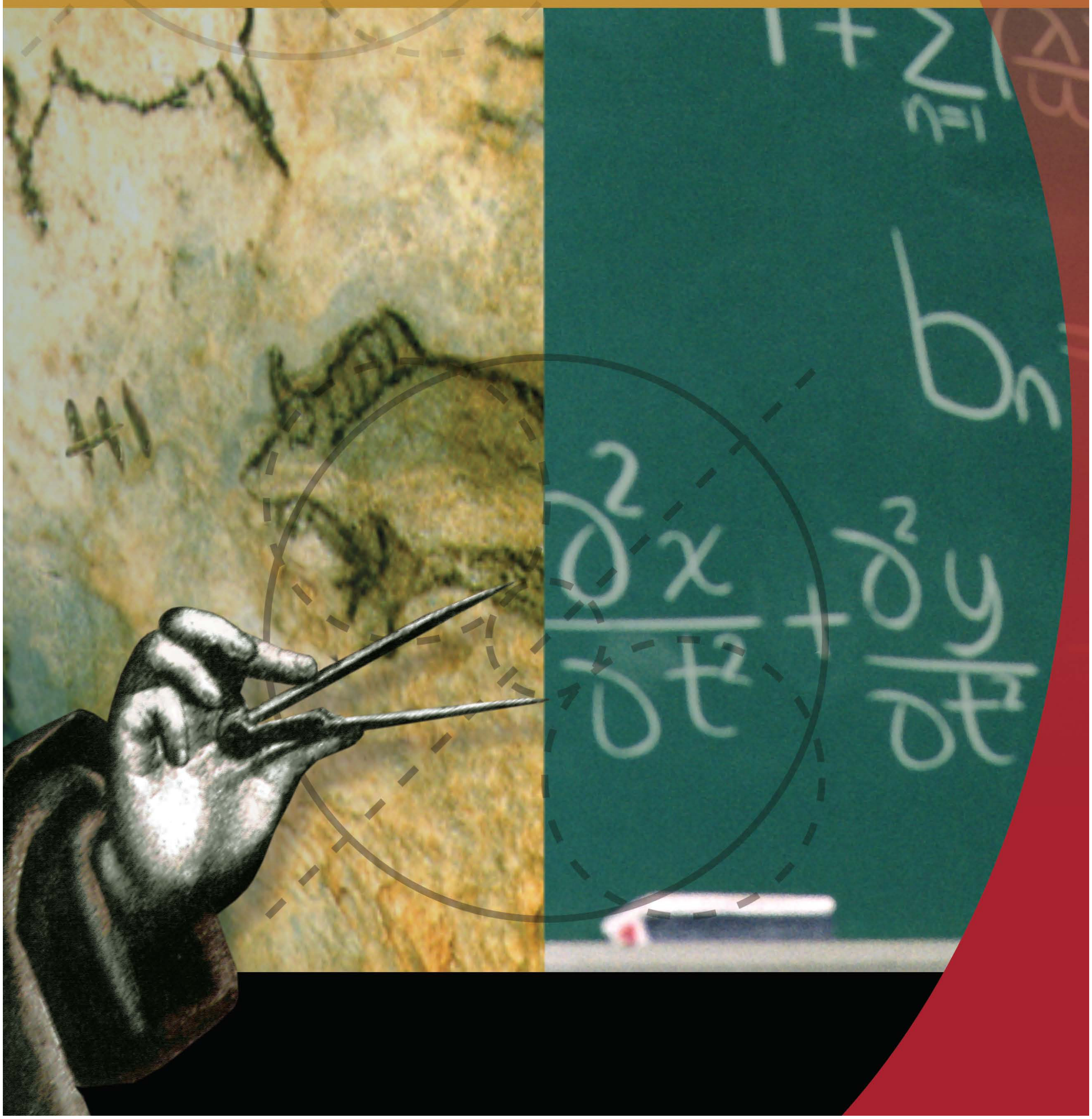
Bulletin AMQ

Association mathématique du Québec

Décembre 2005



Membres du comité de rédaction

Fernand *Beaudet* (rédacteur en chef), Cégep de Saint-Hyacinthe (450) 773-6800, poste 395, fbeaudet@cegepsth.qc.ca ;

Robert *Bilinski*, Cégep Montmorency (450) 975-6445, rbmatab@netscape.net ;

Driss *Boukhssimi*, UQAT (819) 762-0971, poste 2227, driss.boukhssimi@uqat.uquebec.ca ;

Bernard *Courteau*, professeur retraité, Université de Sherbrooke (819) 563-5209, courteaub@videotron.ca ;

Diane *Demers*, Collège de Maisonneuve (514) 254-7131, poste 4725, ddemers@cmaisonneuve.qc.ca ;

Matthieu *Dufour*, UQAM (514) 987-3000 poste 7791, dufour.matthieu@uqam.ca ;

Louis-Philippe *Giroux*, Collège Jean-de-Brébeuf (514) 342-9342, poste 5481, lpgiroux@brebeuf.qc.ca ;

Marie-Jane *Haguel*, Collège de Sherbrooke (819) 564-6350, mijoh@allstream.net ;

Hélène *Kayler*, UQAM (514) 739-2126, kayler@math.uqam.ca ;

Jean *Turgeon*, Université de Montréal (514) 343-7178, turgeon@dms.umontreal.ca

Paul *Toutounji*, École secondaire Henri-Bourassa (514) 328-3200 poste : 3265, touts71@hotmail.com

Réviseur : Jean-Claude Girard, Cégep de Saint-Jean-sur-Richelieu, Jean-Claude.Girard@cstjean.qc.ca

Politique de rédaction

Dans chaque numéro du *Bulletin AMQ* on retrouve un éditorial circonstancié, des chroniques de nature mathématique, des textes d'information et des articles de fond.

Les articles de fond doivent normalement ses situer à l'intérieur de l'un des trois thèmes du *Bulletin AMQ* : mathématiques, didactique des mathématiques, informatique appliquée à l'enseignement ou à l'apprentissage des mathématiques. En général, ils ne doivent pas avoir été publiés dans une revue. Toutefois, il pourrait y avoir des exceptions qui seront étudiées par le Comité de rédaction.

Les articles parus dans le *Bulletin AMQ* peuvent être reproduits avec la mention de la source. Les auteurs cèdent à l'AMQ toute redevance qui, leur étant due en vertu des lois touchant aux droits d'auteur, provient de toute utilisation pouvant être faite de leurs textes publiés dans le *Bulletin AMQ*.

Montage de la couverture effectué à partir d'une affiche de Marie-Claude Asselin. `www.conceptionmc.com`.

Mise en page par Marie-Claude Côté.

Table des matières

Bulletin AMQ Vol. XLV, n° 4, décembre 2005

Éditorial

AMQ en action

49e Congrès de l'AMQ

Article

Chroniques

Éditorial

Jean-Marie De Koninck
président

L'année 2005 a été riche pour l'AMQ. Mon prédecesseur Jean Dionne avait amorcé une importante réforme qui a été adoptée au congrès annuel de 2004 tenu à Lévis. Celle-ci avait pour principal objectif de traverser une période financière difficile pour notre organisme. Cette réforme nous a obligé à tenir les congrès sur une seule journée et, à notre corps défendant, à faire passer le Bulletin en mode virtuel le temps que notre situation financière redevienne normale.

Le congrès tenu en octobre 2005 au collège Brébeuf a connu un franc succès, avec plus de 140 participants. Les diverses réactions indiquent qu'avec ce nouveau format (exposés plus courts, agenda plus serré), nous détenons une formule gagnante. Un merci spécial aux organisateurs : Vincent Papillon, Anik Soulière, Marie-Claude Périgny, Louis-Philippe Giroux, Paul Dumais, Marie-Isabelle Hodgson, Josée Bérubé, Jacinthe Granger-Piché et Bernard Fraser.

Le Bulletin a été cette année publié sous forme électronique. Évidemment, cette mesure rendue financièrement nécessaire a attristé plusieurs membres. Le rédacteur en chef, Fernand Beaudet, a accompli un travail colossal dans la réorganisation complète du Bulletin si bien qu'il est maintenant possible de revenir à une version papier. Tous les bulletins de 2005 seront acheminés par le courrier postal à tous les membres très bientôt. La version électronique continuera d'être publiée sur le site Internet de l'AMQ (`www.amq.math.ca`), où on peut d'ailleurs trouver dès maintenant les articles dans un format uniforme LaTeX. Un grand merci à Fernand !

Le camp mathématique 2005 de l'AMQ, version collégiale, s'est tenu pour la dernière fois cette année à l'UQAM. Pierre Bouchard en était à sa 5^{e} année comme grand responsable ; soulignons qu'il a toujours su maintenir un très haut niveau de qualité. Pour beaucoup d'anciens participants, leur passage au camp de l'AMQ a été crucial dans la genèse de leur goût d'entreprendre des études plus avancées en mathématiques. Vous trouverez les informations sur le camp mathématique 2005 à la page : `www.campmath.uqam.ca`. Le flambeau passe maintenant à l'Université Bishop's, sous la direction de François Huard et Pierre-Yves Leduc. Gilbert Labelle (UQÀM) s'occupera aussi de la rédaction du concours, une tâche réalisée avec brio depuis huit ans par Jacques Labelle (UQÀM). Jacques et ses collaborateurs ont su maintenir un concours original et mathématiquement stimulant. D'ailleurs, les dernières versions du concours, soit toutes celles depuis 1995, seront bientôt accessibles sur notre site Internet, ce qui rendra plus facile l'entraînement mathématique de nos cégepiens. Au niveau secondaire, le camp 2005 s'est tenu encore une fois cette année au Cégep de Rimouski. Ce camp est organisé par le Carrefour des Sciences et des Technologies sous le parrainage de l'UQAR, du Cégep de Rimouski et de la Commission scolaire des Phares, sous la direction conjointe de Philippe Etcecopar et de madame Roselyne Escarras (site Internet : `www.csteq.com/pages_htm/camp/page.htm`). Le prochain camp aura lieu au même endroit. Il est important de souligner ici l'importante contribution financière de la Société mathématique du Canada, un soutien essentiel à la réalisation des derniers camps du niveau secondaire ainsi que celui de l'été 2006.

Exceptionnellement, le prochain congrès de l'AMQ aura lieu à Sherbrooke les 30, 31 mai et 1er juin 2006. Ce sera un congrès conjoint avec l'EMF (Espace mathématique francophone) et le GRMS (Groupe des responsables en mathématiques au Secondaire). Chacun peut déjà s'inscrire via le site Internet de l'AMQ. À l'automne 2006, nous reprenons nos habitudes d'un congrès en automne. Celui-ci se tiendra au cégep de Shawinigan. Luc Vandal est déjà passablement occupé dans l'organisation de ce congrès, dont le thème sera "Mathématiques et énergie". Je veux également souligner le travail remarquable accompli par André Ross, année après année, dans l'édition des actes de notre congrès annuel.

L'AMQ continue de défendre les intérêts des mathématiques dans différents comités. Mentionnons à cet effet le dévouement remarquable de Bernard Courteau qui nous représente activement et efficacement au sein du CPIQ (Conseil pédagogique interdisciplinaire du Québec). Merci également à André Deschênes qui représente l'AMQ lors des diverses réunions portant sur la réforme scolaire.

Une des plus belles traditions de l'AMQ est la reconnaissance qu'elle tient à souligner par une série de prix remis à ceux et celles qui, par leurs activités académiques, ont su rehausser la qualité de l'oeuvre mathématique québécoise. Les récipiendaires des prix de l'AMQ de cette année sont Jean Dionne pour le prix Able Gauthier (personnalité de l'année), Robert Bilinski pour le prix Frère-Robert (meilleur matériel non édité), Gilles Ouellette pour le prix Adrien-Pouliot (meilleur matériel édité), Paul Lavoie pour le prix Rolland-Brossard (meilleur article publié dans le Bulletin AMQ). Signalons que le prix le Dieter-Lukenbein, décerné à la meilleure maîtrise ou au meilleur doctorat en didactique, sera remis au congrès de Sherbrooke.

Un grand merci va à tous les responsables des comités qui choisissent les lauréats des différents prix de l'AMQ, soit Frédéric Gourdeau, Jean Turgeon, Diane Demers, Fernand Beaudet et Pascale Blouin.

Il est également important de souligner le gigantesque travail accompli par les membres de l'exécutif qui voient à la bonne marche des activités de l'AMQ, soit Diane Demers, Claudine Lemoine, Lise Laurence, Robert Bilinski, Matthieu Dufour, Benoit Régis et Jean Turgeon.

En terminant, j'aimerais rappeler que le principal défi pour notre organisme demeure celui du membership. En effet, en augmentant le nombre de nos membres, non seulement nous pourrons avoir de meilleurs tarifs (pour l'affiliation, l'inscription au congrès annuel, les coûts d'impression du Bulletin, etc), mais aussi nous pourrons parler d'une voix plus forte et plus représentative lorsqu'il s'agira de défendre les mathématiques auprès des instances décisionnelles. À ce chapitre, chacun des membres actuels peut apporter sa contribution personnelle : il suffit pour chacun d'encourager ses collègues et ses amis à joindre les rangs de l'AMQ.

Souhaitons-nous une année 2006 remplie du plus grand plaisir mathématique !

AMQ en action

1) Jean-Marie De Koninck, personnalité scientifique de l'année 2005

Au nom de tous les membres de l'Association mathématique du Québec, je tiens à féliciter le président de notre Association Monsieur Jean-Marie De Koninck pour le prix de « Scientifique de l'année de Radio-Canada 2005 » qui lui a été décerné par le magazine d'actualité et de culture scientifiques « Les années lumières ». Il a reçu ce prix pour « pour avoir conçu et réalisé le projet Sciences et mathématiques en action (SMAC), dans le but d'éveiller et de renforcer chez les jeunes l'intérêt pour les mathématiques et pour les sciences ». Monsieur De Koninck est impliqué avec passion au niveau social (Opération Nez Rouge) et au niveau sportif (entraîneur et commentateur sportif en natation pour la télévision de Radio-Canada) en plus de mener une carrière académique prolifique (professeur de mathématiques à l'Université Laval depuis plus de 30 ans, auteur de plusieurs livres et de nombreux articles). Le prestige et la notoriété de Jean-Marie De Koninck sont des gages de réussite pour toutes les entreprises menées par notre Association.

Sur une note plus personnelle, j'ajouterai qu'à titre de rédacteur en chef, je côtoie Jean-Marie depuis un peu plus d'un an. J'ai découvert en lui un être passionné, chaleureux, humble et d'une très grande disponibilité, des qualités qui en font une personne remarquable.

Encore toutes nos félicitations !

2) Montrez cette mathématique que je ne saurais voir !

Ouvrage collectif[1] *dirigé par*

Richard Pallascio, UQAM et Éric Doddridge, UQAR

De nombreux jeunes ne perçoivent pas toujours l'utilité de la mathématique dans la vie, et par conséquent ne voient pas la nécessité de son apprentissage. Plusieurs idées préconçues qui circulent dans la société vont dans le sens qu'elle ne sert qu'aux sciences exactes, et encore ! L'objectif poursuivi par l'ouvrage collectif *Montrez cette mathématique que je ne saurais voir !* est, d'une part, décrire quelques applications tirées de divers secteurs de la vie humaine où la mathématique contribue à mieux nous faire comprendre et apprécier la réalité qui nous entoure et, d'autre part, illustrer où peut bien se trouver cette fichue mathématique autour de nous.

La dizaine d'auteures et auteurs qui ont produit la trentaine de courts chapitres du collectif a puisé ses idées dans divers domaines de la connaissance, contribuant à tisser des liens interdisciplinaires souvent méconnus mais combien préconisés dans les nouveaux programmes d'études. Le titre du collectif est déjà un clin d'œil à la littérature, dans une allusion à une célèbre réplique du *Tartuffe* de Molière : *Couvrez ce sein que je ne saurais voir* (Acte III, scène 2). Les domaines visités, outre la littérature, concernent le cinéma, la musique, le dessin, les jeux de hasard, la magie, la nature, l'économie, la démocratie, la démographie, l'informatique, et ainsi de suite. De même des traces de la mathématique sont repérées dans des situations diversifiées reliées à des représentations de la 4^{e} dimension, au drapeau fleurdelysé, au calendrier, à la poésie, à la reproduction des lapins et à d'autres phénomènes souvent cachés et surprenants.

C'est ainsi que France Caron, didacticienne des mathématiques à l'Université de Montréal, introduit des relations mathématiques présentes dans la confection d'une guitare (ch. 1), que Jean-Guy Sanche, enseignant retraité, indique comment les mathématiques interviennent dans la confection d'un CD de même que dans les codes barres que l'on retrouve sur tous

[1] Tous les auteurs et auteures du collectif ont renoncé à leurs droits d'auteurs, lesquels seront versés au profit des camps mathématiques offerts aux élèves du 2^{e} cycle du secondaire et du collégial, qui se seront distingués lors des concours mathématiques. Ce livre s'adresse à eux, ainsi qu'à leurs enseignantes et enseignants.

les produits commerciaux (ch. 2), et qu'Éric Doddridge, didacticien des mathématiques à l'UQAR, présente un roman rédigé sur la base d'idées mathématiques (ch. 7), présente un lien entre les courriels et les nombres premiers (ch. 9) et, en collaboration avec Matthieu Dufour, mathématicien à l'UQAM, montre les dessous de certains tours de magie expliqués à l'aide des mathématiques (ch. 3).

Jean Grignon, conseiller pédagogique retraité et maintenant romancier, présente une invention personnelle, le « timbre littéraire » (ch. 6), alors que Philippe R. Richard, didacticien des mathématiques à l'Université de Montréal, montre comment les abeilles font de la géométrie (ch. 8) et André Boileau, didacticien des mathématiques à l'UQAM, montre les dessous mathématiques à certaines manipulations quotidiennes sur notre clavier d'ordinateur (ch. 10). Jean-François Maheux, étudiant gradué à l'UQAM, révèle certains secrets liés au dessin d'objets tridimensionnels (ch. 11) et à la sauvegarde de nos codes bancaires (ch. 12) et Jacques Bordier, professeur retraité de la Téléuniversité, vulgarise divers outils mathématiques, tels l'optimisation appliquée à un problème d'horaire (ch. 13), les probabilités appliqués à des jeux de hasard (ch. 16), les théories de l'échantillonnage appliquées aux sondages d'opinion (ch. 17), et des modèles de croissance d'une population (ch. 20).

Enfin, alors qu'Anne Roy, didacticienne des mathématiques à l'UQAR, indique comment les mathématiques peuvent nous faire économiser de l'essence (ch. 19), Richard Pallascio, didacticien des mathématiques à l'UQAM, présente un algorithme pour résoudre tout *sudoku* ou. . .presque (ch. 4), de même que l'utilité des mathématiques dans le domaine du cinéma (ch. 5), un lien entre les mathématiques et les règles électorales (ch. 15), des méthodes pour prévoir des résultats sportifs (ch. 18), et des phénomènes liés aux files d'attente (ch. 14).

Dans la seconde partie du collectif, Éric Doddridge introduit des principes de représentation d'objets quadridimensionnels (ch. 21) et présente un étrange objet à une seule face (ch. 22). Il visite ensuite le drapeau fleurdelysé d'une façon nouvelle (ch. 23) et applique les mathématiques à des problèmes de calendrier (ch. 24 et 25). Il part à la découverte du fameux nombre π... dans un annuaire téléphonique (ch. 26) et croise le non moins célèbre nombre d'or. . . dans la reproduction des lapins (ch. 27). Il termine sa visite des mathématiques autour de nous dans un contexte poétique (ch. 28).

La plupart des concepts mathématiques évoqués dans ces courts chapitres ne dépassent pas les mathématiques étudiées à l'école secondaire. Mais même si la lectrice ou le lecteur n'a pas encore étudié certaines notions, les auteures et auteurs se sont donné la peine de simplifier suffisamment le contexte pour bien faire comprendre la situation-problème proposée et tenter de faire anticiper le plaisir d'apprendre ces concepts mathématiques plus tard. Un tableau synoptique évoque à la fin du collectif, les domaines touchés par les différents textes du collectif, de même que le cycle scolaire où ces concepts sont abordés, de même que les compétences disciplinaires et même transversales que leur lecture et leur approfondissement permettent de développer.

Si la lecture de ces textes peut montrer aux jeunes et aux moins jeunes une activité mathématique souvent cachée au premier abord, nous aurons atteint notre objectif !

Montrez cette mathématique que je ne saurais voir !

Collectif qui sera lancé lors des congrès d'EMF06, de l'AMQ et du GRMS, à l'Université de Sherbrooke, le 31 mai 2006.

Collaborateurs : André Boileau (UQAM), Jacques Bordier (ex-TELUQ), France Caron (U. de M.), Éric Doddridge (UQAR et SHQ), Matthieu Dufour (UQAM), Jean Grignon (romancier), Jean-François Maheux (UQAM), Richard Pallascio (UQAM), Philippe R. Richard (U. de M.), Anne Roy (UQAR), Jean-Guy Sanche (ex-TELUQ)

Préface de Jean-Marie De Koninck, personnalité scientifique de l'année de Radio-Canada

Éditeur : les éditions nouvelles

Fernand Beaudet
Pour le comité de rédaction

UN CONGRÈS EXCEPTIONNEL

CONGRÈS de l'AMQ du 31 MAI au 1 JUIN 2006 à l'UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

C'est dans un contexte exceptionnel que le prochain congrès de l'AMQ aura lieu à l'Université de Sherbrooke, les 31 mai et 1 juin 2006 sous le thème *Mathématiques et diversité culturelle*.

En effet, nous aurons une journée commune, le 31 mai, avec le 3e congrès international Espace mathématique francophone (EMF2006) et la 33e session de formation du Groupe des responsables en mathématiques au secondaire (GRMS). Le Groupe des didacticiens de la mathématique (GDM) sera également de la partie et des ateliers spécifiques seront consacrés au primaire. Les deux premiers congrès EMF ont eu lieu à Grenoble en 2000 et à Tunis en 2003, l'un des objectifs fondamentaux étant la mise sur pied d'une *francophonie mathématique* dans le domaine de l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux. Le congrès EMF2006 aura lieu du 27 au 31 mai.

Cette journée commune commencera avec une conférence de Colette Laborde sur l'utilisation des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques et, après un BBQ réunissant les participants des trois congrès, elle se terminera par une conférence multimédia *Showmath* par Jean-Marie De Koninck, le président de l'AMQ. Les ateliers des trois congrès seront ouverts à tous cette journée-là.

Le congrès de l'AMQ se poursuivra le 1 juin par des ateliers, une rencontre des coordonnateurs de départements des collèges et une table ronde avec le GRMS sur l'interface secondaire-collégial. Le congrès du GRMS se poursuit de son côté jusqu'au 2 juin.

Comme le formulaire d'inscription l'indique, nous offrons des tarifs réduits aux membres qui souhaitent participer aux deux autres congrès. Réciproquement, les participants aux autres congrès peuvent également à tarifs réduits participer au congrès de l'AMQ.

Il s'agit donc d'une occasion exceptionnelle d'échanges entre les enseignants québécois des ordres primaire, secondaire, collégial et universitaire, et de rapprochement avec les collègues de la francophonie mathématique.

Nous vous attendons donc avec plaisir les 31 mai et 1 juin 2006 à l'Université de Sherbrooke.

Le comité d'organisation : Bernard Courteau, Marie-Jane Haguel, Mario Lambert.

amq2006@USherbrooke.ca

http://www.usherbrooke.ca/mathematiques/amq2006/

Association Mathématique du Québec

49e Congrès de l'AMQ

Mathématiques et diversité culturelle

31 mai, 1 juin 2006

Université de Sherbrooke

Formulaire de présentation d'un atelier

ANIMATRICE ou ANIMATEUR

Nom et prénom : ________________________________ Tél. rés. : ( )_______________

Adresse personnelle : _____________________________ Tél. bur. : ( ) ______________

Ville : ____ Télécopie : ( ) _____________

Code postal : _________________ Courriel : ____

Fonction : ____________________ **Nom de l'institution** : ____________________________________

TITRE : ____

DESCRIPTION :____

____

____

____

____

DURÉE : 75 minutes

CLIENTÈLE VISÉE
OÉlémentaire O Secondaire O Collégial O Universitaire O Tous

MATÉRIEL REQUIS
O Aucun matériel requis O Rétro-projecteur et écran

O Ordinateur et projecteur (détails) : ____

O Autre : ____

PRIÈRE DE FAIRE PARVENIR VOTRE FORMULAIRE AU PLUS TARD LE 24 FÉVRIER 2006

Adresse postale : Congrès AMQ
Département de mathématiques
Université de Sherbrooke
Sherbrooke (Québec) J1K 2R1

Courrier électronique: amq2006@usherbrooke.ca

Site de l'AMQ : http://amq.math.ca

Inscription au 49e Congrès de l'AMQ, 31 mai et 1 juin 2006

Nom : ______________________________

Prénom : ______________________________

Adresse : ______________________________

______________________ Code Postal : ____________

Adresse électronique : ______________________________

Téléphone bur. : ______________________________

Fonction et institution : ______________________________

Ordre d'enseignement : ______________________________

(*primaire – secondaire – collégial – universitaire*)

	Avant le 31mars		Après le 31 mars	
AMQ régulier (membre en règle)*, **	250$		280$	
AMQ régulier (non membre en règle)*, **	280$		310$	
Colloque du primaire (1 journée)	75$		95$	
Colloque du primaire (1 journée) étudiant(e)	50$		70$	
AMQ étudiant(e) ou retraité(e)	150$		180$	
AMQ-GRMS*, ***	300$		330$	
AMQ-EMF-GRMS*, ***	350$		380$	
AMQ-EMF-GRMS étudiant(e) ou retraité(e)*, ***	250$		280$	
Souscription : campagne des Camps mathématiques	_______		_______	
Collectif *Montrez cette mathématique que je ne saurais voir*, éd. Pallascio-Doddridge, 18$ taxes incluses.	_______		_______	
Réservation : chambre aux Résidences universitaires 26, 27, 28, 29, 30, 31 mai, 1, 2 juin #. Tarif : chambre simple 20$ par nuitée, chambre double 33$.	_______		_______	
Total :	_______		_______	

* : *Ce tarif comprend : le dîner et le BBQ du 31 mai ; le déjeuner et le dîner du 1 juin ; les conférences et les ateliers ; les actes édités du colloque ; les pauses santé.*

** : *Ce tarif comprend la cotisation à l'AMQ jusqu'au 31 octobre 2007.*

*** : *Ce tarif donne droit de participation au congrès EMF2006 du 27 au 31 mai et à la session du GRMS du 31 mai au 2 juin. Des frais supplémentaires sont à prévoir pour les repas, sorties et banquets.*

\# : *Entourez les dates retenues.*

Chèque à l'ordre de l'AMQ __ Visa __ Master Card __ No de la carte :______________________ Date d'expiration :______________________ Signature : ______________________	Faire parvenir à l'adresse suivante : Association Mathématique du Québec 7400, Saint-Laurent, bureau 259 Montréal, (Qc), H2R 2Y1

Mathématique et musique III

Serge Robert
Cégep Saint-Jean-sur-Richelieu

Introduction

Cet article fait suite aux deux premiers articles précédemment parus dans le bulletin. Dans le premier, nous avons fait la démonstration mathématique de la loi de Mersenne donnant la fréquence d'une corde vibrante en fonction de trois paramètres : la longueur ℓ de la partie vibrante, la tension T dans la corde et la densité linéaire ρ de celle-ci :

$$f = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Cette formule peut aussi se démontrer expérimentalement en laboratoire, c'est d'ailleurs un des sujets possibles de travaux pour l'activité d'intégration en sciences de la nature. Le problème consiste à mesurer la fréquence exacte d'un son accompagné de ses harmoniques.

Dans le second article, nous avons vu comment Pythagore définissait une gamme basée sur l'accumulation successive de quintes, et nous verrons dans le présent article la définition de la gamme de Zarlino, basée sur les harmoniques naturelles, et la gamme bien tempérée, qui pourrait être considérée comme une gamme scientifique.

La gamme de Pythagore

Rappelons la définition d'harmonique que nous avons vue dans le second article : chaque note émise sur un instrument de musique est accompagnée de ses harmoniques, qui sont des sons dont les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence de cette note, dite la fondamentale.

La n^{e} harmonique d'un son de fréquence f_0 est :

$$f_n = (n+1)\cdot f_0.$$

La première harmonique est ainsi l'*octave*, un son ayant une fréquence deux fois plus élevée :

$$\textbf{Octave} : f_1 = (1+1) \cdot f_0 = 2f_0 \Rightarrow \frac{f_1}{f_0} = 2.$$

Le rapport entre la deuxième harmonique et la première est la définition de la *quinte* :

$$\textbf{Quinte} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}.$$

Comme nous l'avons vu dans le second article, la gamme de Pythagore est basée sur l'accumulation successive de quintes ; cela donne la gamme suivante :

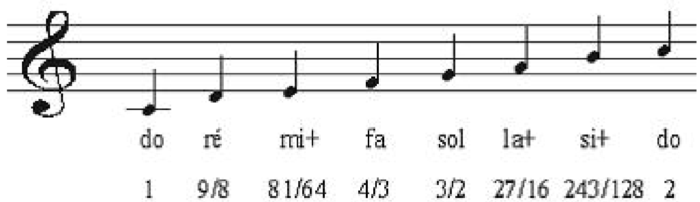


Figure 1

Les fractions sous les notes indiquent les rapports harmoniques entre une note et la fondamentale (la note de départ). Comme on va le voir dans cet article, les notes avec un + sont un peu plus hautes que celles obtenues avec les harmoniques naturelles.

La gamme de Zarlino

Cette gamme porte le nom du théoricien et compositeur italien Gioseffo Zarlino (1519-1590), qui en donna une définition dans ses deux livres *Institutioni harmoniche*, 1558, et *Dimostrationi harmoniche*, 1571.

Il n'a pas été le premier à utiliser cette gamme, mais il en a favorisé l'adoption à un moment où il devenait nécessaire de modifier la gamme de Pythagore. Elle est beaucoup plus simple que celle de Pythagore puisque les rapports harmoniques qu'elle utilise sont des fractions plus simples.

Comme on l'a vu dans le second article, la *quarte* est l'inverse de la quinte.

$$\textbf{Quarte} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{4}{3}.$$

Avec l'octave et la quinte, ces trois rapports harmoniques sont présents dans toutes les musiques, aussi bien occidentale qu'orientale. Ce sont aussi les trois rapports les plus facilement discernables par une oreille non professionnelle.

Plus deux notes ont d'harmoniques en commun, plus le rapport harmonique entre ces notes est consonant. La quarte est donc le troisième rapport par ordre décroissant de consonance, après l'octave et la quinte. Plusieurs instruments sont accordés par quartes dont les plus connus sont la guitare, la contrebasse, le luth et toute la famille des violes, tandis que les instruments de la famille du violon sont accordés par quintes.

La gamme de Zarlino est construite uniquement à partir des harmoniques d'une note dite la fondamentale. Si f_0 est la fréquence de cette note,

1) La première harmonique est l'octave : $f_1 = 2f_0$; $\dfrac{f_1}{f_0} = 2$.

2) La deuxième harmonique est la quinte au-dessus de l'octave : $f_2 = 3f_0$; $\dfrac{f_2}{f_1} = \dfrac{3}{2}$.

3) La troisième est la deuxième octave de la fondamentale : $f_3 = 4f_0$; $\dfrac{f_3}{f_0} = 4 = 2^2$.

La troisième harmonique est à la quarte de la deuxième : $\dfrac{f_3}{f_2} = \dfrac{4f_0}{3f_0} = \dfrac{4}{3}$.

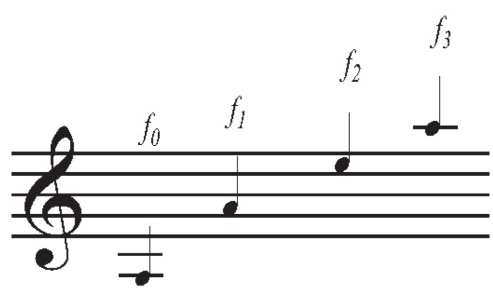


Figure 2

Ces trois rapports harmoniques, la quarte, la quinte et l'octave, sont les plus simples puisqu'ils peuvent s'exprimer avec les entiers 1, 2, 3 et 4.

À la fin du Moyen Âge, début Renaissance, l'art polyphonique se développa énormément et les compositeurs prirent la liberté de faire entendre d'autres rapports harmoniques. Par exemple, il était devenu courant de faire entendre ensemble le *do* et le *mi*.

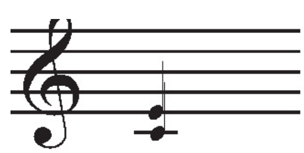


Figure 3

Ce rapport harmonique est plutôt désagréable lorsque les notes utilisées proviennent de la gamme de Pythagore puisque ce rapport est égal à 81/64 qui n'est pas une fraction simple.

Une façon plus simple d'obtenir le *mi* consiste à utiliser la quatrième harmonique :

$$f_4 = 5 \cdot f_0,$$

$$\frac{f_4}{f_3} = \frac{5}{4}.$$

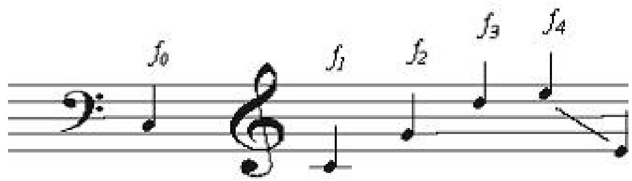


Figure 4

Ce rapport harmonique entre deux notes de fréquence f_1 et f_2 s'appelle la *tierce majeure* :

$$\textbf{Tierce majeure} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{5}{4}.$$

Ce *mi* ne correspond pas au *mi* que nous avions obtenu avec la gamme de Pythagore ; pour cette raison nous l'avions noté *mi*+.

$$\frac{mi+}{mi} = \frac{\frac{81}{64}}{\frac{5}{4}} = \frac{81}{64} \cdot \frac{4}{5} = \frac{81}{80}.$$

Cet intervalle porte le nom de *comma* de *Zarlino*. Il représente à peu près le plus petit intervalle décelable lorsque deux sons sont joués l'un à la suite de l'autre. Lorsqu'ils sont joués simultanément, les battements nous permettent de dire qu'ils ne sont pas égaux, ce qui n'est pas le cas lorsqu'ils sont joués consécutivement. Comme c'est le cas avec tous nos sens, il existe une quantité minimale, un quantum, requis pour déclencher une perception. Dans le cas des intervalles musicaux, cette quantité est à peu près égale à 5 savarts.

Le savart est une unité qui mesure les rapports musicaux ; elle est définie ainsi :

$$\#\text{savart } = 1000 \cdot \log_{10}\left(\frac{f_2}{f_1}\right).$$

En utilisant la tierce majeure comme nouveau rapport harmonique, en plus de la quinte, de la quarte et de l'octave, nous obtenons la gamme suivante :

Figure 5

Le $mi+$ de la gamme de Pythagore a été remplacé par un mi beaucoup plus simple : 5/4. Il nous reste à en faire autant avec le $la+$ et le $si+$.

Si on définit le la comme étant la quarte au-dessus du mi, on obtiendra

$$la = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot f_0 = \frac{5}{3} \cdot f_0.$$

Cette fraction est simple et remplacera le $la+$ de la gamme de Pythagore.

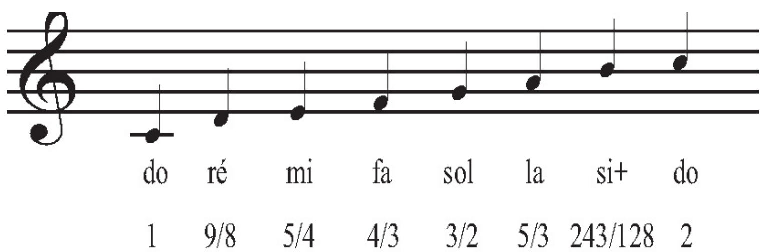


Figure 6

Le rapport entre ce la et le do s'appelle une *sixte majeure* :

$$\textbf{Sixte majeure} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{5}{3}.$$

Et, pour terminer la gamme de Zarlino, il reste à remplacer le $si+$, par une fraction plus simple : il suffit de considérer le si comme étant la quinte du mi.

$$si = \frac{3}{2} \cdot mi = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot f_0 = \frac{15}{8} \cdot f_0.$$

Nous obtenons ainsi une gamme complète, beaucoup plus simple que celle de Pythagore, basée sur les harmoniques naturelles : la gamme de Zarlino.

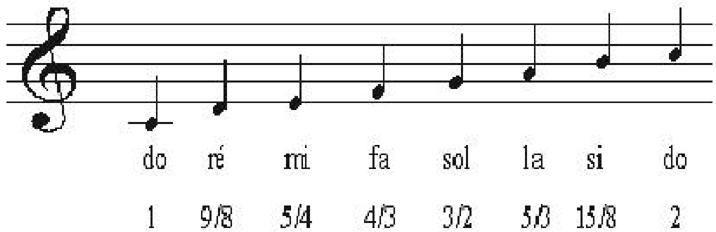


Figure 7

Nous avons défini la sixte majeure comme étant le rapport entre le *la* et le *do*, 5/3. L'inverse de ce rapport, du *la* au *do* supérieur, s'appelle la *tierce mineure* :

$$\frac{do^2}{la} = \frac{2}{\frac{5}{3}} = 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}.$$

$$\textbf{Tierce mineure} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{6}{5}.$$

La tierce mineure de *do* est le *mi* bémol, ce qui nous amène à définir le bémol de la façon suivante :

$$\frac{mi\,b}{do} = \frac{6}{5}, mi\,b = \frac{6}{5} \cdot f_0.$$

$$\frac{mi\,b}{mi} = \frac{\frac{6}{5} \cdot f_0}{\frac{5}{4} \cdot f_0} = \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

Dans la gamme de Zarlino, le bémol est défini comme étant ce rapport et est utilisé en descendant.

$$\textbf{Bémol harmonique} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{24}{25}.$$

Le *demi-ton mineur* est l'inverse de ce rapport :

$$\frac{mi}{mi\,b} = \frac{25}{24}.$$

$$\textbf{Demi-ton mineur} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{25}{24}.$$

Nous avons défini la sixte majeure comme étant l'inverse de la tierce mineure ; de même, nous définissons la *sixte mineure* comme étant l'inverse de la tierce majeure :

$$\frac{do^2}{mi} = \frac{2 \cdot f_0}{\frac{5}{4} \cdot f_0} = \frac{8}{5}.$$

$$\textbf{Sixte mineure} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{8}{5}.$$

Le rapport entre le *do* et le *si* s'appelle le *demi-ton majeur* :

$$\frac{do^2}{si} = \frac{2 \cdot f_0}{\frac{15}{8} \cdot f_0} = \frac{16}{15}.$$

$$\textbf{Demi-ton majeur} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{16}{15}.$$

Ce rapport est le même entre le *mi* et le fa :

$$\frac{fa}{mi} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{16}{15}.$$

La gamme de Zarlino est donc constituée de la suite de rapports harmoniques suivants.

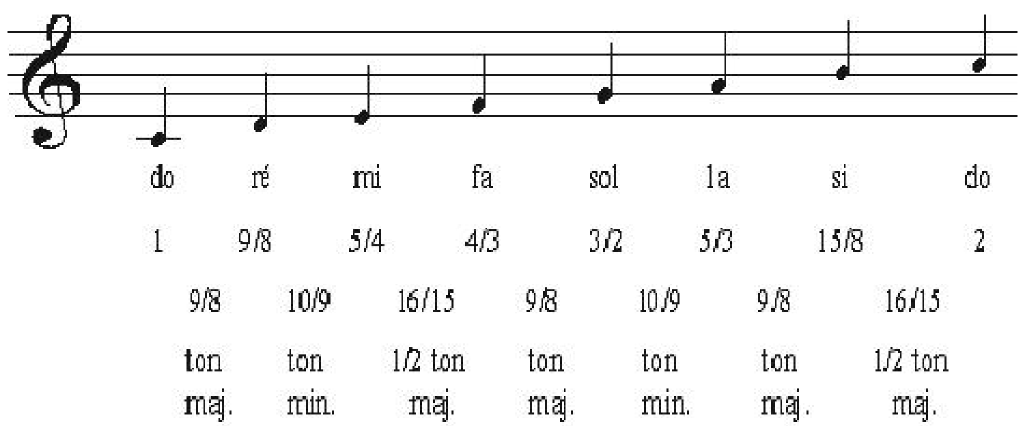


Figure 8

Le rapport entre un ton majeur et le ton mineur est le + que nous avions défini dans la gamme de Pythagore : c'est le *comma harmonique* :

$$\frac{\text{ton majeur}}{\text{ton mineur}} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{10}{9}} = \frac{81}{80}.$$

Cette gamme, basée sur l'introduction de la tierce majeure, provoquée par l'adjonction de la quatrième harmonique naturelle, fut mise au point par Zarlino et se généralisa dans toute la musique occidentale à partir de la Renaissance.

Malheureusement, son architecture n'est pas aussi symétrique que celle de la gamme de Pythagore qui est constituée de deux tétracordes identiques séparés par un ton majeur. Un tétracorde est une suite de quatre sons.

La gamme de Zarlino est constituée de trois tons majeurs (9/8), deux tons mineurs (10/9) et de deux demi-tons majeurs (16/15). Elle est moins symétrique que celle de Pythagore et admet ainsi beaucoup plus de modes différents ; cependant, elle permet de faire entendre l'*accord parfait majeur do-mi-sol*, qui sera la base de tout le développement harmonique de notre musique occidentale.

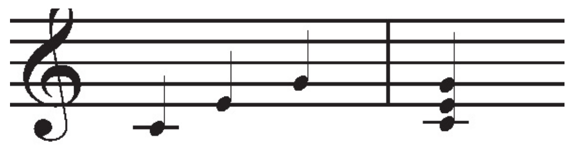


Figure 9

Cette gamme permet donc une polyphonie plus riche. On peut faire entendre plusieurs notes de la gamme simultanément sans que cela soit désagréable.

Problèmes de la gamme de Zarlino

Les quintes de la gamme de Zarlino ne sont pas toutes exactes ; par exemple, la quinte *ré – la* :

$$\frac{la}{re} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{9}{8}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{40}{27} = 1,4815\ldots < 1,5.$$

Ce rapport est plus petit que 3/2. En fait, comme on l'a vu dans la gamme de Pythagore, pour que la quinte soit juste, il faut aller chercher le *la*+, 27/16. Les autres quintes : *do-sol, mi-si, fa-do* sont exactes.

Le second problème rencontré avec l'utilisation de cette gamme fut la modulation, c'est-à-dire le passage d'une tonalité à une autre.

Les luthistes avaient popularisé les suites de pièces qu'on jouait dans une même tonalité[1]. Mais on finit par se lasser de toujours jouer des pièces en do majeur, même si le nombre de pièces possibles est infini !

Même à l'intérieur d'une pièce en do majeur, par exemple, il devint ennuyant de s'en tenir uniquement aux sept notes de la gamme. L'attrait de la dominante (la cinquième note

[1]Il est toujours très laborieux d'accorder un luth : on coince les cordes avec des chevilles coniques en bois ; toutes les cordes sont doubles, sauf la plus aïguë, (un luth baroque pouvait avoir jusqu'à 26 cordes). C'est un travail de bénédictin que d'accorder un tel instrument. Donc, une fois accordés, les luthistes jouaient assez longtemps dans cette tonalité, histoire de ne pas passer la moitié de leur vie à s'accorder, comme le veut la légende.

de la gamme, la quinte) devint de plus en plus fort au fur et à mesure du développement de l'harmonie. Il devint fréquent de reprendre le thème du début une quinte plus haut, le thème devait ainsi être joué en sol majeur ; c'est ce qu'on appelle une modulation.

Une autre tendance était de diviser la pièce en sections, chacune ayant une tonalité propre. Par exemple, dans une pièce en do majeur, la deuxième partie pouvait être en sol majeur pour revenir à la fin en do majeur ; c'est un peu la forme tripartite si chère à l'époque classique. Prenons par exemple cette sonate de Domenico Scarlatti (1685-1757), la pièce est en sol majeur :

Figure 10

Le début de la deuxième partie reprend le même thème à la quinte supérieure :

Figure 11

Le thème est donc transposé en *ré* majeur ; le *do* est alors affecté d'un dièse. Voyons maintenant la définition du dièse.

Le problème avec la gamme de Zarlino c'est que les notes de la gamme de *do* ne donnent pas une gamme de *sol* exacte : les intervalles de la gamme originale ne coïncident pas avec la gamme de Zarlino construite sur le *sol*. En d'autres mots, les intervalles ne sont pas conservés par les translations.

Examinons cela de plus près.

La gamme de Zarlino construite sur *do* est la suivante :

Figure 12

Construisons la gamme de Zarlino sur le *sol* :

$$la = \frac{9}{8} \cdot sol = \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} \cdot do = \frac{27}{16} \cdot do$$

qui est le $la+$ de la gamme de Pythagore construite sur *do* ; le *la* de la gamme de *do* n'est donc pas juste quand on joue en *sol*, il est trop bas d'un comma $\left(\frac{81}{80} = +\right)$.

$$si = \frac{5}{4} \cdot sol = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot do = \frac{15}{8} \cdot do$$

qui est le même que dans la gamme de *do* ; le *si* est donc juste dans les deux tonalités.

La quarte du *sol* (le *do*) est évidemment exacte puisqu'elle est commune aux deux gammes, le *sol* ayant été défini comme la quinte de *do* et la quarte étant l'inverse de la quinte.

La quinte du *sol* (*ré*) sera aussi exacte puisque la note *ré* a été définie comme étant justement la quinte de *sol*, c'est-à-dire la deuxième quinte de *do* :

$$mi = \frac{5}{3} \cdot sol = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot do = \frac{5}{2} \cdot do$$

qui est exactement l'octave du *mi* de la gamme de *do* ; cette note est donc juste.

Nous arrivons maintenant au problème de la définition du dièse ; la note qui suit doit être :

$$\frac{15}{8} \cdot sol = \frac{15}{8} \cdot \frac{3}{2} \cdot do = \frac{45}{16} \cdot do$$

ce qui devrait nous donner un $fa\#$ égal à :

$$fa\# = \frac{45}{32} \cdot do.$$

Ce $fa\#$ correspond à la quinte exacte du *si*, 15/8, mais le rapport entre le $fa\#$ et le fa ne donne pas le demi-ton majeur comme on aurait pu l'espérer :

$$\frac{fa\#}{fa} = \frac{\frac{45}{32}}{\frac{4}{3}} = \frac{45}{32} \cdot \frac{3}{4} = \frac{135}{128}.$$

Ainsi, la gamme de Zarlino construite sur le *sol* nous donne :

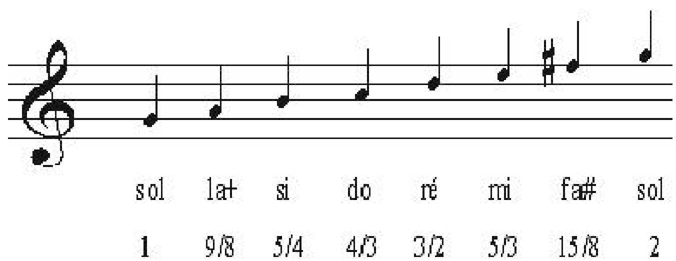


Figure 13

La seule note de cette gamme qui n'est pas exacte en *do* est le *la*. Il était donc possible de moduler à la dominante sans trop de problème.

Rameau, dans sa théorie de l'harmonie, nous indique les tonalités dans lesquelles il est prescrit de moduler. Par exemple, les tons voisins de *do* sont :

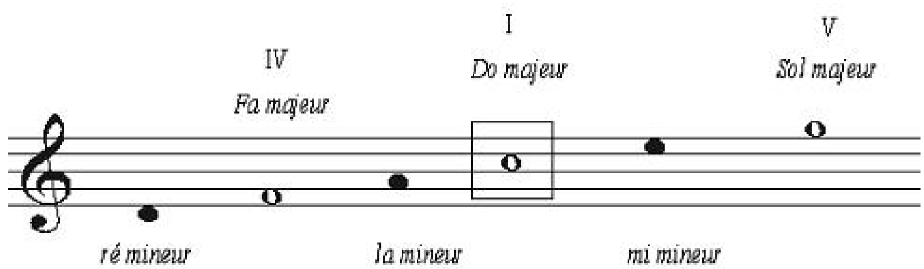


Figure 14

Les deux tonalités voisines de *do* majeur sont *sol* majeur (V^{e} degré), la dominante, et fa majeur (IV^{e} degré) qui est la quinte inférieure de *do*. Le fa qui est le quatrième degré de la gamme de *do* est appelé la *sous-dominante*.

En admettant les relatifs mineurs de ces trois tonalités, on obtient six tonalités. Il n'y a pas trop de problèmes à moduler entre ces tonalités puisque chacune de ces gammes ne contient au plus qu'une note pas tout à fait juste. À chaque fois qu'on s'éloigne d'une quinte dans les modulations, on introduit une note qui n'est pas juste, ce qui limite quelque peu les modulations.

Mais l'esprit inventif des humains est tel que jamais il n'accepte bien longtemps les contraintes. Les musiciens avaient souvent le goût de moduler dans des tons de plus en plus éloignés. Bach s'était fait avertir par ses supérieurs de ne pas moduler trop loin dans ses improvisations à l'orgue ; cela nuisait à la concentration des fidèles.

Le dièse et le bémol

Revenons à la définition du dièse que nous avons rencontré lors de la construction de la gamme de Zarlino sur le *sol*.

$$\frac{fa\#}{fa} = \frac{\frac{45}{32}}{\frac{4}{3}} = \frac{45}{32} \cdot \frac{3}{4} = \frac{135}{128}.$$

$$\textbf{Dièse harmonique} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{135}{128}.$$

Ce rapport harmonique est plus petit que le demi-ton majeur :

$$\frac{135}{128} \approx 1,0547 \text{ et } \frac{16}{15} \approx 1,0667.$$

Avec cette définition, le $mi\#$ est plus bas que le fa :

$$mi\# = \frac{135}{128} \cdot mi = \frac{135}{128} \cdot \frac{5}{4} \cdot do = \frac{675}{512} \cdot do$$

$$\frac{675}{512} \approx 1,3184 \text{ et } fa = \frac{4}{3} \cdot do \approx 1,3333 \cdot do$$

Le $fa\ b$, quant à lui, a la valeur suivante :

$$fa\,b = \frac{24}{25} \cdot fa = \frac{24}{25} \cdot \frac{4}{3} \cdot do = \frac{32}{25} do = 1,28 \cdot do.$$

On obtient ainsi la relation d'ordre suivante :

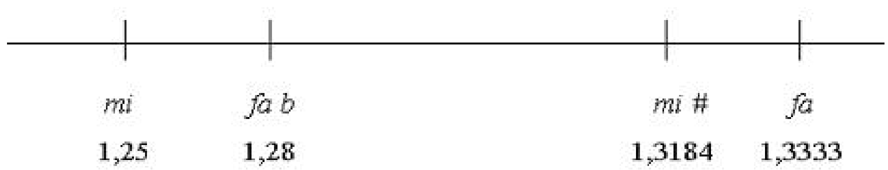


Figure 15

Le mode mineur

Le mode mineur, l'éolien des modes grecs, s'obtient en faisant une gamme à partir du *la* en utilisant les notes de la gamme de *do* :

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do	Ré	Mi	Fa	Sol	la
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2	9/4	5/2	8/3	3	10/3

Cela nous donne la gamme suivante :

la	si	do	ré	mi	fa	sol	la
1	9/8	6/5	27/20	3/2	8/5	9/5	2

Le rapport entre le *do* et le *la* est le tierce mineure (6/5) qui caractérise le mode mineur. Le rapport entre *ré* et *la* n'est pas une quarte juste, il est légèrement supérieur à 4/3 $\left(\frac{27}{20} = 1,35\right)$. Il faut prendre le *ré*– pour que la quarte soit respectée. On définit le – comme étant l'inverse du +.

$$ré- = \frac{80}{81} \cdot ré = \frac{80}{81} \cdot \frac{27}{20} \cdot la = \frac{4}{3} \cdot la$$

Rappelons que deux rapports harmoniques I_1 et I_2 sont l'inverse l'un de l'autre si :

$$I_1 \cdot I_2 = 2\ ;$$

Le rapport de 8/5, entre le fa et le *la* est l'inverse de la tierce majeure (5/4), c'est la *sixte mineure.*

$$I_1 \cdot \frac{5}{4} = 2$$

$$I_1 = 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\textbf{Sixte mineure} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{8}{5}.$$

Le rapport de 9/5, entre le *sol* et le *la* initial est l'inverse du ton mineur (10/9), c'est la *septième majeure.*

$$I_1 \cdot \frac{10}{9} = 2$$

$$I_1 = 2 \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{5}$$

$$\textbf{Septième majeure} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{9}{5}.$$

La gamme mineure construite sur le *la* (en prenant le *ré*–) est donc constituée de la séquence suivante :

Figure 16

La définition du *ton mineur* est le rapport *sol*–*la* qui termine la gamme.

$$\textbf{Ton mineur} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{10}{9}.$$

Le *demi-ton mineur* est l'inverse du bémol :

$$\textbf{Demi-ton mineur} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{25}{24}.$$

On peut établir les relations suivantes :

$$\text{limma} + = \text{demi-ton majeur}$$

$$\frac{256}{243} \cdot \frac{81}{80} = \frac{16}{15}.$$

Rappelons que le limma pythagoricien, que nous avons vu dans le deuxième article, correspond au rapport entre le do^2 et le *si*+.

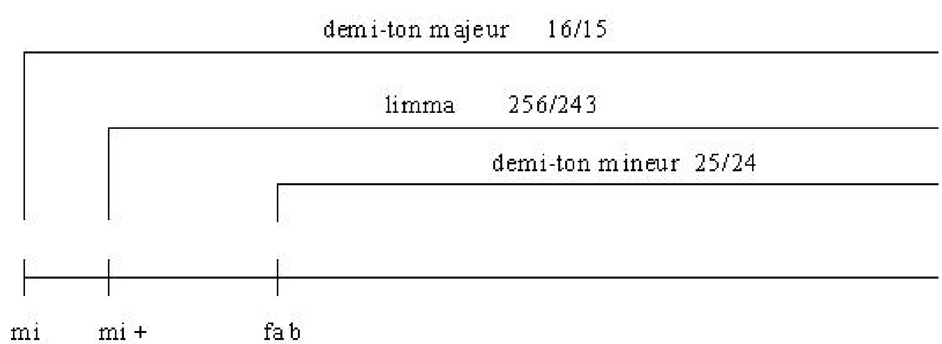


Figure 17

$$\text{ton mineur} + = \text{ton majeur}$$

$$\frac{10}{9} \cdot \frac{81}{80} = \frac{9}{8}$$

et,

$$\text{demi-ton mineur} + =$$

$$\frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80} = \frac{135}{128}.$$

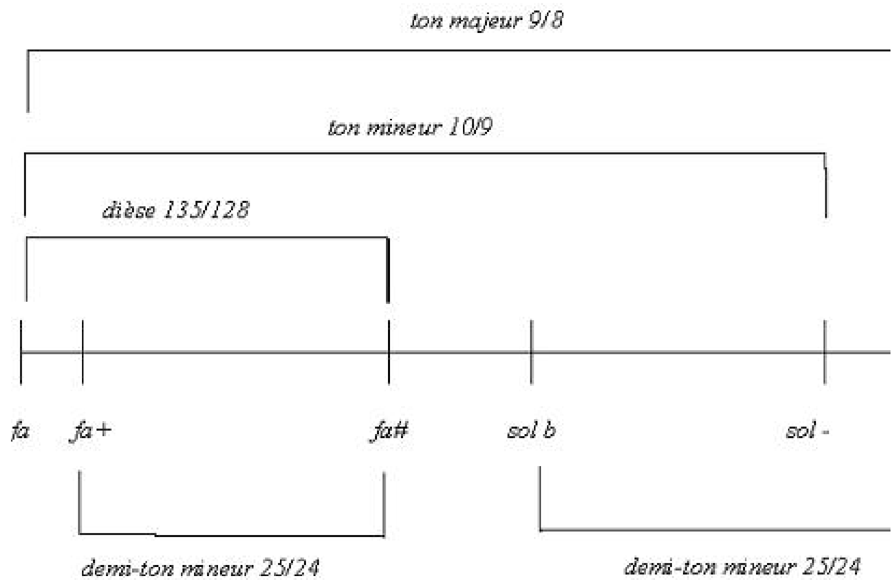


Figure 18

Les principaux rapports harmoniques		
Note	Rapport harmonique avec do	Fraction
do	unisson	1
do +	comma	81/80
do#–	demi-ton mineur	25/24
do#	dièse	135/128
ré b–	demi-ton majeur	16/15
ré b	demi-ton majeur fort	27/25
ré –	ton mineur	10/9
ré	ton majeur	9/8
mi b	tierce mineure	6/5
mi	tierce majeure	5/4
mi+	diton (tierce majeure Pyth.)	81/64
fa	quarte	4/3
fa+	quarte forte	27/20
fa#	quarte augmentée (triton)	45/32
sol b	quinte diminuée	36/25
sol	quinte	3/2
la b	sixte mineure	8/5
la	sixte majeure	5/3
la+	sixte de Pythagore	27/16
si b–	septième mineure faible	16/9
si b	septième mineure	9/5
si	septième majeure	15/8
si+	septième majeure Pythagore	243/128
do	octave	2

La gamme tempérée

Dans la gamme de Zarlino, les quintes sont toutes différentes et les accords ne sont justes que si l'on est dans le ton de la note fondamentale. Par exemple, en *do*, l'accord majeur est *do-mi-sol*, ce qui représente les rapports 1 – 5/4 – 3/2. Par contre, l'accord de *ré* majeur est *ré-fa#-la*. Dans la gamme de *do*, ces notes sont 9/8 – 45/32 – 5/3, ce qui donne comme rapports harmoniques 1 – 5/4 – 40/27.

Un instrument accordé en *do* sonne légèrement faux si on joue en *ré*.

Mais même à l'intérieur d'une pièce, les musiciens, de plus en plus audacieux, avaient pris l'habitude de passer d'une tonalité à l'autre et souvent dans des tonalités assez éloignées. Un compositeur comme Scarlatti, par exemple, n'avait pas peur d'introduire dans ses sonates des modulations surprenantes ; de tels sauts harmoniques exigeaient un clavecin accordé selon un tempérament assez égal, c'est-à-dire qu'il devait sonner assez juste dans plusieurs tonalités.

Le problème consistait à accorder l'instrument de telle sorte que les quintes soient à peu près toutes égales ; il s'agissait de répartir le comma pythagoricien sur l'ensemble des 12 quintes du cycle complet des quintes.

De nombreuses solutions avaient été proposées, entre autres par Kepler et Euler. Mais elles demeuraient insatisfaisantes puisque certaines modulations étaient toujours impossibles. C'est un mathématicien flamand, Simon Steven, qui le premier accorda un monocorde en tempérament égal, c'est-à-dire une gamme composée de douze demi-tons exactement égaux. C'est ce qu'on a appelé la gamme tempérée. Évidemment, cela s'appliquait surtout aux instruments qui jouent des notes fixes comme le clavecin, l'orgue et la guitare, mais non aux instruments de la famille du violon, ni au luth, sur lequel les frettes ne sont que des cordes enroulées autour du manche et que l'on peut déplacer.

Mersenne avait déjà calculé un tempérament égal dans son *Harmonie universelle* paru en 1636. Son usage fut adopté dans le nord de l'Allemagne dès le XVII^{e} siècle et on l'entendit pour la première fois sur l'orgue construit par Arp Schnitger à Hamburg en 1692. C'est pourquoi Bach pouvait se permettre dans ses pièces pour orgue de moduler dans des tons très éloignés. L'Angleterre fut un des derniers pays à accepter ce tempérament ; aucun des orgues montrés à la Grande Exposition en 1851 n'était accordé selon ce principe.

Bach adopta ce système à tous ses instruments à clavier : clavecin, épinette, clavicorde et orgue. Il donna ses lettres de noblesse à ce système en composant deux séries de 24 préludes et fugues dans tous les tons, montrant ainsi ce que l'on pouvait faire avec un clavier bien tempéré.

(prelude en do bach.mp3)

Mathématiquement, la gamme tempérée est telle que si $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{11}$ sont les fréquences des douze demi-tons de la gamme, alors

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = \cdots = \frac{f_{11}}{f_{10}}.$$

Si ε représente ce rapport commun, alors

$$\frac{f_1}{f_0} \cdot \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{f_3}{f_2} \cdot \cdots \cdot \frac{f_{11}}{f_{10}} \cdot \frac{f_{12}}{f_{11}} = \frac{f_{12}}{f_0} = 2;$$

$$\varepsilon^{12} = 2;$$

$$\varepsilon = \sqrt[12]{2} = 2^{1/12} = 1,059463094\ldots$$

Ce rapport est un nombre irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'exprimer comme une fraction ; ce n'est pas un rapport harmonique naturel.

Il en découle qu'aucun rapport dans cette gamme n'est harmonique, sauf évidemment l'octave. Par exemple, la quinte *do-sol* est égale à ε^7 puisqu'il faut sept demi-tons pour aller à la quinte :

$$do - do\# - ré - ré\# - mi - fa - fa\# - sol.$$

Et ce nombre est aussi un nombre irrationnel, comme la plupart des puissances de ε. En fait,

$$\varepsilon^7 = 1,498307073\ldots$$

La différence entre cette quinte tempérée et la quinte harmonique peut ne pas sembler grande, mais si on calcule les fréquences à partir du *do* 256, cela donne une fréquence de 383,57 pour la quinte tempérée et 384 pour la quinte harmonique, ce qui cause 0,43 battements par seconde, donc un battement par deux secondes environ. Cela n'est pas trop gênant. Mais si on refait les mêmes calculs à partir du *la* 440, on obtiendra alors des battements qui seront d'environ un par seconde, ce qui dérange un peu plus.

Dans la gamme tempérée, aucun rapport n'est juste sauf l'octave.

Beaucoup de guitaristes ignorent cette propriété et s'accordent avec les harmoniques, ce qui leur cause de légers problèmes de justesse dans les notes élevées. Mais il faut dire que les problèmes de justesse sont nombreux sur une guitare ; la pression exercée sur la corde et la hauteur de la corde au-dessus du manche sont des facteurs plus importants.

Dans la gamme tempérée, un dièse ascendant est équivalent au bémol de la note supérieure ; un double dièse ou un double bémol ne sont utilisés que pour mettre en évidence l'harmonie.

De plus, l'harmonie occidentale n'a conservé que deux modes : le majeur et le mineur. Il y a donc uniformisation à tous les niveaux. Seuls ceux qui ont l'oreille absolue peuvent vraiment voir une différence entre *do* majeur et *ré* majeur, surtout que le diapason a changé au cours des âges. Par exemple, les instruments anciens sont souvent accordés un demi-ton plus bas que le *la* 440 ; il en résulte qu'un *do dièse* majeur de l'époque sonne à peu près comme un *do* majeur moderne. Il faut beaucoup d'imagination pour voir toutes les couleurs que semblent voir certaines personnes dans les différentes tonalités. Dans le système tempéré, que l'on pourrait qualifier de scientifique, il n'y a strictement aucune différence, ce sont de pures translations ; si on n'a pas l'oreille absolue, on ne peut percevoir de différence.

Le triton, « Diabolus in musica »

Les rapports de tierce majeure et de tierce mineure furent considérés à partir de la Renaissance comme consonants ; de même pour leur inverse respectif, la sixte majeure et la sixte mineure, qui apparaissent lors des renversements des accords majeurs.

Mais le rapport qui fut longtemps considéré comme étant le plus dissonant est le triton ou quarte augmentée : le rapport $fa - si$. Il était nommé *Diabolus in musica* et représentait le diable.

Toute la musique de Bach, surtout la musique sacrée, est truffée de symboles musicaux que les auditeurs de l'époque savaient décoder. Par exemple, une descente aux enfers pouvait être représentée par une descente chromatique (un demi-ton à la fois) ou une chute d'une septième majeure. Le diable, lui, était personnifié par le triton.

Un exemple parmi tant d'autres : la magnifique fugue de la seconde suite pour luth transcrite ici pour guitare.

Figure 19a

Figure 19b

La pièce débute par une montée qui tout à coup chute d'une septième majeure (descente aux enfers) suivi d'une descente avec rencontre du diable (les tritons T).

Le triton correspond à la quarte augmentée (ou quinte diminuée, dans la gamme tempérée), comme le rapport du fa au si. Il est composé de six demi-tons, c'est-à-dire trois tons. C'est le milieu géométrique de la gamme tempérée :

$$\varepsilon^6 = \left(2^{1/12}\right)^6 = 2^{6/12} = 2^{1/2} = \sqrt{2}.$$

Nous voyons donc ici la représentation mathématique du diable : $\sqrt{2}$!

Diabolicus in mathematica : c'est cette même racine carrée qui causa l'exclusion de l'adepte de la secte de Pythagore qui avait démontré que c'est un nombre irrationnel.

Références

[1] Alain Daniélou, *Traité de musicologie comparée* ; Éditions Hermann, Paris 1959.

[2] James Jeans, *Science and music* ; Dover Publications, 1968.

[3] Jean Lattard, *Gammes et tempéraments musicaux* ; Masson 1988.

[4] Émile Leipp, *Acoustique et musique* ; Masson 1984.

[5] Frederick Saunders et al., *Sons et musique* ; Pour la Science, Bélin 1980.

Mathématiques et civilisation

André Ross
Cégep de Lévis-Lauzon

Les mathématiques et la représentation du réel

Dans la civilisation occidentale, les mathématiques ont été associées assez tôt à la démarche de description de l'Univers et des phénomènes qui s'y produisent. Il suffit d'observer le Soleil, la Lune, lorsqu'elle est pleine, leur retour régulier jour après jour pour associer le cercle ou la sphère à leur trajectoire. Les triangles et les corps réguliers ont également été utilisés pour construire une représentation mentale de l'Univers de plus en plus libérée du mythe.

Pythagore (vers ~569 à ~475)

L'intérêt des pythagoriciens pour les nombres et la géométrie leur vient probablement de l'astronomie. À l'époque de Thalès, les principales constellations étaient déjà connues et Pythagore, qui s'y intéressait beaucoup, avait observé que chaque constellation présente deux caractéristiques : le nombre d'étoiles qu'elle comporte et la figure géométrique formée par celles-ci. Cette constatation était, pour les pythagoriciens, une motivation suffisante pour s'adonner à l'étude des nombres et des figures géométriques. Comme chaque constellation a un nombre qui lui est associé, chaque objet doit être associé à un nombre qui lui est propre. C'est ce qu'exprime le pythagoricien Philolaos de Crotone en disant :

Toute chose a un nombre ; c'est pourquoi il est impossible qu'une chose sans nombre puisse être conçue ou connue.

Les pythagoriciens vouaient un culte à la *décade* ou nombre dix qui est la somme des points de la Tetraktys. C'était pour eux un symbole ésotérique fondamental et ils étaient convaincus que l'Univers devait être constitué de dix corps célestes.

FIG. 1 – Tetraktys, symbole ésotérique fondamental des pythagoriciens.

Dans son modèle de l'Univers, le pythagoricien Philolaos de Crotone invente un feu central et une planète appelée « anti-Terre » qui nous cache le feu central. Il obtient ainsi un modèle de l'Univers conforme à cette croyance. La Terre n'est pas le centre de l'Univers, qui est occupé par le feu central. Le Soleil est un miroir qui tourne en un an autour du feu central et nous en réfléchit la lumière. Le principe du mouvement des astres est ainsi acquis et l'année « terrestre » s'explique par rapport au Soleil.

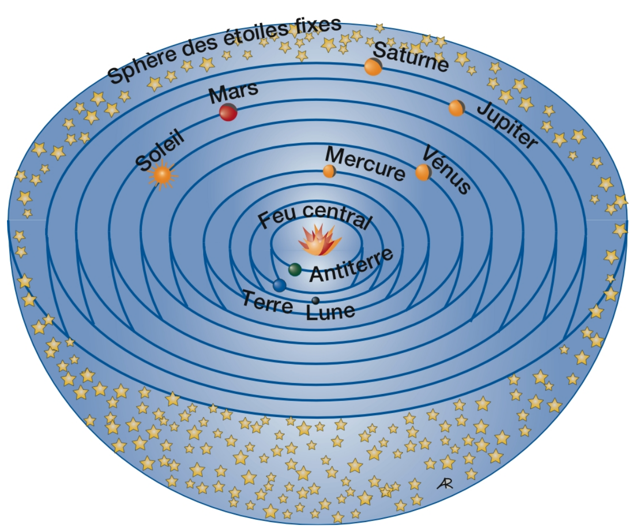


FIG. 2 – Modèle de Philolaos de Crotone. Le Soleil est un miroir qui reflète la lumière émise par le feu central.

Les éléments

Un des problèmes auxquels les savants grecs se sont attaqués est celui des éléments. De quoi ultimement est constitué l'Univers ? Quelle est la brique fondamentale ? Plusieurs tentatives de réponse ont été données par les diverses écoles de philosophie. Thalès croyait que tout est constitué d'un seul élément fondamental, l'eau. Pour Anaximandre, le principe fondamental est l'*apeiron* (l'indéfini ou infini, au sens d'inachevé), une sorte de chaos primitif d'où proviennent les différents éléments par séparation des contraires. Pour Anaximène, cet élément est l'air. Il affirme que l'air est sujet à se transformer selon des modalités précises. Il peut se condenser pour devenir successivement vent, nuage, eau, terre, pierre. L'air peut également se raréfier pour devenir feu. Héraclite d'Éphèse considérait le feu comme substance primordiale qui, par condensation et raréfaction, donne naissance aux phénomènes du monde sensible. Pour les pythagoriciens, tout est nombre, mais il ne faut pas entendre le nombre au sens qu'on lui donne aujourd'hui.

Parménide (vers ∼515 à ∼450) s'est particulièrement intéressé au problème de l'être et, dans sa réflexion, il oppose l'être au non-être. L'être est un, immobile, impassible, immuable, indivisible et fini. Il en découle que tout ce qui existe a toujours existé, c'est la permanence de l'être. L'être est non seulement présent, il est nécessaire, indivisible et immobile. En affirmant la permanence de l'être, Parménide soulevait des questions importantes : si l'Univers est constitué d'un seul élément qui ne peut changer, comment expliquer le changement ? Comment expliquer la diversité ? Comment expliquer le début de l'Univers ?

Dans la conception grecque, un élément est indécomposable et inaltérable. Si tout est constitué d'un seul et même élément, comment expliquer le changement ? Comment expliquer que le bois pourrit s'il est constitué d'un seul élément qui ne peut se décomposer ni s'altérer ?

C'est Empédocle d'Agrigente qui dénoue l'impasse en développant la théorie des quatre éléments empruntée aux Ioniens. Chaque corps est constitué de quatre éléments : terre, eau, air et feu. Les propriétés d'un corps dépendent de la proportion de chacun des éléments qui entrent dans sa constitution. Toute modification de cette proportion résulte en une altération du corps. Un corps qui perd une partie de l'un de ses éléments se transforme parce que la proportion des éléments a été modifiée.

La théorie d'Empédocle soulève une autre question « Pourquoi seulement quatre éléments ? » Platon a recours à la fois aux sens et aux mathématiques pour répondre à ce questionnement. Selon son raisonnement, l'Univers comporte l'élément terre, car il est tangible (sens du toucher). Il comporte également l'élément feu car l'Univers est visible (sens de la vue). Pour réunir ces deux éléments, il en faut au moins un autre qui définira le rapport entre les deux premiers.

S'il y avait seulement trois éléments, l'Univers serait un plan et non un solide. Pourquoi ? Parce que pour construire une proportion avec des nombres plans, il suffit de trois termes, qui constituent alors la proportion suivante :

$$\frac{a^2}{ab} = \frac{ab}{b^2}$$

Ces trois termes sont reliés par le développement binomial suivant :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

La représentation géométrique utilisant les termes, a^2, ab et b^2 indique bien que ce que l'on obtient en réunissant deux éléments à l'aide d'un troisième qui forme proportion est nécessairement une surface plane. Cependant, l'Univers n'est pas plan, il est solide (tridimensionnel). Il ne peut donc être constitué de seulement trois éléments.

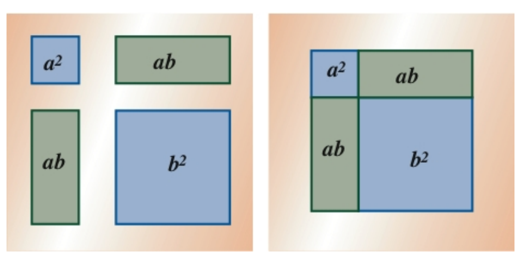


FIG. 3 – Figure plane formée de trois éléments. L'élément ab est la médiété (moyenne proportionnelle) entre les deux autres.

Entre deux nombres solides, deux moyennes géométriques sont nécessaires, soit a^2b et ab^2, en effet :

$$\frac{a^3}{a^2b} = \frac{ab^2}{b^3}$$

comme on le constate en simplifiant les rapports de la proportion. Ainsi, pour construire un univers solide (tridimensionnel), il faut quatre composantes qui sont :

$$a^3, a^2b, ab^2, b^3.$$

Ces quatre termes sont également reliés par le développement binomial suivant :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

En se combinant, ces éléments vont former un solide.

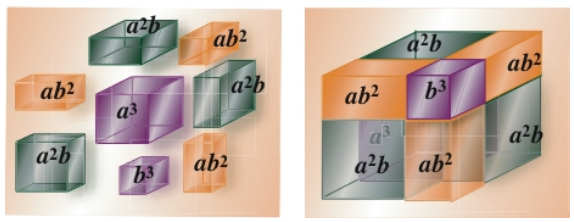


FIG. 4 – Figure solide formée de quatre éléments. Les éléments a^2b et ab^2 sont les médiétés (moyens proportionnels) entre les deux autres.

L'Univers doit donc être constitué de quatre éléments, soit : terre, eau, air et feu, dont le rapport est :

$$\frac{\text{feu}}{\text{air}} = \frac{\text{eau}}{\text{terre}}$$

Dans la conception de Platon, l'Univers est nécessairement constitué de quatre éléments, deux dont l'existence est garantie par le toucher et la vue, et les deux autres par la nécessité d'avoir deux moyens proportionnels pour construire un solide.

Forme de l'Univers

Platon considère que l'Univers est un être vivant et il a de nouveau recours à la géométrie pour en décrire la forme. Pour lui, c'est la sphère, figure parfaite, qui a servi pour concevoir le plan de l'Univers. Il se fonde sur le fait que, comme être vivant, l'Univers n'a besoin ni de bras ni de jambes, car le seul mouvement dont il est animé c'est la rotation.

Comme figure, il lui donna celle qui lui convenait et qui lui était apparentée. Au vivant qui doit envelopper tous les vivants, la figure qui pourrait convenir c'était celle où s'inscrivent *toutes les autres figures. Aussi est-ce la figure d'une sphère, dont le centre est équidistant de tous les points de la périphérie, une figure circulaire, qu'il lui donna comme s'il travaillait sur un tour – figure qui entre toutes est la plus parfaite et la plus semblable à elle-même, convaincu qu'il y a mille fois plus de beauté dans le semblable que dans le dissemblable.*

Tel fut au total le plan du dieu [...]. En conformité avec ce plan, il fit un corps lisse et uniforme, en tout point équidistant de son centre, un corps complet, un corps parfait constitué de corps parfaits. [...] Il a ainsi constitué un ciel circulaire entraîné bien entendu dans un mouvement circulaire, un ciel unique, seul de son espèce, solidaire, mais capable en raison de son excellence de vivre en union avec lui-même, sans avoir besoin de quoi que ce soit d'autre, se suffisant à lui-même comme connaissance et comme ami.

Triangles et corps réguliers

Lors de son séjour en Italie du sud, Platon s'était lié d'amitié avec les pythagoriciens Philolaos, Archytas et Timée. À leur contact, il approfondit ses connaissances en arithmétique, en astronomie et en musique. Architas de Tarente l'initie aux corps réguliers et à leurs propriétés, et Platon associe ces corps réguliers aux quatre éléments d'Empédocle et du vivant.

On commencera par la première espèce, celle qui est la plus petite par sa composition ; elle a pour élément le triangle dont l'hypoténuse a une longueur double du plus petit côté[1]*. Si on juxtapose deux triangles de cette sorte par leur hypoténuse, et si on répète l'opération trois fois en faisant se rejoindre les hypoténuses et les petits côtés en un même point comme en un centre, on engendre un triangle équilatéral unique à partir de triangles élémentaires au nombre de six.*

Quatre de ces triangles équilatéraux forment, à raison de trois angles plans, un seul angle solide, celui qui vient juste après le plus obtus des angles. Et lorsque quatre de ces angles sont formés, se trouve constituée la première espèce de solide qui divise un tout sphérique en parties égales et semblables.

[1]Ce triangle rectangle est également connu pour avoir des angles aigus de 30°et 60°.

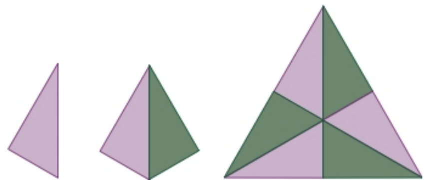


FIG. 5 – Triangle équilatéral engendré à partir du triangle dont l'un des côtés est la moitié de l'hypoténuse.

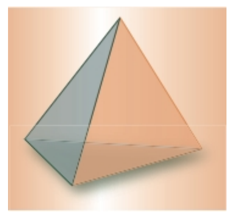


FIG. 6 – Tétraèdre formé de quatre triangles équilatéraux. Pour Platon, le tétraèdre est la forme de l'atome de feu.

Il poursuit en expliquant qu'en regroupant huit triangles équilatéraux, on forme l'octaèdre, seul corps régulier à huit faces. Pour Platon, l'octaèdre est la forme de l'atome d'air.

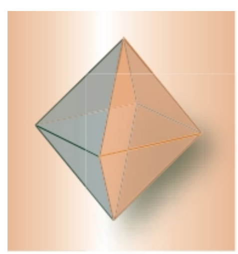


FIG. 7 – Octaèdre formé de huit triangles équilatéraux. Pour Platon, l'octaèdre est la forme de l'atome d'air.

Platon poursuit sa description en expliquant qu'avec vingt triangles équilatéraux, on peut former l'icosaèdre, qui est le seul corps régulier à 20 faces.

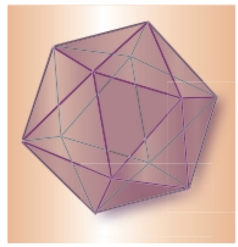


FIG. 8 – Icosaèdre formé de vingt triangles équilatéraux. Pour Platon, l'icosaèdre est la forme de l'atome d'eau.

Platon poursuit sa description en considérant le triangle isocèle rectangle. En regroupant quatre de ces triangles, on obtient le carré. Puis à l'aide de six carrés, on obtient l'hexaèdre, qui pour lui est la forme de l'élément terre.

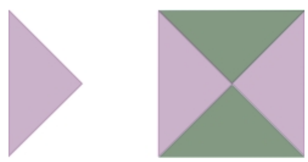


FIG. 9 – Carré formé de quatre triangles isocèles rectangles.

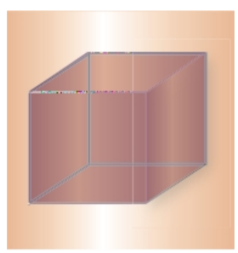


FIG. 10 – Hexaèdre formé de six carrés. Pour Platon, l'hexaèdre est la forme de l'atome de terre.

Il restait un seul corps régulier, le dodécaèdre formé de douze faces pentagonales. C'est la forme utilisée pour les figures animales.

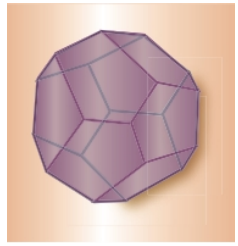


Fig. 11 – Dodécaèdre formé de douze pentagones réguliers. Pour Platon, le dodécaèdre est la forme fondamentale des figures animales.

L'utilisation que fait Platon des mathématiques n'est pas sans étonner de nos jours. Cette utilisation est cependant cohérente avec sa théorie de la connaissance. Au contact des pythagoriciens, Platon avait adopté l'idée de l'éternité de l'âme et en fit la pierre angulaire de sa philosophie. Il professait que l'âme est immortelle et qu'elle a la possibilité de contempler le monde des Idées entre deux réincarnations. La connaissance est obtenue en retrouvant le souvenir de ces Idées, c'est la *réminiscence*. Dans la recherche de ces souvenirs, toute association d'idées est recevable et, en ce sens, l'utilisation que Platon fait des mathématiques est cohérente avec sa théorie de la connaissance.

Pour Platon, l'Univers est constitué de sphères concentriques. La sphère extérieure est celle des étoiles dites « fixes », car elles conservent la même disposition les unes par rapport aux autres. Chaque planète est fixée sur une sphère dont la rotation confère à la planète une trajectoire circulaire (figure 12).

Eudoxe et les sphères homocentriques

Les astronomes grecs avaient constaté que la théorie des trajectoires circulaires ne rendait pas parfaitement compte de la trajectoire des planètes. Le mouvement observé n'est pas uniforme, contrairement à la théorie selon laquelle le mouvements des planètes devait être continu et circulaire. L'observation révélait des variations apparentes de la distance (distance Terre- Lune) et de la luminosité, des arrêts et des retours en arrière (mouvements rétrogrades). Pour concilier la théorie et les observations, les astronomes ont eu recours à divers artifices.

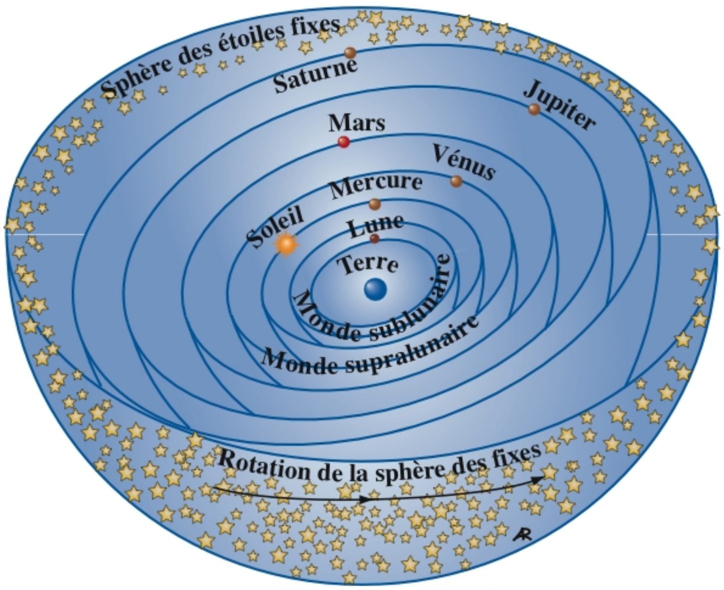


Fig. 12 – Modèle platonicien de l'Univers. Les planètes sont portées par des sphères. Le tout est animé de deux mouvements, celui de la sphère des fixes et celui des sphères portant les planètes dont la rotation confère à chaque planète une trajectoire circulaire dans un même plan appelé « plan de l'écliptique ».

Les planètes ont parfois un comportement intriguant. Elles semblent tout à coup ralentir, s'arrêter, revenir en arrière, s'arrêter de nouveau et repartir vers l'avant. C'est ce que l'on appelle le *mouvement rétrograde* des planètes.

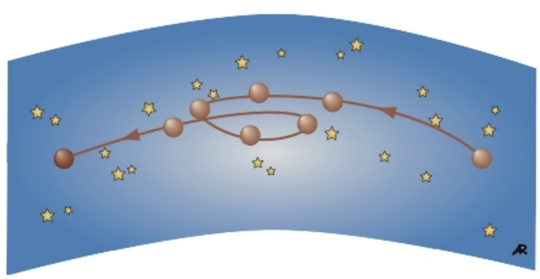


Fig. 13 – Mouvement rétrograde. Sur le fond des étoiles fixes, la planète semble ralentir, revenir sur ses pas, arrêter et repartir de nouveau.

Eudoxe (~408 à ~355) fut le premier à tenter d'expliquer ces phénomènes. Il imagina que la Terre était fixe et que les planètes étaient situées sur un ensemble de sphères transparentes et homocentriques qui tournaient à différentes vitesses autour de la Terre. Les sphères homocentriques ont un centre commun, la Terre immobile. Elles ont cependant des pôles distincts, les extrémités des pôles d'une sphère étant deux points de la sphère dans laquelle elle est contenue. La rotation des sphères devait expliquer les mouvements célestes apparents. La sphère des fixes tourne d'est en ouest autour du même pôle que l'équateur, et la Lune est sur une sphère dont le pôle est incliné de 5° par rapport au plan de l'écliptique.

Dans son modèle, Eudoxe explique les mouvements rétrogrades des planètes de la façon suivante :

Considérons deux sphères S_1 et S_2 telles que l'axe XY de S_1 est un diamètre de S_2. Lorsque S_2 tourne autour de l'axe AB, alors l'axe XY de S_1 tourne également. Si les deux sphères tournent à une même vitesse angulaire constante mais en sens contraire, alors un point P à l'équateur de la sphère S_1 décrit une courbe en forme de huit.

Cette courbe est appelée *hippopède* (figure 14), ce qui signifie « promenade du cheval » ou « pas du cheval ».

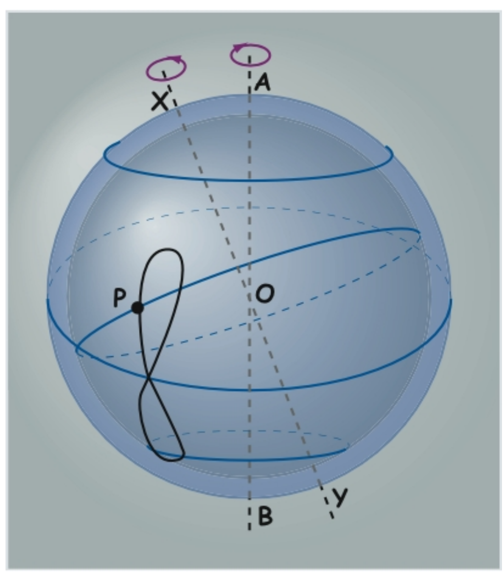


FIG. 14 – Sphères homocentriques dont l'une tourne autour de l'axe AB et l'autre autour de l'axe XY, les points X et Y étant fixés sur la première sphère. La courbe décrite par le point P est l'hippopède.

Eudoxe considère que le point P est une planète. Il ajoute une troisième sphère[2] pour expliquer le mouvement de la planète sur le fond étoilé, alors que la trajectoire en forme de huit explique le mouvement rétrograde de la planète.

Ces trois sphères étaient situées dans une quatrième sphère pour tenir compte de la rotation journalière des étoiles. Le système complet, décrit par Aristote dans sa *Métaphysique*, contenait 27 sphères dont certaines ont le même diamètre.

Eudoxe semble avoir été surtout intéressé à échafauder une théorie sans tenter de confirmer celle-ci par des prédictions et des observations. Ce système a été adopté par Aristote qui considérait que cette théorie était une description de l'univers physique. Cette caution aristotélicienne a joué un rôle important dans la longévité du système géocentrique.

Physique d'Aristote

Pour Aristote, globalement le monde est parfait, même si, localement, il peut y avoir des imperfections. Or, ce qui est parfait doit être incorruptible et ne peut avoir été engendré. Il en conclut que l'Univers a existé de tout temps, il est éternel.

Il considère que l'Univers est divisé en deux parties, le monde supralunaire et le monde sublunaire. Les lois de la physique du mouvement sont distinctes dans chacun de ces mondes. Le monde supralunaire est immuable et parfait, il n'y a aucun changement, sauf le mouvement naturel des sphères qui régit le déplacement des planètes et des étoiles. Ces mouvements naturels sont nécessairement circulaires puisqu'infinis. Les corps célestes, planètes, Lune et Soleil, sont des corps parfaits, ce sont donc des sphères lisses. Les étoiles sont fixes les unes par rapport aux autres et sont fixées sur une sphère qui tourne autour de la Terre. Aristote adopte le modèle des sphères développé par Platon et Eudoxe. Il aborde le problème de l'interaction des sphères. Est-ce que les sphères d'Eudoxe expliquant la trajectoire de la Lune sont indépendantes de celles expliquant la trajectoire du Soleil ? Cela supposerait plusieurs moteurs différents. Aristote ne retient qu'un seul moteur externe, celui donnant le mouvement à la sphère des fixes qui, dans sa rotation, entraîne toutes les autres. Pour que

[2] Pour voir ces sphères en mouvement, consulter :
http ://hsci.cas.ou.edu/images/applets/hippopede.html
http ://faculty.fullerton.edu/cmcconnell/Planets.html

cet effet d'entrainement soit possible, il ne peut y avoir de vide entre les sphères.

Le mouvement

Chaque corps du monde sublunaire est constitué des quatre éléments dans des proportions variables[3]. Lorsqu'il est laissé à lui-même, le corps tend à occuper la place naturelle de son élément dominant. Ainsi, plus un corps est lourd (c'est-à-dire comporte une grande proportion de l'élément terre) plus il tombe rapidement, car sa tendance à occuper son emplacement naturel est très forte. Plus un corps comporte une grande proportion de l'élément feu, plus il s'éleve rapidement.

Dans cette région intérieure de l'Univers, des perturbations interviennent souvent, mais lorsque la cause de ces perturbations prend fin, les corps vont reprendre leur place naturelle. Si on lance un objet dans les airs, on lui imprime un mouvement violent, contre nature, et lorsque la cause de ce mouvement violent prend fin, le corps tend à retrouver sa place naturelle. Les deux causes ne peuvent agir simultanément. La composition des mouvements n'est pas concevable.

La conciliation du mouvement régulier d'est en ouest de la sphère des fixes et du mouvement erratique des planètes[4] pose un défi important à Aristote. Pour respecter l'hypothèse de la perfection du monde supralunaire, les seules figures parfaites auxquelles on peut avoir recours sont la sphère et le cercle. De plus, les vitesses doivent être constantes puisqu'un monde parfait ne peut connaître de changement.

Excentrique, épicycle et déférent

Pour expliquer les variations de vitesse et de luminosité, Apollonios de Perga (~262 - ~190), appelé *le grand géomètre*, suppose que l'orbite de chaque planète est décrite par un cercle dont le centre est décalé par rapport au centre de la Terre, d'où l'appellation d'*excentrique* pour décrire ce concept. Cette approche préserve les orbites circulaires, mais n'explique pas toutes les irrégularités.

[3]Pour plus de détails, voir « Raisonner par l'absurde ? Quelle idée ! », Bulletin de l'AMQ, mars 2005.
[4]Planètos signifie errant et désigne le mouvement erratique des planètes.

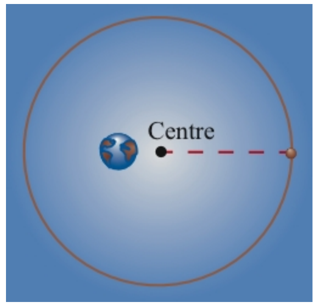


Fig. 15 – Modèle d'Apollonios. La Terre n'est pas parfaitement au centre de l'Univers, ce qui explique les variations apparentes de distance.

Apollonnios poursuit en introduisant les notions d'épicycle et de déférent. Selon cette approche, chaque planète se déplace sur un cercle, l'*épicycle*. Le centre de celui-ci se déplace sur un autre cercle, le *déférent*, dont le centre est la Terre.

En ayant recours aux épicycles et déférents, les mouvements demeurent uniformes et circulaires. Ce qui était le but visé par Apollonios, concilier le géocentrisme et les observations tout en préservant la perfection du monde supralunaire.

Dans la figure 16, l'épicycle et le déférent tournent à une même vitesse angulaire de sens antihoraire. La trajectoire obtenue est un cercle décentré qui peut expliquer la variation de distance apparente de la Lune tout en conservant l'idéal d'un monde parfait à vitesse constante sur une trajectoire circulaire due à la rotation d'une sphère sur laquelle la planète est fixée.

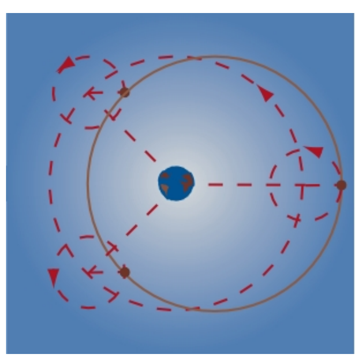


Fig. 16 – Épicycle et déférent. L'épicycle et le déférent tournent à une même vitesse angulaire de sens antihoraire. La trajectoire est un cercle et la Terre n'est pas au centre.

En modifiant le sens et la vitesse de rotation de l'épicycle et du déférent, on peut développer différents modèles d'orbites. Ainsi, à la figure 17, l'orbite est une ellipse.

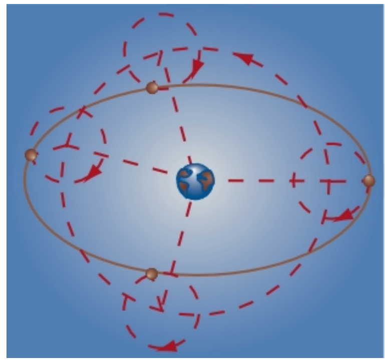


FIG. 17 – Épicycle et déférent. L'épicycle et le déférent tournent à une même vitesse angulaire, l'épicycle de sens horaire et le déférent de sens antihoraire. La trajectoire est une ellipse.

On peut également reproduire des mouvements qui, vus de la Terre, donnent, par rapport au fond étoilé de la sphère des fixes, l'illusion de mouvements rétrogrades.

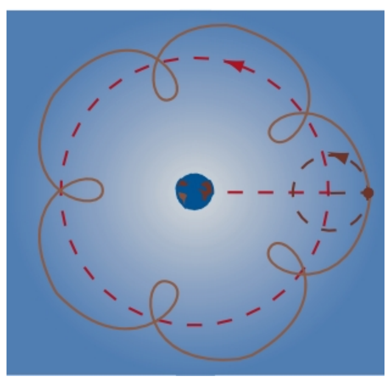


FIG. 18 – Épicyle et déférent. L'épicycle et le déférent sont de sens horaire et l'épicycle a une vitesse cinq fois supérieure à celle du déférent.

Les astronomes ont utilisé les épicycles et les déférents pour concilier le mouvement circulaire, qui peut se poursuivre indéfiniment, et les trajectoires des planètes qui manifestement n'étaient pas assez régulières pour être explicables par une simple révolution des sphères célestes. Cependant, pour décrire certaines irrégularités, il faut introduire plusieurs cercles. Ainsi, l'épicycle peut être en rotation autour d'un cercle qui est lui-même en rotation autour d'un déférent. L'utilisation des épicycles et déférents a été retenue et améliorée par les astronomes Hipparque et Ptolémée.

Hipparque de Nicée (~190 à ~120)

Considéré comme le plus grand astronome de toute l'antiquité classique, Hipparque a œuvré à Nicée, à Rhodes et Alexandrie. Son œuvre nous est surtout connue par les ouvrages de Ptolémée. À Rhodes et Alexandrie, il a fait des observations d'une grande rigueur entre ~161 et ~127 à l'aide d'instruments perfectionnés pour l'époque. Il a mis en évidence un grand nombre de phénomènes insoupçonnés avant lui et il a déterminé une valeur de 365 j 5 h 55 min 12 s pour la durée de l'année tropique, valeur bien plus précise que tout ce qui avait été proposé avant lui. La vraie valeur est de 365 j 5 h 48 min 46 s. Il a dressé un catalogue d'au moins 800 étoiles, en notant leurs positions avec précision et en évaluant leurs magnitudes apparentes. Il aurait réalisé ce catalogue dans le but de léguer à la postérité un outil permettant de détecter l'apparition de nouvelles étoiles (novas) ou même le mouvement des étoiles les unes par rapport aux autres[5].

Les calculs à effectuer ont amené Hipparque à développer une géométrie des cordes qui est l'ancêtre de la trigonométrie moderne.

Claude Ptolémée (environ 85 à 165)

Claude Ptolémée est un astronome, mathématicien et géographe grec membre de l'Université d'Alexandrie. Il y fit ses observations de 127 à 141 et publia un ouvrage qui est un exposé complet du système géocentrique. Cet ouvrage fut rédigé en grec au milieu du II^e^ siècle de notre ère. Une version latine, appelée Almagestum, a cependant été connue bien avant. L'imprimerie n'étant pas inventée et l'ouvrage étant imposant, les copies étaient longues à produire et seulement quelques astronomes par siècle auront la chance de le consulter. La traduction latine de la version originale sera éditée pour la première fois en 1515 alors que la version originale en grec ne sera publiée qu'en 1538 à Bâle en Suisse.

Vues de la Terre, les planètes ne semblent pas avoir une vitesse constante. Ptolémée croit

[5] Pour plus de détails sur les travaux d'Hipparque, voir « Cartographie terrestre et céleste », Bulletin de l'AMQ, octobre 2005.

qu'il doit cependant exister un point par rapport auquel le mouvement est uniforme. Il l'appelle « *point équant* ». C'est un point dont la distance au centre du déférent est égale à la distance du centre du déférent au centre de la Terre, soit $EC = CT$.

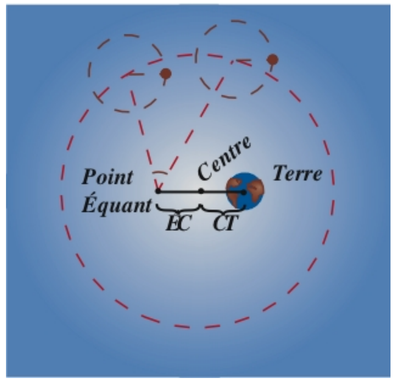


FIG. 19 – Point équant de Ptolémée. Point symétrique à la Terre par rapport au centre de l'Univers.

Le segment de droite joignant le point équant au centre de l'épicycle tourne autour du point équant à une vitesse angulaire constante.

En considérant que le segment de droite joignant le point équant au centre de l'épicycle tourne dans le sens antihoraire à une vitesse angulaire constante ω et que l'épicycle tourne dans le sens horaire à une vitesse 2ω, on obtient l'orbite suivante (figure 20).

Le segment de droite joignant le point équant au centre de l'épicycle décrit un angle constant par unité de temps. On remarque que les distances parcourues par la planète sont différentes durant ces intervalles de temps (figure 20).

Les notions d'excentrique, d'épicycle et de déférent étaient considérées comme des ajustements jugés acceptables du géocentrisme puisque les sphères des planètes ont une épaisseur et que la planète se déplace de la couche inférieure à la couche supérieure en passant de son périgée à son apogée, ce qui explique qu'elle ne soit pas toujours à la même distance de la Terre. Ainsi, le périgée de la Lune était estimé à 33 rayons terrestres (33 rt) alors que son apogée est à 64 rt. L'épaisseur du ciel lunaire est donc de 31 rt. Chaque planète a son ciel et cette superposition de ciels est comparée aux pelures d'un oignon. Les notions d'épicycle

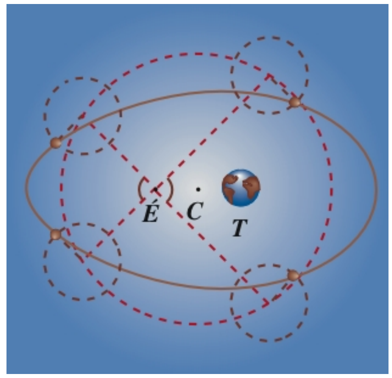


FIG. 20 – Synthèse de Ptolémée. Le segment de droite joignant le point équant au centre de l'épicycle tourne autour du point équant à une vitesse constante.

et d'excentricité s'harmonisent donc facilement avec la théorie. De plus, ce sont deux façons équivalentes de décrire une même trajectoire comme l'illustre la synthèse de Ptolémée. Dans son mouvement sur l'épicycle, la planète décrit un cercle dont la Terre n'est pas tout fait au centre.

Les artifices imaginés par les astronomes grecs constituent une entorse à la perfection supralunaire. Ces ajustements à la pièce de la théorie rendront celle-ci suffisamment compliquée pour que d'autres astronomes la remettent en question en cherchant un modèle plus simple. En effet, le système de Ptolémée, pour rendre compte des mouvements apparents des planètes, comportait 80 cercles différents (épicycles et déférents). Ces artifices constituaient un rejet implicite du principe du mouvement uniforme et circulaire des corps célestes. Le système de Ptolémée sera d'ailleurs critiqué par certains de ses traducteurs.

Bibliographie

Astronomy Before the Telescope, Édité par Christopher Walker, The trustees of the British Museum, St. Martins Press, New-York.

Ferguson, Kitty, Measuring the Universe, New-York, Walker and company, 1999, 342 p.

Kline, Morris, *Mathematics, A Cultural Approach*, Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1962, 70 p.

Kline, Morris, *Mathematics in Western Culture*, New York, Oxford University Press, 1974, 484 p.

Ptolemy's Almagest, translated and annoted by G.J. Toomer, Princeton, Princeton University Press, 1998, 693 p.

Maor, Eli, Trigonometric Delights, Princeton, Princeton University Press, 1998, 236 p.

http ://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/

Note Mathématique

Roger Beaudet
Ingénieur retraité

La Trisection de l'angle – Méthode Approchée Règle et Compas seulement

Problème

Soit un angle au centre AOB quelconque dans un cercle du centre O et de rayon R avec deux diamètres orthogonaux $X'X$ et YA. Construire à l'aide de la règle et du compas seulement l'angle au centre AOC dont l'ouverture est le tiers de celle de l'angle AOB.

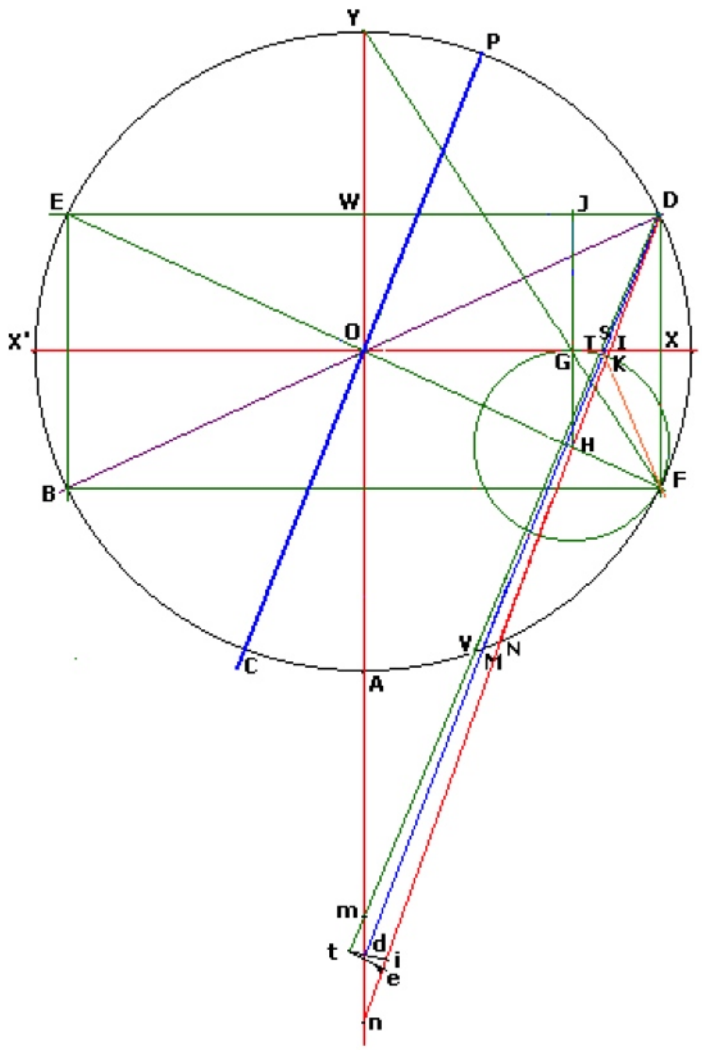
Remarque : On sait que ce problème de la trisection de l'angle à l'aide de la règle et du compas a été démontré impossible par Wantzel en 1837. On peut néanmoins s'intéresser à une solution approchée. Dans l'antiquité, Nicomède a proposé une solution approchée par la construction d'une trisectrice qui est la conchoïde de Nicomède (voir le site http ://serge.mehl.free.fr/anx/trisection.html). Nous proposons ici une solution approchée avec une très bonne approximation en n'utilisant que la règle et le compas.

Construction

Prolonger le côté BO pour couper le cercle $AX'YX$ en un point D. Mener $DE//X'X$ ainsi que sa symétrique BF. Joindre les points D et F. Mener la diagonale EF ainsi que la corde YF qui coupera l'axe $X'X$ au point G.

Construire GJ normale à ED. La droite GJ coupera ED au point J et EF au point H. Le $\triangle GHF$ est isocèle puisqu'il est semblable à YOF.

Mener HD qui coupe l'axe XX' au point I.



De H comme centre, tracer l'arc de cercle GF de rayon HG qui coupe HD en un point K.

Joindre les points K et F, et prolonger la ligne pour couper l'axe $X'X$ au point T. Le $\triangle KHF$ est isocèle.

Soit S un point de $X'X$ et d' l'intersection de DS avec YA. On sait déjà depuis Nicomède que si $Sd' = 2R$, alors $\angle FDS$ est le tiers de $\angle FDO$ $(= \angle AOB)$. Une belle démonstration se trouve sur le site déjà cité http ://serge.mehl.free.fr/anx/trisection.html. Nous donnerons ci-après une réciproque de cette proposition et montrerons comment obtenir avec la règle et le compas seulement une bonne approximation du point d'.

Énoncé 1 Si le point S sur $X'X$ est tel que $\angle SDF$ est le tiers de $\angle AOB$, alors

a) la droite SD divisera $\angle TDI$ au tiers de sa valeur ;

b) $Sd' = 2R$.

Énoncé 2 Si chacun des segments DT et DI est prolongé d'une même longueur $2R$, et que les extrémités t et i sont jointes, la droite ti coupera l'axe YA en un point d, et $\angle YdD \cong \angle AOB/3$ avec une précision supérieure à 1/100000 pour les valeurs $\angle AOB < 50$ degrés.

Démonstrations

1- Hypothèse : $\angle SDF = \angle AOB/3 = \angle ODF/3$.

a) La droite SD divise l'angle TDI au tiers.

On a $\angle TDS = \angle TDF - \angle SDF$ et $\angle TDF = \angle TFD = \angle KFD$.

Aussi $\angle KFD = \angle OFD - \angle HFK$ et vu que $\triangle KHF$ est isocèle $\angle HFK = (\angle OHG + \angle IDF)/2$.

Ainsi $\angle TDS = \angle OFD - (\angle OHG + \angle IDF)/2 - \angle SDF$.

Vu que $\angle OFD = \angle OHG = \angle AOB$, on a $\angle TDS = (\angle AOB - \angle IDF)/2 - \angle SDF$.

Comme $\angle IDF = \angle SDF - \angle SDI$, on a $2^*\angle TDS = (\angle AOB - 3^*\angle SDF) + \angle SDI$. Comme par hypothèse $\angle SDF = \angle AOB/3$, on obtient $2^*\angle TDS = \angle SDI$.

C.Q.F.D.

b) $Sd' = 2R$.

Soit M l'intersection de DS avec le cercle de diamètre $X'X$. On a $\angle ODM = \angle AOB^*2/3$ et comme angle au centre $\angle BOM = 2^*\angle AOB^*2/3 = \angle AOB^*4/3$ et $\angle AOM = \angle BOM - \angle AOB = \angle AOB/3$.

Il s'ensuit que les triangles OMd' et OMS sont isocèles et leurs côtés auront pour longueur $d'M = OM = MS = R$, c'est-à-dire $Sd' = 2^*R$.

C.Q.F.D.

2- L'angle $\angle YdD \cong \angle AOB/3$ avec une précision supérieure à 1/100000.

Il découle de ce qui précède que si on pouvait construire avec exactitude la courbe *conchoïdale* du lieu des extrémités des segments de droite issus du point D et débordant d'une longueur égale à 2^*R l'axe XX', son intersection d' avec l'axe vertical YA serait la solution géométriquement exacte du problème. On peut par contre, sachant que les points T, S et I, constructibles à l'aide de la règle et du compas, sont situés sur l'axe XX', construire les points t et i de cette courbe en prolongeant les segments DT et DI d'une même longueur $2R$. On sait aussi que ces points t et i seront de part et d'autre de l'axe YA, vu que si $SDF = \angle AOB/3$ la droite DS est située au tiers de l'angle $\angle TDI$, et donc que la base ti du triangle tDi devra couper l'axe YA en un point d intérieur au segment ti. L'erreur anticipée résultera du fait que la ligne ti est considérée comme droite alors qu'elle est légèrement courbe. Cette erreur sera d'autant plus faible que la longueur ti sera courte.

L'angle cherché $\angle AOC = \angle YdD = \angle AOB/3$ sera défini par la construction du rayon $OC//Dd$.

Les calculs dans les tableaux sous-jacents, montrent que pour des valeurs $\angle AOB$ variant de 5° à 85°, $\angle TDI$ varie de 0° à un maximum d'environ 5 degrés, et des erreurs relatives inférieures à $1/100000$ pour $\angle AOB < 50^\circ$, et inférieures à $1/10000$ pour $\angle AOB < 70^\circ$. Ainsi, la réduction des $\angle AOB > 50^\circ$ avant leur division, d'une valeur soit de 22.5° ou soit de 45°, avec la correction des résultats soit de 7.5° ou soit de 22.5°, une opération très simple, assurerait une précision de $1/100000$ pour tous les angles.

Remarques : La solution graphique exige que la distance TI soit suffisante pour que les points T et I soient clairement définis. Il est ainsi nécessaire de choisir une valeur R bien ajustée à l'angle à trisecter.

Conclusion

La méthode proposée ci-dessus, qui ne requiert que l'usage de la règle et du compas, permet la trisection *ipso facto* d'un angle quelconque, avec une erreur de 0.38 sec. d'arc pour les $\angle AOB < 45^\circ$, soit inférieure à 0.01 mm., sur la longueur d'une circonférence de 100 m. de diamètre. Il s'agit d'une précision supérieure à celle des meilleurs théodolites en usage, soit moins de 1 seconde d'arc.

S'agit-il d'une solution géométrique ? Les orthodoxes diront « non » vu que cette solution est approximative. Qu'en auraient pensé les *Dinostrate, Archimède, Hippocrate* et *autres* géomètres de l'Antiquité ? Auraient-ils été satisfaits de cette solution ?

Tableaux des données calculées pour $\angle$OAB de 5° à 85°

AOB	IDX=HDF	TDX	TDI	Dt	Di	te	De
5	1.66619628	1.66690186	0.00070558	2.99661644	2.99661608	0.00003690	2.99661644
10	3.32956306	3.33521847	0.00565542	2.98647861	2.98647294	0.00029478	2.98647859
15	4.98723473	5.00638264	0.01914791	2.96962496	2.96959663	0.00099243	2.96962480
20	6.63627259	6.68186371	0.04559112	2.94611911	2.94603122	0.00234427	2.94611817
25	8.27362599	8.36318700	0.08956101	2.91604906	2.91583972	0.00455818	2.91604550
30	9.89609064	10.05195468	0.15586404	2.87952623	2.87910557	0.00783328	2.87951558
35	11.50026289	11.74986856	0.24960567	2.83668397	2.83593444	0.01235781	2.83665705
40	13.08248883	13.45875558	0.37626675	2.78767582	2.78645678	0.01830680	2.78761571
45	14.63880660	15.18059670	0.54179011	2.73267325	2.73083085	0.02583983	2.73255107
50	16.16488013	16.91755994	0.75267981	2.67186285	2.66924660	0.03509856	2.67163230
55	17.65592239	18.67203881	1.01611642	2.60544294	2.60193031	0.04620401	2.60503322
60	19.10660535	20.44669732	1.34009197	2.53361931	2.52915026	0.05925346	2.53292633
65	20.51095373	22.24452313	1.73356940	2.45659994	2.45122347	0.07431676	2.45547557
70	21.86221872	24.06889064	2.20667192	2.37458846	2.36852362	0.09143156	2.37282755
75	23.15272713	25.92363644	2.77090931	2.28777576	2.28149025	0.11059712	2.28510092
80	24.37370042	27.81314979	3.43944936	2.19632934	2.19063925	0.13176585	2.19237322
85	25.51503719	29.74248141	4.22744422	2.10037932	2.09657443	0.15483134	2.09466478

AOB	ie	ti	tin	dn	YdD	Écarts-sec.*	Err.-Rel.
5	0.00000036	0.00003690	89.44595194	0.00084610	1.66666667	0.000000	0.0000000
10	0.00000566	0.00029484	88.90098426	0.00338369	3.33333334	0.000009	0.0000000
15	0.00002817	0.00099283	88.37435583	0.00761063	5.00000004	0.000150	0.0000000
20	0.00008696	0.00234588	87.87568927	0.01352342	6.66666698	0.001136	0.0000000
25	0.00020578	0.00456282	87.41517004	0.02111726	8.33333486	0.005513	0.0000002
30	0.00041001	0.00784401	87.00376735	0.03038612	10.00000561	0.020187	0.0000006
35	0.00072261	0.01237892	86.65348578	0.04132290	11.66668360	0.060973	0.0000015
40	0.00115893	0.01834344	86.37765846	0.05391965	13.33337784	0.160235	0.0000033
45	0.00172022	0.02589703	86.19129439	0.06816776	15.00010536	0.379287	0.0000070
50	0.00238570	0.03517955	86.11149585	0.08405837	16.66689675	0.828293	0.0000138
55	0.00310292	0.04630808	86.15796433	0.10158288	18.33380506	1.698216	0.0000257
60	0.00377607	0.05937366	86.35361766	0.12073366	20.00092021	3.312740	0.0000460
65	0.00425210	0.07443831	86.72534428	0.14150525	21.66839285	6.214256	0.0000797
70	0.00430393	0.09153280	87.30492229	0.16389618	23.33647494	11.309772	0.0001346
75	0.00361066	0.11065605	88.13012975	0.18791199	25.00559039	20.125407	0.0002236
80	0.00173397	0.13177726	89.24606092	0.21357033	26.67646216	35.263781	0.0003673
85	-0.00190965	0.15484312	89.29336576	0.23809006	28.31382058	-70.245927	-0.0006887

N.B.: 1 sec. d'arc = 0.2424 mm. pour un rayon de 50 m.

Par : R, Beaudet / 2005

Lu pour vous

Robert Bilinski
Collège Montmorency

Sous la présente rubrique, vous trouverez des livres forts différents l'un de l'autre : il y a un livre de vulgarisation, un livre qui vulgarise de manière savante la quatrième dimension, une revue de littérature en deux tomes sur les découpages, un plaidoyer pour un nivellement par le haut au primaire (avec preuves à l'appui avec des décrocheurs), une pièce de théâtre mathématique et un recueil d'essais sur l'utilisation des statistiques dans la création de politiques. Ensuite, nous remercions encore chaleureusement Hélène Kayler pour son aide. En effet, elle nous a fait une recension d'un recueil québécois de didactique.

G. Dowek, J-P Bourguignon, J-C Novelli et B. Rittaud,
Jeux mathématiques et vice versa,
***Le Pommier,* 2005, 190 p., ISBN 2-7465-0243-7, environ 16 $.**

Si la tendance se maintient, les livres du Pommier apparaîtront souvent dans cette chronique. Ils se spécialisent en sciences sans négliger les mathématiques. Nous y retrouvons des livres abordables tant au niveau des mathématiques que du portefeuille. Par contre, ce livre-ci était destiné à une fin immonde ! Bon, j'exagère, c'est juste moi qui allais faire une mauvaise critique. Des gens m'ont demandé à deux reprises dans les derniers mois s'il m'arrivait de ne pas aimer un livre de mathématique. J'ai répondu que oui, mais il y a un biais dans la chronique : je me procure des livres qui m'attirent et il est plus agréable d'écrire sur un bon livre. Mais celui-ci allait être différent. En feuilletant ce livre, j'étais sûr que celui-ci allait être de ceux ayant une critique moins que reluisante.

J'avais vu du plagiat ! Mais en le lisant, je voyais l'erreur des premières impressions. Ce n'était pas du plagiat, mais un approfondissement d'un sujet déjà traité ailleurs. Pour ceux qui ont suivi l'*Assassin des Échecs* paru chez le Pommier en 2005 et recensé ici en octobre, on retrouve l'étude topologique des labyrinthes. Le début du premier chapitre de *Vice-Versa* est l'explication qui se trouve dans l'*Assassin*. Mais cette partie n'est qu'un début un peu remanié. L'auteur y rajoute d'autres éléments mathématiques qui permettent d'affronter les labyrinthes de manières plus savantes. Entre autres, l'auteur introduit quelques explications sur les graphes qui augmentent l'étude topologique. Mais aussi, ce livre est un recueil et contient bien d'autres sujets.

On retrouve six chapitres et quatre auteurs, donc par le théorème des tiroirs de Dirichlet, on sait qu'au moins un auteur a écrit deux chapitres ou plus. En fait, deux des auteurs ont écrit deux chapitres et les deux autres auteurs ont écrit un chapitre chacun. Les sujets sont variés : labyrinthes, coloriage des cartes, le problème du voyageur de commerce, inventer des jeux ludiques avec des mathématiques, générer des nombres aléatoires et finalement les notes de musiques. Une autre impression que l'on peut avoir, et qui se confirme en lisant le livre, est que les sujets se démarquent de ceux que l'on retrouve dans les autres livres de vulgarisation. La clientèle ciblée est « large publique », ainsi vous ne trouverez pas de contenu mathématiquement précis. Contrairement à d'autres livres, ce livre a visiblement une visée pédagogique qui dépasse la simple information : on veut faire sentir au lecteur que celui-ci est capable de faire les mathématiques qu'il lit. Les auteurs y arrivent chacun à sa manière, mais on peut dire qu'ils y arrivent en nous faisant cheminer jusqu'à la réponse à petits pas.

Ce livre est donc un autre ouvrage de vulgarisation. Loin d'être comme les autres, il les complète toutefois. Par contre, il a l'avantage d'être court et facile à lire. Mais ceci provient du fait qu'il traite de moins de sujets. Ainsi, il reviendra au lecteur de faire son choix... Bonne lecture !

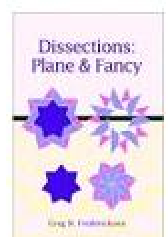
François Lo Jacomo, *Visualiser la quatrième dimension, Vuibert,* 2002, 128 p., ISBN 2-7117-5315-8, environ 25 $.

S'il y a un sujet mathématique qui fait parler et qui a le pouvoir d'attirer la curiosité des gens c'est bien la quatrième dimension. C'est en lisant la conclusion que l'on apprend la motivation qui a poussé l'auteur à écrire ce livre. Par contre, on peut lire des choses fort intéressantes dans l'avant-propos : « Pour moi, les mathématiques sont un art. Certes, je ne méconnais pas les contraintes de rigueur..., mais ceci ne prévaut pas sur la beauté des objets et concepts mathématiques... » Les intentions sont là, mais il vient vite à l'esprit qu'elles peuvent être interprétées de bien des manières...

Par exemple, bien que j'aie lu le livre, je ne suis pas convaincu de la pertinence du premier chapitre qui traite « du problème du miroir ». Du moins, je l'aurais inversé avec le second chapitre qui parle de la 4^{e} dimension. Ainsi, on aurait moins l'impression d'attendre que ça commence. Mais, vous en jugerez vous-même... Le problème du miroir se pose avec la question : « Pourquoi un miroir inverse-t-il la gauche et la droite et non pas le haut et le bas ? » Après dix-sept pages, on arrive à la dernière page du premier chapitre et on peut lire : « D'ailleurs, comme l'analyse Martin Gardner, il existe des formes à deux dimensions qui sont non superposables si on se contente de les déplacer dans le plan, car elles sont orientées différemment, mais qui deviennent superposables par déplacement (retournement) dans la troisième dimension. De même, les objets énantiomorphes (un objet non symétrique et son image dans le miroir), non superposables si on ne peut que les déplacer dans l'espace de dimension 3, deviendraient superposables si on pouvait les retourner dans un espace de dimension 4. » Ainsi, le problème du miroir n'est qu'un prétexte pour introduire la nécessité de considérer les espaces à 4 dimensions pour bien comprendre les objets qui nous entourent. Cela ne contredit-il pas l'opposition qu'il faisait dans son avant-propos : beauté et rigueur de la preuve... De toute manière, il y a plus simple pour introduire la 4^{e} dimension, comme les arguments de Flatland. Et pour être sûr, il s'agit ici d'une quatrième dimension physique (le temps ne compte pas).

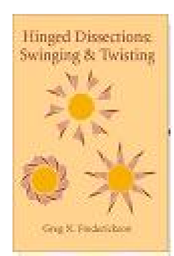
Si on exclut l'avant propos, la table des matières, l'introduction, l'index, la bibliographie et le glossaire, on peut arrondir et dire que ce livre a 100 pages regroupées en 4 chapitres. D'ailleurs, si on enlève le premier chapitre sur le problème du miroir, ça tombe à environ 80 pages. Dans les trois chapitres restants, l'auteur introduit les hyperstructures ou polytopes (à la manière des polygones et polyèdres, mais il s'agit plus d'un usage anglo-saxon), fait un bref tour des nombres complexes, des quaternions, des groupes (chapitre 2) pour ensuite appliquer ces concepts à l'analyse des hyperstructures. D'ailleurs, nommons-les : hypertétraèdre, hypercube (chapitre 3), hyperoctaèdre et hypericosaèdre (chapitre 4). Ce que je veux montrer, c'est que ce livre est dense. Il n'est pas mal écrit, mais très densément écrit. Souvent, je me suis pris à devoir relire une page pour être sûr d'être au même endroit que l'auteur. Ce livre est de la vulgarisation, mais définitivement de la vulgarisation de très haut niveau. Il faut travailler pour le comprendre, mais ce n'est pas un défaut. Mais ça en vaut la chandelle pour les dessins... Je me demande par contre s'il est possible de réellement vulgariser les coupes en 4D ou les « couches » d'un hypericosaèdre par exemple !

En somme, je ne crois pas qu'il y ait présentement mieux si on veut « une introduction » à la quatrième dimension. Par contre, il faut être prêt à plancher pour vraiment saisir. C'est sûr que l'on peut, comme pour tout autre livre, y trouver son compte. Le livre appartient tout autant au lecteur qu'à l'auteur et on peut probablement s'en tenir aux images... Mais on en manque si on ne se met pas le texte sous la dent. Bonne lecture !



Greg Frederickson, *Dissections : Plane and Fancy,*
***Cambridge University Press,* 1997, 310 p., ISBN 0-521-57197-9, environ 34 $.**

et

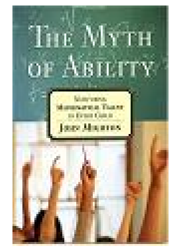


Greg Frederickson, *Hinged dissections : Swinging and twisting,*
***Cambridge University Press,* 2002, 288 p., ISBN 0-521-57197-9, environ 50 $.**

Beaucoup d'entre nous suivaient les chroniques de Martin Gardner dans *Scientific American* ou bien celles de J-P Delahaye dans *Pour La Science*. On y retrouvait bien des mathématiques inusitées. Le contenu des livres de cette recension est dans la même veine. On peut d'ailleurs aussi lire les chapitres cinq à huit du plus récent livre de Delahaye, *Les Inattendus Mathématiques*, pour un bref survol du contenu de ces deux livres. En effet, les livres recensés sont beaucoup plus détaillés : ils couvrent la littérature disponible sur les dissections. À titre indicatif, ce sont des découpages d'une figure qui permettent d'en construire une autre avec les morceaux issus du découpage. Les pavages y sont très reliés et on en retrouve des références fréquentes dans le livre. De plus, ils sont beaux et bien écrits. On pourrait passer des journées à contempler les images sans lire un seul mot et être envoûté.

Le premier des deux livres contient les découpages les plus simples. Mais on ne peut les appeler simples qu'en comparaison avec ceux que l'on trouve dans le second volume. Je vais aussi être franc, je n'ai pas fini de lire les deux livres avant de faire la chronique. Mais, il est clair qu'ils ont été bien écrits, de manière consciencieuse et minutieuse, avec passion et surtout avec rigueur. De plus, je ne pense pas me tromper en parlant de la fascination et de l'émerveillement que ce livre a suscités chez moi et les autres (non-mathématiciens) à qui j'ai montré les livres. De toute manière, je n'ai aucune honte à le dire, parce que ce livre est à mon chevet depuis quelques mois de manière « active ». Au moins une fois par semaine, j'ouvre au hasard un des deux livres et je découvre quelque chose de nouveau, de beau et de fascinant. Ces livres sont pleins de constructions abracadabrantes : Comment couper des croissants pour obtenir des croix ; Comment passer d'un rectangle à un dodécagone, d'un carré en une étoile à douze pointes ; Le plus débile, c'est quand on embarque dans le 3D. Les algébristes ne seront pas laissés sur leur faim, car toutes les constructions sont présentées avec preuves (Pythagore, nombre d'or, symétries, pavages et autres raisonnements). Ce qui rend le second livre plus incroyable que le premier est le fait que les découpages permettent une transformation par rotation autour des sommets des découpages (comme des gonds de porte).

Ces problèmes datent quand même de quelques années. On retrouve ce genre de problème sous la forme de casse-tête chez Sam Loyd à la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle. Mais les mathématiciens qui s'y sont frottés sont nombreux et l'historique du domaine est plus long que cela. Un attrait majeur de ce livre est la recherche bibliographique (environ 250 citations) et historique (notices, biographies, vignettes, ...) que l'on rencontre à chaque tournant. L'auteur, un Américain, a eu la force d'esprit d'éviter un certain anglo-centrisme dans l'œuvre. On remarque que les Français ont joué un rôle important dans la création et l'évolution des situations présentées dans ce livre. Voilà une lecture de longue haleine ou un livre à mettre sur la table de son salon pour faire la conversation à la manière d'un livre d'art. Bonne lecture !



John Mighton, *The Myth of Ability,*
***Anansi Press,* 2003, 212 p., ISBN 0-88784-693-9, environ 17 $.**

Je ne me souviens plus comment je suis tombé sur ce livre. Ma session est exigeante et j'en perds des bouts. J'avais planifié écrire sur un livre français de philosophie intitulé « Mathématiques », mais la lecture du livre canadien « The Myth of Ability » a déplacé sa recension en mars. Ce livre m'a touché. Seulement le temps dira s'il m'a aussi marqué. L'auteur relate l'expérience qu'il a eue face aux mathématiques dès son jeune âge : des maîtres au primaire qui l'ont découragé en dépit de son amour pour la matière, une carrière de dramaturge, puis un renouement avec LA matière. Il fait alors un bac, une maîtrise et un doctorat en mathématiques. Arrivé dans la fleur de l'âge, son travail consiste à les enseigner. D'après ce qu'il dit et de ce que l'on dit de lui dans les médias, il le fait avec beaucoup de succès. Ce livre est un témoignage de sa méthode.

Ça fait longtemps que je vis un schisme entre mes convictions et ma pratique de professeur : d'une part, je crois que tout le monde a la capacité de faire des maths et, d'autre part, j'ai des étudiants qui coulent mes cours. Par contre, en cours privé, j'ai eu 100 % de succès à prendre des élèves qui échouent et les mener au succès. L'origine de cette différence est le temps limité pour voir une matière, la synergie en classe et la rigidité de l'évaluation (une fois coulé, on ne peut montrer que l'on peut se reprendre), mais aussi le manque de contact direct pour motiver.

M. Mighton était dramaturge et on l'a approché pour donner des cours privés de mathématiques. C'est en enseignant la matière qu'il a compris ce qu'il lui manquait et compris qu'il aimait encore cette matière pour laquelle on en le destinait pas. Il a alors pris des cours de mise à niveau puis a fait un doctorat en mathématiques. À la fin de ses études, il a fondé un organisme à but non lucratif (Junior Undiscovered Mathematics Prodigies) afin d'enseigner les mathématiques dans les milieux défavorisés de Toronto. Son livre est rempli de bon sens et de témoignages intéressants. Sa technique s'applique bien au primaire, mais pourrait-elle s'étendre plus loin ? Il découpe une technique comme celles des fractions en une suite d'étapes très simples. Ça ne semble pas très efficace, mais sa règle numéro un est de ne laisser personne sans comprendre. Il s'arme donc d'une suite de feuilles d'exercices supplémentaires pour les « plus vites », pour pouvoir répéter pour les « moins vites ». Il arrive à la fin de l'année avec des taux de succès de 100 % aux examens ministériels et des notes moyennes dans les 90 %. Ce qu'il dit c'est qu'au début de l'année, il voit moins de matière dans le détail pour s'assurer de garder tout le monde, mais une fois le rythme pris, il ne reste plus que des « plus vites ». Ainsi, avec l'accélération des apprentissages, la fin de l'année se fait plus rapidement. Globalement, il réussit à tout faire. Pour ne pas avoir la tâche trop facile, son enseignement se fait en milieu défavorisé avec des enfants « très en retard ».

Les chapitres trois et suivants montrent des extraits de cours qu'il offre sur différents sujets « classiques » pour le primaire (fractions, nombres, opérations, ...), mais il aborde aussi des sujets plus avancés (logique, rapports, proportions, automates à états finis, ...). Pour couvrir un même sujet, de multiples approches sont utilisées. Dans l'explication, il y a souvent une approche ensembliste (la division est un tri d'objets dans des boîtes...). Au début, il ramène toutes les opérations à une addition (multiplication, division, PPCM, ...), puis il voit les méthodes plus traditionnelles. Il y a toujours des travaux algébriques et géométriques. La question est : est-ce si novateur ? Il me semble que, dans mon passé, ces approches furent aussi utilisées. Mais, en discutant souvent avec d'autres professeurs et didacticiens, j'en suis arrivé à la conclusion que j'étais « chanceux » de les avoir vues. Par contre, un point vraiment intéressant est le retour continuel à la psychologie de l'enfant. Pour les motiver, il leur fait faire des mathématiques « de niveaux plus élevés » avec succès. C'est rafraîchissant le nivellement par le haut ! L'organisme qu'il a fondé grandit. Ayant le besoin de former ses tuteurs, il a écrit des guides, en plus de ce livre, qui sont disponibles pour les parents qui voudraient mettre la main à la pâte.

Ce livre est constructif dans ses critiques du système et surtout plein d'optimisme. C'est rafraîchissant de voir qu'il a tenu à ses idéaux et que, pour les mettre à bien, il est sorti des sentiers battus pour créer un organisme indépendant et faire « fi » des structures établies. Il ne révolutionne pas toutes les mathématiques. Mais, selon moi, il humanise son approche pour l'élève. C'est probablement plus exigeant pour le professeur. J'ai eu beaucoup d'affinité « spirituelle » avec ses propos. Bonne lecture !

J-M Foutel et F Vert, *(Au café des) nombres,* *Ellipses,* 1999, 160 p., ISBN 2-7298-7830-0.

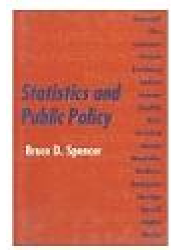
En prenant ce livre, j'avais plusieurs préjugés tout en ne sachant pas à quoi m'attendre. Je me basais sur d'autres pièces de théâtre que j'avais vues auparavant. Ainsi, je m'attendais à une approche plus superficielle des mathématiques. Je me suis aussi fait à l'idée qu'une pièce de théâtre devait être jouée. Alors qu'en lisant ce livre, je me voyais questionner cette vérité : serait-ce une pièce de théâtre vouée à être lue et non jouée. Et puis, on peut après tout faire une infinité de variantes sur le thème d'une pièce de théâtre mathématique. Avant de la lire, il est donc difficile de dire si elle sera bonne ou mauvaise.

J'ai trouvé ce livre inégal. Des fois, je n'arrivais pas à le déposer tant il était intéressant. À d'autres moments, je n'arrivais pas à garder mon intérêt. Le concept est simple en apparence. Il y a un « candide » qui se promène dans un marché à ciel ouvert et où chaque magasin vend des mathématiques. On offre des nombres premiers par ci, des kilochiffres de Pi par là. À un kiosque, on peut jouer au jeu de Nim pour de l'argent... Certains restaurants transigent des Gauss binaires, d'autres des Gauss dans une autre base selon le nombre de doigts sur les mains du proprio. Le candide, nommé Antileon, est perdu et ne comprend pas ce qu'il lui arrive. Alors, il cherche sa sœur Iphimedie et son chien Bourbaki ou son ami Agamédé pour qu'ils lui expliquent ce qu'il faut pour être fonctionnel... dans ce monde psychédéliquement mathématique !

Ce livre non traditionnel est un grand effort de rédaction et de conception de fiction. Les concepts mathématiques sont clairement maîtrisés par les auteurs. Ils ont aussi travaillé énormément pour obtenir le livre qu'ils ont fait. Le niveau du français est soutenu, à part quelques abréviations à droite et à gauche. Par chance, il n'y a pas d'argot. Peut-être une des difficultés que j'ai eues est que les mathématiques, langage écrit s'il y en a un, sont transmises « oralement » dans ce texte théâtral. On retrouve quand même beaucoup de graphiques et d'illustrations. Pour ceux qui en feront une mise en scène, il faudra définitivement en faire une pièce multimédia. Il faudra mettre beaucoup d'effort pour y arriver, car les scènes changent fréquemment, à moins que l'on ne fasse un décor minimaliste et abstrait, pour créer des lieux interchangeables.

Je ne vais probablement pas relire ce livre souvent. Mais l'approche non traditionnelle me servira probablement un jour, surtout si j'arrive à bâtir un cours complémentaire en art comme je le voudrais. L'endos du livre nous apprend qu'il s'agit du troisième livre dans une série : le premier était *Dénombrement* et le second était *Probabilités sur les univers infinis*. Je vais probablement les lire bientôt. On retrouve à la fin de ce livre une très intéressante bibliographie commentée sur les livres traitant des nombres du plus vulgarisé au plus savant. Vous en retrouverez certains ici dans les chroniques à venir ! Donc, ce livre est clairement pour les mathématiciens aventureux et je conçois qu'il ne soit pas au goût de tout le monde. Bonne lecture !

Bruce Spencer Ed, *Statistics and Public Policy,* Clarendon Press, *Oxford University Press,* 1997, 284 p., ISBN 0-19-852341-6, 189 $.



Dans mes efforts de diversifier les livres recensés dans la chronique tout en restant attentif à nos membres, je suis tombé sur le titre de ce livre qui m'a envoûté. J'étais sûr de pouvoir trouver des réponses à l'éternelle question : « À quoi servent les mathématiques ? » Oui, j'ose dire que les statistiques sont des mathématiques : je le dis, je le pense et je le crois. En fait, tant qu'à avouer tout cela, je vais aussi sortir du placard... J'aime les statistiques ! Ça n'a pas toujours été de même et je peux affirmer que la masse de calculs que l'on faisait à la main y était pour quelque chose. Ce livre est tout autre : pas de calcul, « juste » des idées. Oh, mais quelles idées ! D'ailleurs, quels auteurs !

Ce livre décrit l'interaction entre les statistiques et la vraie vie, voire le conflit entre la théorie et l'application. Chacun des 14 chapitres de ce livre a été écrit par un ou deux statisticiens de renom ; notons la contribution des Chernoff, Kish, Kruskal, Mosteller, Savage, Wallis et autres. Le livre a été écrit pour faire le point sur l'interaction entre les statistiques et la Chose Publique. Ce travail a été accompli en l'honneur de l'ancien président de l'American Statistical Association, le professeur Savage, qui a été un des pionniers de ce genre de recherche et qui a marqué le domaine lors de l'inauguration de l'ASA en 1984.

Les chapitres ont été regroupés en trois sections : l'utilisation des statistiques pour décrire, la récolte de données et l'utilisation des statistiques dans l'analyse des politiques. Les auteurs ont choisi de provoquer dans leurs sujets et dans leurs positions, tout en « instruisant » sur la réalité de la pratique des statisticiens. Les bibliographies sont très étoffées à la fin des chapitres et les exemples sont nombreux et suscitent des interrogations (SIDA, exécutions, crimes de guerre, taux de chômage, définition des « races », les preuves statistiques en cours, les origines « racistes et eugénistes » de certains outils statistiques...).

Le livre commence en décrivant le long processus par lequel les preuves d'ADN furent admises dans les cours américaines. On suit ce feuilleton historique avec intérêt, car il contient sa dose de péripéties et de revirements : mauvaises données, non-compréhension par les jurés, interprétation des résultats... La première partie continue par une description d'un domaine en devenir : les statistiques des droits de l'homme. Rien de moins facile ! Les gouvernements ne veulent pas être pris en défaut, alors la récolte des données est souvent déficiente. De plus, on soulève la question épineuse : Comment mesure-t-on un droit de l'homme ou ses violations ? On finit la première partie en décrivant l'ambivalence de l'édifice militaire face aux statistiques (qui a pourtant aidé à les créer), en détruisant le mythe de l'objectivité des statistiques par rapport à l'ingérence politique et en terminant sur une longue discussion historico-philosophique sur le sens du concept de « normal » (en statistique et d'autres domaines).

La deuxième partie nous montre l'état des statistiques au « census bureau » à la fin de l'entre-deux-guerres, un peu avant et pendant la révolution Fisherienne. La section continue avec une description des différents recensements utilisés avec une discussion des recensements par échantillons roulants. L'auteur y soulève plusieurs points très intéressants (et nouveaux ?) sur l'éternel dilemme sondage/recensement. Le prochain chapitre discute de ce qui entoure « le comptage du peuple » : la précision, la vie privée et les gouvernements ouverts. Le fils conducteur pour cette réflexion est l'utilisation des « numéros personnels » (au Canada, c'est le numéro d'assurance sociale) : déshumanisent-ils les hommes ou humanisent-ils la société ? La section continue avec les enjeux dans l'identification des handicaps personnels : Qu'est-ce qu'un handicap ? Qui décide ? Qui répond au questionnaire ? Peut-on fonder nos politiques sociales sur ces données ? La seconde partie culmine sur le sujet de la dissémination de l'information. Dans ce chapitre on retrouve les premières formules algébriques « compliquées » et les premiers graphiques traitant de la diffusion (ici la diffusion de l'information sur un graphe discret). On retrouve ici les bases d'un domaine scientifique datant des années soixante : la sociologie mathématique !

L'ultime partie se démarque des autres par la grande part que les supports visuels occupent : graphiques, tableaux et illustrations. Le premier d'entre eux commence avec courage en essayant d'expliquer pourquoi les prévisions échouent et les politiques sont frustrées. L'auteur commence son chapitre avec : « Une nation peut se ruiner par de très belles solutions à court terme pour ses problèmes à long terme. » Le titre du prochain chapitre prend origine dans les publicités de Nike^{TM}, soit « Experimentation : Just do it ! ». La section suivante essaie d'expliquer pourquoi les effets d'une politique sont souvent divergents voire même en opposition aux buts visés par la politique en question. L'auteur y parvient en effectuant une analyse statistique ... Le livre finit en indiquant les problèmes des statistiques dans les médias. Cette section a été écrite par l'homme qui est au cœur de cet ouvrage : le Dr. Savage lui-même. Le thème est la mauvaise compréhension des concepts statistico-probabilistes, comme le Théorème Central Limite et celui de distribution. Il finit tout de même sur une note positive...

Dès les premières pages, j'étais envoûté par ce livre-réalité. On parlait de vrais faits, de vraies décisions et de cas réels qui se sont produits là, dans le courant de ma vie ! Je viens de prendre quelques cours gradués en statistique à l'université et la réalité des cours de statistique a grandement changé. Les ordinateurs font le gros du travail et on doit réfléchir aux données, à leur sens et à leur structure. Ce livre n'est pas un livre de recettes mais un plaidoyer pour des statistiques maniées avec humanité pour le bien de l'Humanité. Il devrait être lu par les futurs statisticiens et les gens qui veulent enlever la philosophie au cégep ! En effet, le statisticien doit aussi penser à ce qui entoure ses données. Le livre est coûteux, mais il renferme des textes écrits par des statisticiens parmi les plus grands, et les idées sont au cœur de la pratique statistique. Pour épargner votre portefeuille, utiliser celui de votre bibliothèque ! Bonne lecture !

Voici une recension invitée ! Je remercie Hélène Kayler, qui a eu l'obligeance d'accepter de recenser ce livre que j'avais acheté plus tôt cette année. Merci !

Sous la direction de Gisèle Lemoyne et François Conne, *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Presses de l'Université de Montréal, 1999, 367 pages.

Sous la direction de G. Lemoyne et F. Conne, il s'agit d'un ouvrage construit à la suite d'un symposium international tenu à l'Université de Montréal et qui fait appel à des didacticiens-chercheurs du Québec, de la France et de la Suisse.

Après une introduction par les deux directeurs – présentation du thème et de l'ouvrage, le contenu est partagé en deux grandes parties : l'une plus théorique et l'autre plus expérimentale. Le tout est suivi d'une bibliographie abondante (p. 357 à 363).

« La première partie offre une synthèse des différentes théories du cognitif, notamment de la théorie des situations (*didactiques*). Elle propose diverses modélisations des rapports du cognitif au didactique, qui permettent de mieux en appréhender la complexité. La deuxième partie présente et analyse des situations concrètes d'apprentissage et d'enseignement, où ces rapports se trouvent clarifiés et illustrés. »

Table

Introduction – par F.Conne (Université de Genève) et G. Lemoyne (Université de Montréal)

Première partie – La modélisation des rapports du cognitif au didactique

1. Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne – par F. Conne (Université de Genève)
2. L'Intentionnalité et le cognitif – par J. Portugais (Université de Montréal)
3. Perspective bio-cognitive – par S. René de Cotret (Université de Montréal)
4. La place du cognitif en didactique des mathématiques par R. Floris (Université de Genève)
5. Comment appréhender le cognitif depuis la didactique par A. Mercier (Université d'Aix-Marseille)
6. Interaction des perspectives épistémologique, cognitive et didactique par A. Sierpinska (Université Concordia)

7. La prise en compte du cognitif : jalons pour une évolution par A. Rougier (Université d'Orléans)

Deuxième partie – Modélisations cognitivo-didactiques du divers empirique de la didactique

8. Pour mieux comprendre la construction des nombres rationnels par P. Blouin (Université du Québec à Trois-Rivières)
9. L'introduction d'un objet de savoir en début de scolarité par J. Giroux (Université du Québec à Montréal)
10. Le mathématique et le cognitif : deux chimères pour l'enseignant par J-M Fabre (Université de Genève)
11. Le cognitif dans la conception d'un logiciel destiné à l'enseignement des mathématiques par B. Côté (Université du Québec à Montréal)
12. Harmonie didactique, cognitive et mathématique par G. Lemoyne (Université de Montréal) et M-J Haguel (Collège de Sherbrooke)
13. Pratiques ostensives des enseignants et contraintes de la relation didactique par M-H Salin (Université de Bordeaux I)

Bibliographie

« Ce livre intéressera, bien sûr, les didacticiens et ceux qui enseignent les mathématiques, mais aussi, plus largement, tous les enseignants qui s'interrogent sur leur pratique. »

À venir :

En français :	L'empire des nombres, Tests de logique, Homo Mathématicus, Promenades mathématiques, Mathématiques, ...
En anglais :	Mathematical traveler, Hidden unity in nature's law, The pea and the sun, The architecture of chance ...

Robert Bilinski
Collège Montmorency
rbilinski@gmail.com

Vous venez de lire un ouvrage qui vous a passionné ? Ou qui vous a choqué ? Nous attendons vos commentaires : un bref texte que vous postez à Robert Bilinski, Dép. de Maths, 475, boul. de L'avenir, Laval (Québec), H7N 5H9. Vous pouvez aussi utiliser le courrier électronique (rbilinski@cmontmorency.qc.ca).