Association Mathématique du Québec

Une construction de carrés magiques symétriques et diaboliques

Julien Constantin,
Université de Sherbrooke

Résumé

À partir de l'idée de parallélisme et de pente de droites, nous présentons une construction de carrés panmagiques et diaboliques, c'est-à-dire de carrés où toutes les apparitions de certaines figures, souvent des croix, ont aussi la somme magique. Les manifestations de cette somme sont alors de l'ordre de n^2 plutôt que simplement n.

Le présent texte reprend et complète une communication sur les carrés magiques affines diaboliques présentée au 49e congrès de L'AMQ en 2006 [2]. Dans ces carrés, diverses figures font apparaître la somme magique beaucoup plus souvent que dans les carrés magiques ordinaires. La construction des carrés magiques affines est décrite dans [1]. Après un rappel de cette construction de carrés magiques et panmagiques, nous verrons comment en obtenir qui soient également **symétriques** et **diaboliques** et nous examinerons brièvement leur produit.

1 Construction de carrés magiques affines

Un carré **semi-magique** d'ordre n est un carré de n^2 cases où apparaissent, chacun dans sa case, les entiers $0, 1, 2, 3, \ldots, n^2–1$, de telle façon que toutes les lignes et les colonnes aient la même somme. On voit aisément que cette somme doit être $S_n = n(n^2–1)/2$. Si, de plus, chacune des deux diagonales du carré a aussi cette somme, le carré est **magique**.

Voici comment dans [1] on construit un tel carré à partir d'une inspiration proprement géométrique. Le carré y est vu comme un plan, les n^2 cases étant les points de ce plan.

1. On choisit d'abord un anneau commutatif A à n éléments.

L'anneau $\boldsymbol{Z}_n$ des entiers modulo n fait très souvent l'affaire dans le cas d'un n impair.

2. On dispose les éléments de A le long du bord inférieur du carré, chaque élément correspondant à une colonne. De même on place à notre gré les éléments de A le long du côté gauche du carré, chaque élément correspondant à une ligne.

De cette manière, chaque case du carré est repérée par un couple (x, y) d'éléments de A.
La figure 1a illustre ce procédé dans le cas où $n = 7$, l'anneau A étant celui des entiers

© Association mathématique du Québec

modulo 7 et les éléments de $\boldsymbol{Z}_7$ étant placés dans l'ordre « naturel » le long des axes. On y a, par exemple, marqué le point (4,1) en noir.

Les lignes du carré sont les droites de pente 0, les colonnes sont les droites de pente ∞. Une droite de pente $m \in A$ sera donnée par les solutions (x, y) d'une équation de la forme $y = mx + b$. Chaque droite contient exactement n points ; pour chaque $m \in A$, il y a précisément n droites de pente m puisqu'il y a n choix pour l'ordonnée à l'origine $b \in A$; elles forment une partition du carré : le **faisceau** des droites de pente m. En incluant les pentes 0 et ∞, il y a $n + 1$ pentes et donc en tout $(n + 1)n$ droites. C'est ce qu'on appelle un **plan affine** lorsque n est un nombre premier.

La figure 1a montre, dans le cas où $A = \boldsymbol{Z}_7$, les 7 points de la droite $y = 3x+1$. Ces points sont étiquetés ou marqués par la lettre b. Notez que si l'on identifie, d'une part, le bord gauche et le bord droit du carré et, d'autre part, le bord supérieur et le bord inférieur, on peut voir le carré comme un **tore** et trouver facilement dans le cas présent les points de la droite sans faire de calcul : puisque c'est une droite de pente 3, il suffit, partant d'un point de la droite, d'avancer d'une case vers la droite et de monter de 3. La figure 1b montre le **faisceau étiqueté** des droites de pente 3, les étiquettes étant $a, b, c, \ldots f, g$. On a fait le choix ici d'étiqueter les points de la droite d'ordonnée à l'origine i par la $(i + 1)^{\text{e}}$ lettre de l'alphabet. C'est un choix arbitraire.

Deux points essentiels : dans le faisceau étiqueté des droites de pente m, deux points ont la même étiquette si et seulement si ils appartiennent à la même droite ; le carré lui-même est généralement vu comme un tore.

6					b		
5							b
4		b					
3				b			
2						b	
1	b						
0			b				
	0	1	2	3	4	5	6

Fig. 1a

6	g	d	a	e	b	f	c
5	f	c	g	d	a	e	b
4	e	b	f	c	g	d	a
3	d	a	e	b	f	c	g
2	c	g	d	a	e	b	f
1	b	f	c	g	d	a	e
0	a	e	b	f	c	g	d
	0	1	2	3	4	5	6

Fig. 1b : C_1

6	g	c	f	b	e	a	d
5	f	b	e	a	d	g	c
4	e	a	d	g	c	f	b
3	d	g	c	f	b	e	a
2	c	f	b	e	a	d	g
1	b	e	a	d	g	c	f
0	a	d	g	c	f	b	e
	0	1	2	3	4	5	6

Fig. 1c : C_2

3. Avec $m_1, m_2 \in A$, on construit les faisceaux étiquetés C_1 et C_2 des droites de pente m_1 et m_2 respectivement.

Les figures 1b et 1c montrent, avec $A = \boldsymbol{Z}_7$, les faisceaux étiquetés C_1 et C_2 des droites de pente 3 et 4.

4. Les n étiquettes de C_1 étant vues comme des variables, on leur donne des valeurs de sorte que l'ensemble de ces valeurs soit précisément $\{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$. Dans la suite, tout étiquetage doit satisfaire à cette condition. On fait de même pour C_2.

Les figures 2a et 2b illustrent le résultat pour l'exemple des figures 1b et 1c. Dans C_1, on a posé $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$, $e = 4$, $f = 5$, $g = 6$. Dans C_2 on a posé $(a, b, c, d, e, f, g) = (3, 4, 0, 1, 2, 5, 6)$. Dans ce contexte le carré C_2 est complètement défini

par la notation $C_2 = [4 \mid 3, 4, 0, 1, 2, 5, 6]$ qui indique la pente choisie et la valeur des étiquettes pour les ordonnées à l'origine successives.

6	6	3	0	4	1	5	2
5	5	2	6	3	0	4	1
4	4	1	5	2	6	3	0
3	3	0	4	1	5	2	6
2	2	6	3	0	4	1	5
1	1	5	2	6	3	0	4
0	0	4	1	5	2	6	3
	0	1	2	3	4	5	6

Fig. 2a : C_1

6	6	0	5	4	2	3	1
5	5	4	2	3	1	6	0
4	2	3	1	6	0	5	4
3	1	6	0	5	4	2	3
2	0	5	4	2	3	1	6
1	4	2	3	1	6	0	5
0	3	1	6	0	5	4	2
	0	1	2	3	4	5	6

Fig. 2b : C_2

48	21	5	32	9	38	15
40	18	44	24	1	34	7
30	10	36	20	42	26	4
22	6	28	12	39	16	45
14	47	25	2	31	8	41
11	37	17	43	27	0	33
3	29	13	35	19	46	23

Fig. 2c : C

5. On fait $C = nC_1 + C_2$, en voyant C_1 et C_2 comme des matrices. Si, en cours de route, on a fait les bons choix, C sera magique et plus... Un carré magique C obtenu par ce procédé est dit **affine** ; C_1 et C_2 sont les **carrés auxiliaires**.

C'est le cas du carré C de la figure 2c obtenu à partir des carrés des figures 2a et 2b.

Quelles conditions assurent le résultat cherché ? En voici, telles qu'établies dans [1].

$C1$: Si $m_1 - m_2$ est inversible (ou simplement simplifiable) dans A, alors tous les entiers de 0 à n^2–1 apparaîtront dans C et sans répétition.

$C2$: Si m_1 et m_2 sont inversibles (ou simplement simplifiables) dans A, alors C_1 et C_2 sont à somme constante, c'est-à-dire que toutes les lignes et colonnes de ces carrés ont la même somme $T_n = 0 + 1 + 2 + \ldots + n - 1 = (n-1)n/2$. En conséquence C est semi-magique.

$C3$: Si une diagonale de C_i est une droite de pente d et si m_i–d est inversible, alors cette diagonale a aussi comme somme T_n.

En particulier, lorsque $A = \boldsymbol{Z}_n$, que les coordonnées sont dans l'ordre naturel, comme dans la figure 1a et comme nous le ferons toujours par la suite, et que m_1, m_2, $m_1 - m_2$, $m_1 \pm 1$, $m_2 \pm 1$ sont inversibles, alors le carré C est magique, quelles que soient les valeurs données aux étiquettes selon l'étape 4.

C'est ce qui s'est produit dans l'exemple précédent avec $A = \boldsymbol{Z}_7$ et les pentes 3 et 4 : le carré C de la figure 2c est magique. En fait, lorsque n est premier, toutes les conditions précédentes sont satisfaites avec des pentes distinctes autres que 0 et ± 1 ; on peut obtenir ainsi $(n!)^2$ carrés magiques.

Même si les conditions précédentes ne sont pas toutes satisfaites, on peut souvent obtenir un carré magique en faisant un choix judicieux des valeurs données aux étiquettes à l'étape 4, comme le montrent plusieurs exemples donnés en [1].

Terminons par une remarque utile par la suite. Un anneau de coordonnées A étant donné, disons qu'une paire de points $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ du carré a comme **pente** $m \in A$ si $(y_2 - y_1) = m(x_2 - x_1)$. C'est la définition usuelle en géométrie analytique. Notons cependant que si A n'est pas un corps, une paire de points peut avoir plusieurs pentes ou aucune ! C'est le cas par exemple avec $A = \boldsymbol{Z}_{12}$

et 9–3 = 2(5–2) = 6(5–2).

Lemme 1 *Si m n'est pas une pente de la paire $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, alors dans le faisceau étiqueté des droites de pente m, ces points n'ont pas la même étiquette. Plus généralement, si aucune paire d'un ensemble E de points n'a la pente m, alors, dans le faisceau étiqueté des droites de pente m, toutes les étiquettes des points de E sont distinctes.*

En effet, si $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ avaient la même étiquette, ils appartiendraient à une même droite de pente m et d'équation $y = mx+b$. Mais alors $y_1 = mx_1+b$ et $y_2 = mx_2+b$, d'où $(y_2-y_1) = m(x_2-x_1)$ et m est une pente de la paire.

2 Pour assurer la panmagie

Un carré d'ordre n est dit **panmagique** si ses $2n$ diagonales, brisées ou non, ont la somme magique. Par exemple, dans le carré de la figure 2c, les 7 nombres 5, 24, 42, 16, 41, 11, 29 décrivent une diagonale descendante brisée. De même les nombres 30, 18, 5, 35, 27, 8, 45 forment une diagonale montante brisée. Dans ce carré, toutes les diagonales brisées ou non ont comme somme 168 : ce carré est panmagique. On dit aussi pandiagonal ou diabolique, mais nous réserverons ce dernier terme pour une propriété étudiée à la section suivante. Notons que si l'on voit toujours le carré comme un tore, les diagonales brisées perdent leur air ... brisé.

Pour s'assurer de la panmagie, il suffit en principe de résoudre pour C_1, et aussi pour C_2, le système de $2n$ équations linéaires à n inconnues et à coefficients entiers obtenu en écrivant, pour chaque diagonale, que la somme des étiquettes y apparaissant vaut T_n. Cela peut être assez lourd. Et seules les solutions où l'ensemble des valeurs données aux étiquettes est exactement l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ sont acceptables. Heureusement, il y a bien des cas où le problème peut se simplifier considérablement.

Lemme 2 *Si une diagonale L, brisée ou non, est une droite de pente d et si m–d est simplifiable, alors, dans le faisceau étiqueté des droites de pente m, toutes les étiquettes des points de L sont distinctes et la somme des étiquettes sur L est T_n.*

Démonstration En effet, soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ deux points distincts de L et supposons L d'équation $y = dx + b$; alors $(y_2 - y_1) = d(x_2 - x_1)$. Si la paire de points avait la pente m, on aurait $(y_2 - y_1) = m(x_2 - x_1)$, d'où $0 = (m–d)(x_2 - x_1)$ et, puisque m–d est simplifiable, $x_1 = x_2$ et les points ne seraient pas distincts.

Proposition 1 *Si $C = nC_1 + C_2$ est un carré affine obtenu au moyen des carrés auxiliaires C_1 et C_2, faisceaux des droites de pente m_1 et m_2 respectivement, alors toute diagonale de C, brisée ou non, a la somme magique si elle est une droite de pente d et si m_1–d et m_2–d sont simplifiables.*

C'est une application directe du lemme précédent.

Corollaire 1 *Soient n un entier, et $m_1, m_2 \in \boldsymbol{Z}_n$ avec $m_1, m_2, m_1 - m_2, m_1 \pm 1, m_2 \pm 1$ premiers avec n ; alors, si les coordonnées sont placées dans l'ordre naturel le long des axes, le carré $C = nC_1 + C_2$ obtenu à partir des carrés auxiliaires des droites de pente m_1 et m_2 est panmagique, quel que soit l'étiquetage.*

En effet, dans ce cas, toutes les diagonales, brisées ou non, sont des droites de pente 1 ou –1 et la proposition précédente s'applique.

C'est le cas du carré de la figure 2c, avec le nombre premier 7 et les pentes 3 et 4 : le carré C est panmagique.

L'article [1] est essentiellement consacré aux carrés panmagiques et on y trouve plusieurs résultats et exemples sur les équations permettant d'assurer la panmagie. On y montre en particulier comment construire des carrés panmagiques affines pour tout $n > 3$ et non congru à 2 modulo 4. (Rappelons qu'il n'existe pas de carrés panmagiques si n est congru à 2 modulo 4. Dans [3], on en trouve une jolie démonstration.)

3 Pour assurer la symétrie

Oublions dans cette section de voir un carré magique d'ordre n comme un tore. Un tel carré est alors dit **symétrique** si toute paire de cases symétriquement placées par rapport au centre du carré a comme somme n^2–1. Deux entiers sont dits **complémentaires** si leur somme est n–1. Bien sûr, si dans chacun des carrés auxiliaires C_1, C_2, les cases symétriquement placées par rapport au centre portent des entiers complémentaires, alors le carré $C = nC_1 + C_2$ est symétrique, car $n(n\text{–}1) + n\text{–}1 = n^2\text{–}1$. Souvent la symétrique d'une case (x, y) est donnée par une application de la forme $S(x, y) = (u, v) - (x, y)$. C'est le cas par exemple si, en plaçant les coordonnées sur l'axe des X, on a fait en sorte que le symétrique de x par rapport au centre de cet axe soit u–x, et de même sur l'axe des Y. Cela arrive en particulier avec $\boldsymbol{Z}_n$ lorsque les coordonnées sont en position naturelle. Dans un tel cas, on pense spontanément à obtenir un carré magique symétrique.

Proposition 2 *L'image d'une droite par $S(x, y) = (u, v) - (x, y)$ est une droite de même pente.*

La démonstration est un calcul très simple qui montre que l'image par S de la droite d'équation $y = mx + b$ est la droite d'équation $y = mx + v\text{–}mu\text{–}b$.

Corollaire 2 *Supposons que la symétrie dans le carré $C = nC_1 + C_2$ soit donnée par $S(x, y) = (u, v) - (x, y)$. Si, pour $i = 1, 2$, on peut trouver dans le carré étiqueté C_i des droites de pente m_i un ensemble D_i comportant les n étiquettes et tel que pour chaque case $a \in D_i$, l'étiquette de $S(a)$ soit complémentaire de celle de a, alors le carré C est symétrique.*

Démonstration Soit a une case quelconque de C_i ; il existe une droite L_i de pente m_i avec $a \in L_i$. Puisque l'ensemble D_i parcourt toutes les étiquettes, il doit rencontrer L_i en une case b. Par

hypothèse, $S(b)$ et b ont des étiquettes complémentaires ; comme a et b ont même étiquette et que $S(a)$ et $S(b)$, étant dans $S(L_i)$, ont aussi même étiquette, il s'ensuit que a et $S(a)$ ont des étiquettes complémentaires. Ce qui complète la démonstration.

Très souvent on utilise pour D_i une droite passant par le centre du carré, une des diagonales, par exemple. C'est ce que nous illustrerons, pour $n = 7$, en utilisant les carrés de la figure 1. Dans le carré C_1 (figure 1b) on voit, sur la diagonale montante, que b occupe le centre du carré, que d et g sont symétriquement placés, de même que f, e et a, c. On pose donc $b = 3$, $d + g = 6$, $f + e = 6$, $a + c = 6$.

6	1	5	0	4	3	2	6
5	2	6	1	5	0	4	3
4	4	3	2	6	1	5	0
3	5	0	4	3	2	6	1
2	6	1	5	0	4	3	2
1	3	2	6	1	5	0	4
0	0	4	3	2	6	1	5
	0	1	2	3	4	5	6

Fig. 3a : C_1

6	2	5	3	1	4	0	6
5	3	1	4	0	6	2	5
4	4	0	6	2	5	3	1
3	6	2	5	3	1	4	0
2	5	3	1	4	0	6	2
1	1	4	0	6	2	5	3
0	0	6	2	5	3	1	4
	0	1	2	3	4	5	6

Fig. 3b : C_2

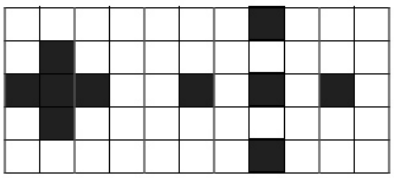
9	40	3	29	25	14	48
17	43	11	35	6	30	26
32	21	20	44	12	38	1
41	2	33	24	15	46	7
47	10	36	4	28	27	16
22	18	42	13	37	5	31
0	34	23	19	45	8	39

Fig. 3c : C_7

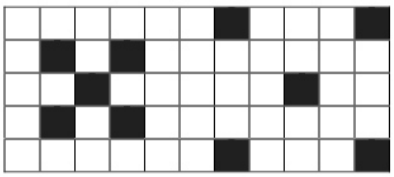
Une solution de ce système est $(a, b, c, d, e, f, g) = (0, 3, 6, 5, 4, 2, 1)$, ce qui nous donne le carré de la figure 3a. Le même raisonnement pour le carré C_2 (figure 1c) nous permet d'adopter une solution comme $(a, b, c, d, e, f, g) = (0, 1, 5, 6, 4, 3, 2)$ pour obtenir le carré de la figure 3b. La formule $C_7 = nC_1 + C_2$ nous donne le carré symétrique de la figure 3c, toujours panmagique en vertu du corollaire 1.

4 Pour assurer le diabolisme

Souvent on essaie d'obtenir la somme magique avec d'autres motifs à n cases que les lignes, colonnes ou diagonales d'un carré d'ordre n. Ces motifs sont choisis davantage pour des raisons d'ordre esthétique ou visuel que mathématique : on les souhaite d'une forme intéressante et aisément identifiables à l'œil. Voici quelques motifs dans le cas $n = 5$.



Petite croix latine Grande croix latine



Petite et grande croix de Saint-André

Fig. 4

Chacun de ces motifs à 5 cases apparaît 5^2 fois dans un carré d'ordre 5, si l'on se rappelle toujours de voir le carré comme un tore. Pour un motif donné, on passe d'une apparition à une autre de ce motif en le faisant simplement glisser le long des lignes et des colonnes. La figure 5 présente un carré affine C d'ordre 5 obtenu à partir de $\boldsymbol{Z}_5$ et des pentes 2 et 3 pour les carrés auxiliaires C_1 et C_2. Dans ces deux carrés, on a simplement donné l'étiquette j à la droite d'ordonnée à l'origine j.

Le carré C est panmagique. De plus, les 25 petites croix latines qu'on peut y trouver ont toutes la somme magique. Il en est de même pour toutes les grandes croix latines et les petites ou grandes croix de Saint-André. Ce qui, avec les lignes, les colonnes et les diagonales, donne déjà 120 fois la somme magique. N'est-ce pas un peu diabolique ? Et cela se serait produit ici, quel que soit l'étiquetage donné aux droites dans les carrés C_1 et C_2. Pourquoi en est-il ainsi ?

4	2	0	3	1
3	1	4	2	0
2	0	3	1	4
1	4	2	0	3
0	3	1	4	2

C_1

4	1	3	0	2
3	0	2	4	1
2	4	1	3	0
1	3	0	2	4
0	2	4	1	3

C_2

24	11	3	15	7
18	5	22	14	1
12	4	16	8	20
6	23	10	2	19
0	17	9	21	13

C_5

Fig. 5

Un carré d'ordre n est **diabolique** pour un motif de n cases (autre qu'une ligne, colonne ou diagonale) si toutes les apparitions de ce motif dans le carré (toujours vu comme un tore) ont la somme magique. On passe d'une apparition à une autre d'un motif simplement par glissement le long des lignes ou des colonnes du carré, de sorte qu'il ne soit pas visuellement déformé. Avec $A = \boldsymbol{Z}_n$ et les coordonnées en position naturelle, ces glissements sont simplement des translations. Une translation de vecteur $(a, b) \in A \times A$ du plan du carré est une application $T_{a,b}$ du plan en lui-même, définie par $T_{a,b}(x, y) = (x + a, y + b)$. De même une homothétie de rapport $a \in A$ est une application H_a telle que $H_a(x, y) = (ax, ay)$. Attention ! Lorsque $A \neq \boldsymbol{Z}_n$, ces applications peuvent « déformer » considérablement un motif et les glissements mentionnés précédemment ne sont pas toujours des translations pour l'anneau A !

Dans la suite, désignons par E un ensemble de n points ou cases du carré. Si aucune paire de points de E n'est de pente $m \in A$, on dira que E **évite** m. Avec $A = \boldsymbol{Z}_5$, la petite croix latine de la figure 4 évite les pentes 2 et 3, quelle que soit sa position dans le carré, et il en est de même pour la petite croix de Saint-André, comme on peut le vérifier visuellement. Le lemme suivant est utile pour voir si un carré est diabolique pour un motif.

Lemme 3 *Si E évite m, alors toute translation ou toute homothétie de rapport simplifiable appliquée à E produit un ensemble qui évite aussi m.*

C'est une conséquence immédiate du fait très aisément vérifiable que l'application d'une telle translation ou homothétie à une paire de points ne change pas les pentes.

Proposition 3 *Soient $C = nC_1 + C_2$ un carré construit à partir des carrés étiquetés C_1, C_2 des droites de pente m_1 et m_2 respectivement, et E un ensemble de n points ou cases définissant un motif. Si toutes les apparitions du motif E dans le carré évitent les pentes m_1 et m_2, alors le carré est diabolique pour E, quels que soient les étiquetages. Et réciproquement.*

Démonstration La proposition directe est une conséquence du lemme 1 appliqué à C_1 et C_2. Les étiquettes dans le motif E étant toutes distinctes, leur somme dans C_1 et dans C_2 est toujours T_n.

Réciproquement, supposons le carré C diabolique pour le motif E, quel que soit l'étiquetage. Si, dans C_1, il existe une apparition E_1 de E qui n'évite pas m_1, alors au moins deux cases a, b de E_1 portent la même étiquette et au moins une étiquette est absente. Considérons un étiquetage donnant à a et b l'étiquette n–1 et dans lequel 0 est l'étiquette absente ; considérons également l'autre étiquetage obtenu du précédent en intervertissant les étiquettes 0 et n–1. Il est impossible que dans les deux cas E_1 ait la même somme magique.

Notons qu'un carré peut être diabolique pour un motif qui n'évite pas une des pentes m_1, m_2 ; c'est alors le résultat d'un choix particulier de l'étiquetage.

Revenons à l'exemple de la figure 4. Aussitôt que l'on a constaté qu'un exemplaire de la petite croix latine et un exemplaire de la petite croix de Saint-André évitent les pentes 2 et 3, alors il en est ainsi pour tous les autres exemplaires ainsi que pour toutes les grandes croix latines et toutes les grandes croix de Saint-André, car tous s'obtiennent, avec l'anneau $\boldsymbol{Z}_5$, par translation et homothétie à partir des deux premières. Et voilà pourquoi ce carré panmagique C_5 de la figure 5 est diabolique pour les petites et les grandes croix latines et de Saint-André. On peut constater que ce carré est aussi diabolique pour ce qui paraît être d'autres motifs, comme ceux de la figure 6, obtenant ainsi bien des fois la somme magique. En réalité, 6a et 6b montrent de grandes croix latines lorsqu'on les voit sur le tore et elles sont obtenues des précédentes par translation. 6c vient d'une croix de Saint-André par une homothétie de rapport 3.

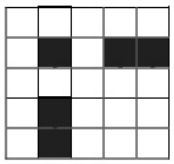


Fig. 6a

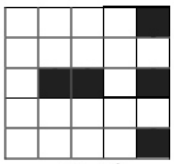


Fig. 6b

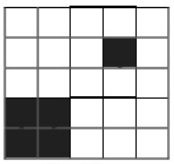


Fig. 6c

Voici quelques exemples d'autres motifs, figure 7 pour $n = 7, 9$ et 11, figure 8 pour $n = 7$. Chacun de ces motifs à n cases apparaît n^2 fois dans un carré d'ordre n, si l'on se rappelle toujours de voir le carré comme un tore.

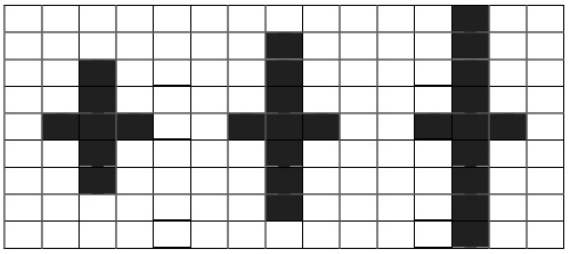
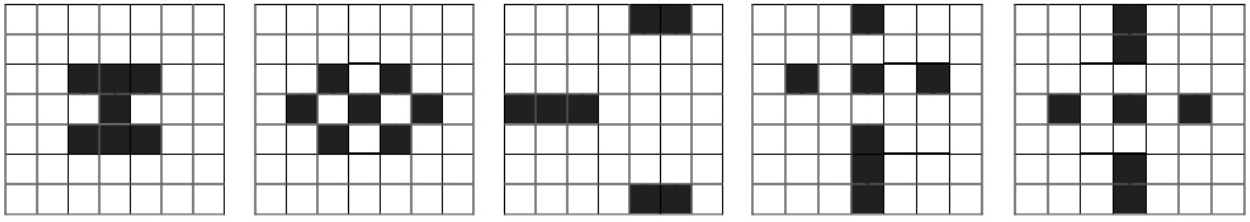


Fig.7 : petites croix latines pour $n = 7, 9, 11$



Étau E Grille G Fourche Grandes croix latines

Deux demi-croix Croix de Saint-André

Fig. 8 : Quelques motifs pour $n = 7$

Corollaire 3 *Avec $A = Z_n$ et $n = 2k + 1$, la petite croix latine à n cases (voir figure 7) évite les pentes k et $k+1$. En conséquence, le carré affine d'ordre n construit à partir des carrés étiquetés des droites de pente k et $k + 1$ est diabolique pour les petites croix latines à n cases et pour les grandes croix latines correspondantes obtenues par homothétie inversible. Ceci quel que soit l'étiquetage.*

Revenons au carré magique C_7 de la figure 3, avec $n = 7$. Un simple examen visuel montre que, à l'instar de la croix latine à gauche de la figure 7, l'étau, la grille et les demi-croix de la figure 8 évitent les pentes 3 et 4. En conséquence, le carré C_7 est diabolique pour ces motifs ! Et comme la fourche et les grandes croix latines de la figure 8 s'obtiennent de la petite croix latine et de la guirlande par des homothéties de rapport 3 et 4 et des translations, le carré est aussi diabolique pour ces trois motifs. Il n'en est pas de même pour la croix de Saint-André qui n'évite pas la pente

3. On pourrait continuer... Je laisse au lecteur le soin de compter combien de fois on obtient ainsi la somme magique !

Ce n'est pas tout ! Superposons l'étau E et la grille G en leur donnant le même centre. Comme ces deux ensembles de cases ont la même somme magique, alors les ensembles $E\backslash G$ et $G\backslash E$ doivent avoir la même somme. Cela signifie que partout dans le carré C_7 de la figure 3c, la somme des cases marquées ♠ dans un sous-carré 3×5 égale toujours celle des cases marquées ♥ (figure 9a). De même, en superposant la petite croix latine et l'étau, on obtient que la somme des cases marquées ♦ dans un quelconque sous-carré 5×3 est égale à celle des cases marquées ♣ (figure 9b). On peut aisément trouver bien d'autres résultats du genre.

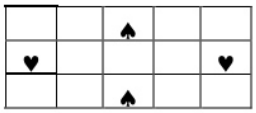


Fig. 9a

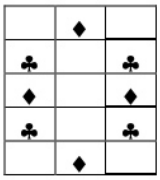


Fig. 9b

Ce qui précède suggère d'ailleurs un procédé d'échange utile.

Théorème 1 (Procédé d'échange) *Soit $C = nC_1 + C_2$ un carré obtenu avec l'anneau $\boldsymbol{Z}_n$ et les coordonnées en position naturelle, et supposons C diabolique pour un motif donné par un ensemble de n cases E ; si A et B sont deux ensembles de k cases avec $A \subset E$ et $B \cap E = \varnothing$, et si A et B ont la même collection d'étiquettes dans C_1 et la même collection dans C_2, alors C est diabolique pour le motif $F = (E\backslash A) \cup B$.*

Démonstration Par hypothèse, pour le carré auxiliaire C_1, il existe une bijection $f : A \to B$ telle que pour tout $a \in A, a$ et $f(a)$ ont même étiquette. Ainsi a et $f(a)$ sont sur la même droite de pente m_1 de C_1. Comme une translation quelconque T ne change pas les pentes, alors $T(a)$ et $T(f(a))$ sont aussi sur une droite de même pente de C_1 et ont donc même étiquette dans C_1. En somme, $T(A)$ et $T(f(A)) = T(B)$ ont même collection d'étiquettes et par conséquent même somme de leurs étiquettes. Il en est donc de même de $T(E) = T(E\backslash A) \cup T(A)$ et de $T(F) = T(E\backslash A) \cup T(B)$ dans C_1. Le même raisonnement est valable pour C_2. Comme toute apparition de E dans C peut être obtenue par une translation T et que $T(E)$ a la somme magique, il en est de même pour $T(F) : C$ est diabolique pour F.

Illustrons par un exemple. Le carré C_7 de la figure 3c étant panmagique, la diagonale $E = \{(0,6), (1,5), \ldots, (6,0)\}$ et toutes ses translatées ont la somme magique. Les ensembles de cases $A = \{(0,6), (6,0)\}$ et $B = \{(2,5), (4,1)\}$ portent le même ensemble $\{1,5\}$ d'étiquettes dans C_1 et le même ensemble $\{2,4\}$ dans C_2. En vertu du théorème précédent, on peut échanger A pour B dans E et conclure que C est diabolique pour le motif de la demi-croix gauche de la figure 8. C'est d'ailleurs de cette façon que nous l'avons trouvé. Autre exemple concernant le même carré : l'ensemble $A = \{(0,0), (1,1), (5,5), (6,6)\}$ formé des extrémités de l'autre diagonale affiche dans C_1 les mêmes étiquettes $0, 2, 4, 6$ que $B = \{(1,3), (2,4), (4,2)(5,3)\}$ et la même chose se produit dans C_2.

On peut donc dans cette diagonale échanger A pour B et conclure que C est diabolique pour le motif de la grille de la figure 8.

Deux exemples de carrés diaboliques d'ordre 9

On pourrait croire, suite aux exemples précédents, que la méthode se limite aux carrés d'ordre premier. Il n'en est rien. Considérons le cas $n = 9$. Deux anneaux se présentent à l'esprit : l'anneau $\boldsymbol{Z}_9$ et le corps $\boldsymbol{F}_9$. Voyons d'abord un exemple avec $A = \boldsymbol{Z}_9$. La figure 10 présente les faisceaux étiquetés C_1 et C_2 des droites de pente $m_1 = 4$ et $m_2 = 5$ respectivement, chaque droite d'ordonnée à l'origine i étant étiquetée X_i. Il s'agit maintenant de donner des valeurs convenables à ces étiquettes et de produire les carrés C_1 et C_2 de la figure 11.

X_8	X_4	X_0	X_5	X_1	X_6	X_2	X_7	X_3
X_7	X_3	X_8	X_4	X_0	X_5	X_1	X_6	X_2
X_6	X_2	X_7	X_3	X_8	X_4	X_0	X_5	X_1
X_5	X_1	X_6	X_2	X_7	X_3	X_8	X_4	X_0
X_4	X_0	X_5	X_1	X_6	X_2	X_7	X_3	X_8
X_3	X_8	X_4	X_0	X_5	X_1	X_6	X_2	X_7
X_2	X_7	X_3	X_8	X_4	X_0	X_5	X_1	X_6
X_1	X_6	X_2	X_7	X_3	X_8	X_4	X_0	X_5
X_0	X_5	X_1	X_6	X_2	X_7	X_3	X_8	X_4

Fig. 10a : C_1 : droites de pente 4

X_8	X_3	X_7	X_2	X_6	X_1	X_5	X_0	X_4
X_7	X_2	X_6	X_1	X_5	X_0	X_4	X_8	X_3
X_6	X_1	X_5	X_0	X_4	X_8	X_3	X_7	X_2
X_5	X_0	X_4	X_8	X_3	X_7	X_2	X_6	X_1
X_4	X_8	X_3	X_7	X_2	X_6	X_1	X_5	X_0
X_3	X_7	X_2	X_6	X_1	X_5	X_0	X_4	X_8
X_2	X_6	X_1	X_5	X_0	X_4	X_8	X_3	X_7
X_1	X_5	X_0	X_4	X_8	X_3	X_7	X_2	X_6
X_0	X_4	X_8	X_3	X_7	X_2	X_6	X_1	X_5

Fig. 10b : C_2 : droites de pente 5

1	7	8	6	3	4	5	2	0
2	0	1	7	8	6	3	4	5
4	5	2	0	1	7	8	6	3
6	3	4	5	2	0	1	7	8
7	8	6	3	4	5	2	0	1
0	1	7	8	6	3	4	5	2
5	2	0	1	7	8	6	3	4
3	4	5	2	0	1	7	8	6
8	6	3	4	5	2	0	1	7

Fig. 11a. C_1 : droites de pente 4

0	2	5	4	3	6	8	7	1
5	4	3	6	8	7	1	0	2
3	6	8	7	1	0	2	5	4
8	7	1	0	2	5	4	3	6
1	0	2	5	4	3	6	8	7
2	5	4	3	6	8	7	1	0
4	3	6	8	7	1	0	2	5
6	8	7	1	0	2	5	4	3
7	1	0	2	5	4	3	6	8

Fig. 11b. C_2 : droites de pente 5

9	65	77	58	30	42	53	25	1
23	4	12	69	80	61	28	36	47
39	51	26	7	10	63	74	59	31
62	34	37	45	20	5	13	66	78
64	72	56	32	40	48	24	8	16
2	14	67	75	60	35	43	46	18
49	21	6	17	70	73	54	29	41
33	44	52	19	0	11	68	76	57
79	55	27	38	50	22	3	15	71

Fig. 11c. C_9 : Carré magique issu des faisceaux de pentes 4 et 5, panmagique, symétrique et diabolique

Comment a-t-on déterminé cet étiquetage ? On s'est inspiré du corollaire 1 : ici $m_1, m_2, m_1 - m_2$, $m_1 + 1, m_2 - 1$ étant premiers avec n, seuls m_1–1 et $m_2 + 1$ peuvent causer problème pour obtenir la panmagie : il s'agit des diagonales montantes de C_1 et des diagonales descendantes de C_2. Si on écrit les équations exigeant que les diagonales montantes de C_1 aient pour somme $T_9 = 0+1+2+\ldots+8 = 36$, on obtient le système

$$\begin{array}{l} 3(X_0 + X_3 + X_6) = 36 \\ 3(X_1 + X_4 + X_7) = 36 \\ 3(X_2 + X_5 + X_8) = 36 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} (X_0 + X_3 + X_6) = 12 \\ (X_1 + X_4 + X_7) = 12 \\ (X_2 + X_5 + X_8) = 12 \end{array}$$

X_0	X_3	X_6
X_1	X_4	X_7
X_2	X_5	X_8

3	8	1
2	4	6
7	0	5

.

Seules les solutions où $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_8\} = \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$ conviennent. Il y en a 2592, puisqu'il y a $3! \times 3! \times 3! \times 3! \times 2! = 2592$ façons de placer convenablement les X_i dans un carré d'ordre 3 et de mettre ensuite les cases en bijection avec les cases correspondantes du carré magique d'ordre 3. Si on ajoute au système précédent les équations assurant la symétrie à partir de la diagonale descendante (corollaire 2)

$$X_6 = 4 \qquad X_0 + X_3 = 8 \qquad X_1 + X_2 = 8 \qquad X_4 + X_8 = 8 \qquad X_5 + X_7 = 8,$$

il reste 48 solutions parmi lesquelles nous avons choisi $(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_8) = (8, 3, 5, 0, 7, 6, 4, 2, 1)$. Il en est exactement de même pour C_2, où cette fois on a choisi la solution $(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_8) = (7, 6, 4, 2, 1, 8, 3, 5, 0)$, ce qui donne les carrés des figures 11a et b. La formule $C_9 = C_2 + 9 \times C_1$ produit finalement le carré panmagique et symétrique de la figure 11c.

Pour les septs motifs présentés à la figure 12a, on constate visuellement ou autrement qu'ils évitent les pentes 4 et 5. En vertu de la proposition 3, le carré panmagique C_9 de la figure 11c est diabolique pour la croix latine, la croix de Lorraine, la petite croix enchâssée, la triple colonne ainsi que, bien sûr, pour toutes les homothéties de ces motifs comme par exemple les grandes croix latines de la figure 12a ! Et la méthode produit 2592^2 tels carrés si l'on n'exige pas la symétrie ! Et le double si on intervertit les rôles de C_1 et C_2. Les motifs de la figure 12b sont particuliers ici : ils n'évitent pas la pente 5 mais le carré C_9 reste diabolique pour ces motifs, à cause du choix particulier de l'étiquetage du carré C_2. Ainsi C_9 donne plus de $9 \times 9^2 + 4 \times 9 = 765$ fois la somme magique et on pourrait continuer...

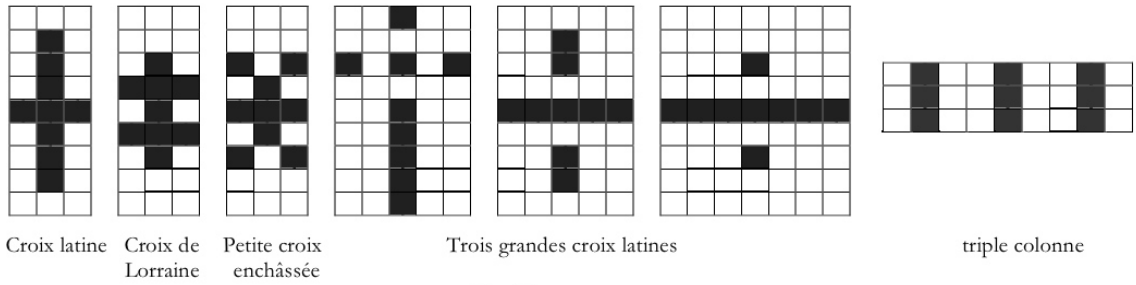


Fig. 12a

Fig. 12b

Comme dans le cas $n = 7$, on pourrait obtenir un grand nombre de relations d'égalité en superposant de différentes manières les motifs de la figure précédente. Par exemple, en plaçant le centre de la croix de Lorraine sur la case au-dessus du centre de la petite croix enchâssée, on obtient que partout dans le carré C_9 les cases marquées ♥ ont la même somme que les cases marquées ♦ (figure 13). De même, avec la croix latine à gauche de la figure 12a et la deuxième à droite des grandes croix latines, on obtient l'égalité des sommes des cases marquées ♠ et ♣ (figure 13).

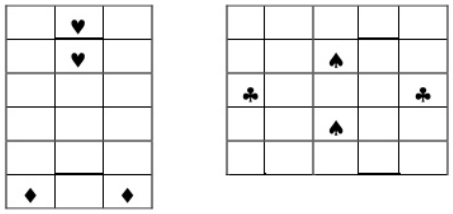


Fig. 13

Notons également que si l'on place le centre d'une croix de Lorraine en chaque point d'une droite de C_1, par exemple la droite d'étiquette 0, on obtient un dallage de C_1 (toujours vu comme un tore) par des croix de Lorraine toutes étiquetées de la même manière. Si on transporte ce dallage sur C_9, alors ce carré apparaît dallé par des croix de Lorraine toutes de somme magique.

Proposition 4 *Si un motif E évite la pente m et si m est inversible dans l'anneau, alors le motif transposé ${}^tE$, obtenu en changeant les lignes en colonnes et les colonnes en lignes, évite la pente m^{-1}.*

En effet, on voit facilement qu'une paire de points de pente m devient par transposition une paire de pente m^{-1}.

Ainsi, puisque dans $\boldsymbol{Z}_9, 4^{-1} = 7$ et $5^{-1} = 2$, tout carré affine d'ordre 9 construit avec $\boldsymbol{Z}_9$ et les pentes 7 et 2 est automatiquement diabolique pour les transposées des motifs de la figure 12a.

Et que se passe-t-il si on utilise plutôt le corps $\boldsymbol{F}_9$ à 9 éléments ? Ce corps est formé de toutes les expressions de la forme $b\alpha + c$ où $b, c \in \boldsymbol{Z}_3$ avec $\alpha^2 = 2\alpha + 1$. D'où l'on tire $\alpha^3 = 2\alpha + 2$, $\alpha^4 = 2$, $\alpha^5 = 2\alpha$, $\alpha^6 = \alpha + 2$, $\alpha^7 = \alpha + 1$, $\alpha^8 = 1$. Plaçons les coordonnées $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_8$ dans l'ordre $0, 1, 2, \alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, 2\alpha, 2\alpha + 1, 2\alpha + 2$ le long des axes, regroupant ainsi les éléments suivant les classes modulo le sous-corps $G = \{0, 1, 2\}$, c'est-à-dire G suivi de $G + \alpha = \{\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2\}$, suivi de $G + 2\alpha = \{2\alpha, 2\alpha + 1, 2\alpha + 2\}$.

2α+2	X_8	X_5	X_2	X_1	X_7	X_4	X_3	X_0	X_6
2α+1	X_7	X_4	X_1	X_0	X_6	X_3	X_5	X_2	X_8
2α	X_6	X_3	X_0	X_2	X_8	X_5	X_4	X_1	X_7
α+2	X_5	X_2	X_8	X_7	X_4	X_1	X_0	X_6	X_3
α+1	X_4	X_1	X_7	X_6	X_3	X_0	X_2	X_8	X_5
α	X_3	X_0	X_6	X_8	X_5	X_2	X_1	X_7	X_4
2	X_2	X_8	X_5	X_4	X_1	X_7	X_6	X_3	X_0
1	X_1	X_7	X_4	X_3	X_0	X_6	X_8	X_5	X_2
0	X_0	X_6	X_3	X_5	X_2	X_8	X_7	X_4	X_1
	0	1	2	α	α+1	α+2	2α	α^2	α^3

Fig. 14a : Carré C_1 des droites de pente α étiquetées par les X_i

2α+2	X_8	X_4	X_0	X_7	X_3	X_2	X_6	X_5	X_1
2α+1	X_7	X_3	X_2	X_6	X_5	X_1	X_8	X_4	X_0
2α	X_6	X_5	X_1	X_8	X_4	X_0	X_7	X_3	X_2
α+2	X_5	X_1	X_6	X_4	X_0	X_8	X_3	X_2	X_7
α+1	X_4	X_0	X_8	X_3	X_2	X_7	X_5	X_1	X_6
α	X_3	X_2	X_7	X_5	X_1	X_6	X_4	X_0	X_8
2	X_2	X_7	X_3	X_1	X_6	X_5	X_0	X_8	X_4
1	X_1	X_6	X_5	X_0	X_8	X_4	X_2	X_7	X_3
0	X_0	X_8	X_4	X_2	X_7	X_3	X_1	X_6	X_5
	0	1	2	α	α+1	α+2	2α	α^2	α^3

Fig. 14b : Carré C_2 des droites de pente $\alpha + 1$

La figure 14 présente les carrés étiquetés des droites de pente α et $\alpha + 1$ respectivement. Par un trait plus gras, nous avons partitionné les deux carrés 9×9 en sous-carrés de côté 3. Dans chacun toutes les étiquettes apparaissent, comme dans un sudoku. La proposition suivante l'explique.

Proposition 5 *Soit K un sous-corps d'un corps fini A et $m \in A\backslash K$. On suppose les coordonnées placées suivant les classes additives modulo K, comme illustré dans la figure 14 ; alors, pour le carré étiqueté des droites de pente m, toutes les étiquettes sont distinctes dans chaque sous-carré d'ordre $k = card\ (K)$ déterminé par le produit cartésien de deux classes.*

En effet, si deux points distincts $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ d'un tel carré avaient la même étiquette, ils formeraient une paire de pente m et donc $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$. Mais en vertu de la définition des classes, on a $x_2 - x_1, y_2 - y_1 \in K$ et donc $m \in K$.

Ainsi, quelles que soient les valeurs données aux étiquettes dans les carrés de la figure 14, comme les sous-carrés de la partition ont 9 éléments distincts, la somme des étiquettes dans chacun sera toujours T_9 : le carré $C = C_2 + 9 \times C_1$ sera magique et tous ces sous-carrés auront la somme magique. On voudrait plus : que le carré C soit panmagique et diabolique. Notons que pour les coordonnées c_i on a ici, pour tout $i, c_i + 3 = c_i + \alpha$. On peut donc utiliser la proposition 6 de [1] ou, si l'on préfère, écrire directement les équations assurant la panmagie. Après simplification, on obtient pour C_1 le système

$$\begin{array}{ll} X_0 + X_4 + X_8 = 12 & X_0 + X_1 + X_2 = 12 \\ X_1 + X_5 + X_6 = 12 & X_3 + X_4 + X_5 = 12 \\ X_2 + X_3 + X_7 = 12 & X_6 + X_7 + X_8 = 12 \end{array} .$$

Considérons les carrés

X_0	X_2	X_1
X_4	X_3	X_5
X_8	X_7	X_6

1	8	3
6	4	2
5	0	7

.

Celui de droite est le carré magique d'ordre 3. Comme le système d'équations se ramène à trouver deux partitions de $\{0, 1, 2, \ldots, 8\}$ en trois classes de 3 éléments et de somme 12, les lignes et les colonnes du carré magique de droite font parfaitement l'affaire : on assigne à chaque élément du carré de gauche l'élément correspondant du carré de droite, donnant ainsi des valeurs convenables aux étiquettes du carré C_1. En permutant les lignes du carré de gauche, ou encore en permutant ses colonnes, ou en le tournant d'un quart de tour, on obtient de cette manière 72 solutions. Comme la symétrie est donnée ici par l'équation $S(x, y) = (2\alpha + 2, 2\alpha + 2) – (x, y)$, on peut appliquer le corollaire 2 à la diagonale montante de C_1 et obtenir les équations donnant la symétrie : $X_3 = 4, X_1 + X_8 = X_4 + X_5 = X_2 + X_7 = X_0 + X_6 = 8$. En ajoutant ce dernier système d'équations au précédent, il reste 8 solutions parmi lesquelles nous avons choisi $(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_8) = (1, 3, 8, 4, 6, 2, 7, 0, 5)$ pour en obtenir le carré C_1 de la figure 15a. Un travail analogue avec C_2 nous donne le système suivant, dont on a retenu pour la suite la solution $(5, 3, 4, 8, 6, 7, 2, 0, 1)$.

$$\begin{array}{ll} X_0 + X_5 + X_7 = 12 & X_0 + X_4 + X_8 = 12 \\ X_1 + X_3 + X_8 = 12 & X_1 + X_5 + X_6 = 12 \\ X_2 + X_4 + X_6 = 12 & X_2 + X_3 + X_7 = 12 \end{array}$$

$$X_2 = 4, \quad X_5 + X_8 = X_3 + X_7 = X_4 + X_6 = X_0 + X_1 = 8\,.$$

La figure 15a montre ce que devient le carré C_2 avec cet étiquetage. Comme prévu, C_1 et C_2 sont du type « sudoku » : ce sont des sudokus orthogonaux.

2α+2	5	2	8	3	0	6	4	1	7
2α+1	0	6	3	1	7	4	2	8	5
2α	7	4	1	8	5	2	6	3	0
α+2	2	8	5	0	6	3	1	7	4
α+1	6	3	0	7	4	1	8	5	2
α	4	1	7	5	2	8	3	0	6
2	8	5	2	6	3	0	7	4	1
1	3	0	6	4	1	7	5	2	8
0	1	7	4	2	8	5	0	6	3
	0	1	2	α	α^7	α^6	α^5	α^2	α^3

2α+2	1	6	5	0	8	4	2	7	3
2α+1	0	8	4	2	7	3	1	6	5
2α	2	7	3	1	6	5	0	8	4
α+2	7	3	2	6	5	1	8	4	0
α+1	6	5	1	8	4	0	7	3	2
α	8	4	0	7	3	2	6	5	1
2	4	0	8	3	2	7	5	1	6
1	3	2	7	5	1	6	4	0	8
0	5	1	6	4	0	8	3	2	7
	0	1	2	α	α^7	α^6	α^5	α^2	α^3

Fig. 15a : Les carrés C_1 et C_2 de pente α et $\alpha + 1$ respectivement

46	24	77	27	8	58	38	16	66
0	62	31	11	70	39	19	78	50
65	43	12	73	51	23	54	35	4
25	75	47	6	59	28	17	67	36
60	32	1	71	40	9	79	48	20
44	13	63	52	21	74	33	5	55
76	45	26	57	29	7	68	37	15
30	2	61	41	10	69	49	18	80
14	64	42	22	72	53	3	56	34

Fig. 15b : Carré magique issu de C_1 et C_2 de la figure 15a

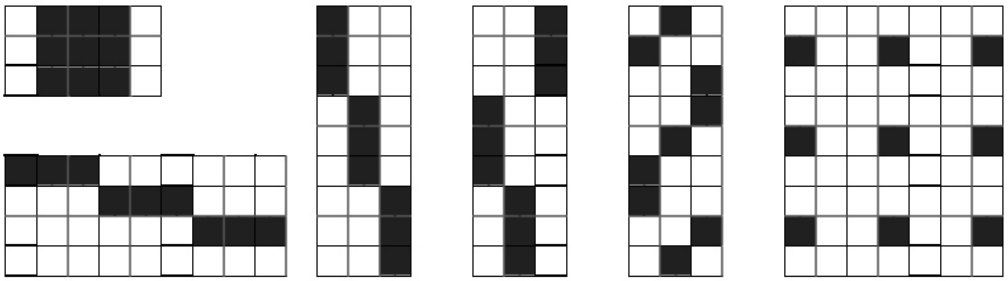


Fig. 16. Quelques motifs rendant diabolique le carré de la figure 15b

On peut vérifier que le carré magique $C = C_2 + 9 \times C_1$ de la figure 15b est panmagique, symétrique et diabolique pour chacun des motifs indiqués à la figure 16.

En fait beaucoup d'autres motifs rendent le carré précédent diabolique. Par exemple si dans une permutation des lignes de la matrice identité 3×3 on remplace les trois 1 par une même permutation

de la matrice identité 3×3 et les 0 par une matrice 3×3 entièrement nulle, on obtient une matrice où les 1 indiquent les 9 cases à choisir pour un motif. Ce procédé fournit 36 motifs rendant le carré précédent diabolique. La figure 17 présente un de ces motifs.

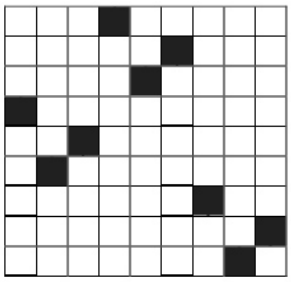


Fig. 17

Exemple de carré diabolique d'ordre 8

Proposition 6 *Soit G un sous-groupe additif d'un anneau A, $t \in A\backslash G$ et $G_1 = G + t$. Supposons les coordonnées placées le long des axes dans l'ordre des éléments de $G, G_1, G + t_1, G_1 + t_1$, $G + t_2, G_1 + t_2, \ldots$. Si $m \in A\backslash\{0\}$ est tel que $mG \cap (G \cup G_1) = \{0\}$, alors, dans tout rectangle $V = (G + t_i) \times [(G + t_k) \cup (G_1 + t_k)]$, toutes les étiquettes sont distinctes.*

Démonstration Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$. Alors $x_2 - x_1 \in G$ et $y_2 - y_1 \in G \cup G_1$, comme on le voit facilement. Si $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ont la même étiquette, alors ils sont sur la même droite de pente m et donc $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \in mG \cap (G \cup G_1) = \{0\}$ et les points sont identiques.

Appliquons ce résultat à l'étude d'un carré d'ordre 8. Le corps $\boldsymbol{F}_8$ est formé des 8 éléments de la forme $a\alpha^2 + b\alpha + c$, où $a, b, c \in \boldsymbol{Z}_2 = \{0, 1\}$ avec $\alpha^3 = \alpha + 1$. On a $\alpha^4 = \alpha^2 + \alpha$, $\alpha^5 = \alpha^2 + \alpha + 1$, $\alpha^6 = \alpha^2 + 1$ et $\alpha^7 = 1$. Prenant le sous-groupe $G = \{0, \alpha\}$, on place les coordonnées suivant les classes $G, G_1 = G + \alpha^3$, $G + \alpha^2, G_1 + \alpha^2$, c'est-à-dire dans l'ordre $0, \alpha, \alpha^3, 1, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6$. Avec $m = \alpha$ ou α^3, on a bien $mG \cap (G \cup G_1) = \{0\}$ et donc on est assuré, d'après la proposition précédente, que les 16 rectangles 4×2 dont les coordonnées du coin inférieur gauche sont dans $\{0, \alpha^3, \alpha^2, \alpha^5\}$ ont toutes leurs étiquettes distinctes et ont donc chacun comme somme $T_8 = 28$, quel que soit l'étiquetage. Comme ici les deux diagonales sont des droites de pente $1 = -1$, on obtient, en utilisant les pentes α et α^3 pour les carrés auxiliaires C_1 et C_2, $(9!)^2 = 131\ 681\ 894\ 400$ carrés magiques partitionnés de plusieurs façons en blocs 4×2 de somme magique. Mais on veut davantage : que tous les blocs 4×2 aient la somme magique. Pour cela, il faut un étiquetage convenable. Après avoir écrit les systèmes d'équations reflétant cette exigence dans C_1 et dans C_2, on trouve dans chaque cas 144 solutions. Elles ne sont pas toutes également intéressantes. Dans la figure 18, on a choisi pour C_1 l'étiquetage $(6, 5, 3, 0, 4, 7, 1, 2)$ et pour C_2 l'étiquetage $(4, 6, 3, 1, 5, 7, 2, 0)$, dans chaque cas la i$^{\text{e}}$ étiquette étant celle de la droite ayant comme ordonnée à l'origine la i$^{\text{e}}$ coordonnée. Ces carrés auxiliaires produisent le carré de la figure 19a qui, on pourra le vérifier, est panmagique et diabolique pour les cinq motifs exhibés à la figure 19b. De plus, les coins opposés de tous les sous-carrés de côté 5 ont comme somme $63 = 8^2$–1. Il faut noter qu'ici toutes les translations du plan affine déplacent dans le carré et sans les déformer les cinq motifs de la figure 19b.

α^6	2	0	3	1	7	5	6	4
α^5	1	3	0	2	4	6	5	7
α^4	7	5	6	4	2	0	3	1
α^2	4	6	5	7	1	3	0	2
1	0	2	1	3	5	7	4	6
α^3	3	1	2	0	6	4	7	5
α	5	7	4	6	0	2	1	3
0	6	4	7	5	3	1	2	0
	0	α	α^3	1	α^2	α^4	α^5	α^6

Fig.18a : C_1 : droites de pente α

α^6	0	3	4	7	6	5	2	1
α^5	2	1	6	5	4	7	0	3
α^4	7	4	3	0	1	2	5	6
α^2	5	6	1	2	3	0	7	4
1	1	2	5	6	7	4	3	0
α^3	3	0	7	4	5	6	1	2
α	6	5	2	1	0	3	4	7
0	4	7	0	3	2	1	6	5
	0	α	α^3	1	α^2	α^4	α^5	α^6

Fig.18b : C_2 : droites de pente α^3

16	3	28	15	62	45	50	33
10	25	6	21	36	55	40	59
63	44	51	32	17	2	29	14
37	54	41	58	11	24	7	20
1	18	13	30	47	60	35	48
27	8	23	4	53	38	57	42
46	61	34	49	0	19	12	31
52	39	56	43	26	9	22	5

Fig.19a : Carré panmagique et diabolique pour les configurations de la fig.19b.

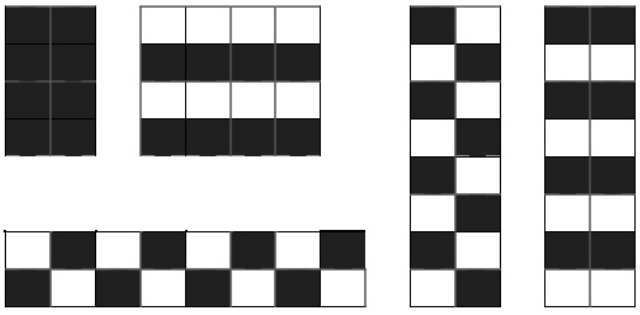


Fig. 19b : Bloc 4×2, sandwich, guirlande et rayures.

5 Diabolisme et produit de carrés magiques

C_4

10	13	0	7
4	3	14	9
15	8	5	2
1	6	11	12

C_5

24	11	3	15	7
18	5	22	14	1
12	4	16	8	20
6	23	10	2	19
0	17	9	21	13

Fig. 20. Deux carrés C_4 et C_5 panmagiques, diaboliques, et le produit $C_4 \otimes C_5$.

$C_4 \otimes C_5$

274 349 24 199 124 99 374 249 399 224 149 74 49 174 299 324	261 336 11 186 111 86 361 236 386 211 136 61 36 161 286 311	253 328 3 178 103 78 353 228 378 203 128 53 28 153 278 303	265 340 15 190 115 90 365 240 390 215 140 65 40 165 290 315	257 332 7 182 107 82 357 232 382 207 132 57 32 157 282 307
268 343 18 193 118 93 368 243 393 218 143 68 43 168 293 318	255 330 5 180 105 80 355 230 380 205 130 55 30 155 280 305	272 347 22 197 122 97 372 247 397 222 147 72 47 172 297 322	264 339 14 189 114 89 364 239 389 214 139 64 39 164 289 314	251 326 1 176 101 76 351 226 376 201 126 51 26 151 276 301
262 337 12 187 112 87 362 237 387 212 137 62 37 162 287 312	254 329 4 179 104 79 354 229 379 204 129 54 29 154 279 304	266 341 16 191 116 91 366 241 391 216 141 66 41 166 291 316	258 333 8 183 108 83 358 233 383 208 133 58 33 158 283 308	270 345 20 195 120 95 370 245 395 220 145 70 45 170 295 320
256 331 6 181 106 81 356 231 381 206 131 56 31 156 281 306	273 348 23 198 123 98 373 248 398 223 148 73 48 173 298 323	260 335 10 185 110 85 360 235 385 210 135 60 35 160 285 310	252 327 2 177 102 77 352 227 377 202 127 52 27 152 277 302	269 344 19 194 119 94 369 244 394 219 144 69 44 169 294 319
250 325 0 175 100 75 350 225 375 200 125 50 25 150 275 300	267 342 17 192 117 92 367 242 392 217 142 67 42 167 292 317	259 334 9 184 109 84 359 234 384 209 134 59 34 159 284 309	271 346 21 196 121 96 371 246 396 221 146 71 46 171 296 321	263 338 13 188 113 88 363 238 388 213 138 63 38 163 288 313

Étant donnés des carrés magiques $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ d'ordre m et n respectivement, on peut les voir comme des matrices carrées et définir leur produit $A \otimes B$ comme la matrice obtenue en remplaçant chaque terme b_{ij} de B par $b_{ij} + n^2 A$. La figure 20 illustre le produit de carrés d'ordre 4 et d'ordre 5. Le résultat est une matrice donnant un carré magique d'ordre 20 ; on y indique les grandes cases faisant voir le remplacement des b_{ij} par la matrice $b_{ij} + n^2 A$.

On montre dans [1] que le produit de carrés panmagiques est panmagique mais que le produit de carrés affines ne l'est pas exactement. Ce qui nous intéresse ici est la symétrie et le diabolisme.

Théorème 2 *Le produit de deux carrés symétriques est symétrique.*

Démonstration Supposons les carrés A et B symétriques. Si $b_{ij} + n^2 a_{kl}$ et $b_{rs} + n^2 a_{tu}$ sont des cases symétriques par rapport au centre du carré produit $A \otimes B$, alors nécessairement b_{ij} et b_{rs} sont symétriques par rapport au centre dans B et de même a_{kl} et a_{tu} sont symétriques par rapport au centre dans A. Par conséquent la somme de ces deux termes de B est $n^2 - 1$ et celle des deux termes de A est $m^2 - 1$. Ainsi la somme des éléments de deux cases symétriquement placées du produit est $n^2 - 1 + n^2(m^2 - 1) = (nm)^2 - 1$. On en conclut à la symétrie du produit.

La question du produit de carrés diaboliques est un peu plus délicate. Nous devons d'abord définir le produit de deux motifs. On peut représenter un motif du carré A par une matrice booléenne D d'ordre m où chaque 1 représente une case sélectionnée par le motif et chaque 0 une case omise. On fait de même pour le motif du carré B, représenté par une matrice booléenne E. Le produit $D \otimes E$ s'obtient en remplaçant dans E chaque 1 par la matrice D et chaque 0 par la matrice nulle du même format que D. La figure 21 illustre le cas où D représente le carré 2×2 comme motif pour le carré $A = C_4$ et E représente la petite croix de Saint-André pour le carré $B = C_5$. Notons que la matrice D doit avoir les dimensions de A pour assurer le bon espacement des 1 et des 0 ; pour la matrice E on peut se contenter d'un rectangle qui contient tous les 1, car le reste donnera une bordure extérieure de 0 qui n'a aucune utilité par la suite. La position du carré des 1 dans la matrice D et celle de la croix de Saint-André dans E n'ont pas d'importance.

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&1&0 \\ 0&1&1&0 \end{array} \otimes \begin{array}{ccccc} 0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{array} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|c} \ldots & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \ldots \\ \ldots & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 & \ldots \\ \ldots & 0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0 & \ldots \\ \ldots & 0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0 & \ldots \\ \hline \ldots & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 & \ldots \\ \ldots & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 & \ldots \\ \ldots & 0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0 & \ldots \\ \ldots & 0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0 & \ldots \\ \hline \ldots & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 & \ldots \\ \ldots & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 & \ldots \\ \ldots & 0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0 & \ldots \\ \ldots & 0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0 & \ldots \\ \hline \ldots & 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 & \ldots \\ \ldots & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \ldots \end{array}\right]$$

Fig. 21

Théorème 3 *Si A et B sont diaboliques pour le motif de matrice D et pour le motif de matrice E respectivement, alors le produit $A \otimes B$ est diabolique pour le motif $D \otimes E$.*

Démonstration Désignons par S_m la somme magique d'un carré d'ordre m. Chaque 1 de E fait apparaître dans $D \otimes E$ une collection de m termes de la forme $b_{ij} + n^2 a_{kl}$. A étant diabolique pour D, la somme des a_{kl} impliqués est donc S_m et la somme des m termes de la collection est donc $m_{bij} + n^2 S_m$. Si l'on fait la somme de toutes ces collections pour les n éléments 1 de E, on obtient, puisque B est diabolique pour E, $mS_n + nn^2 S_m$, ce qui est précisément la somme magique S_{mn} pour un carré d'ordre mn, comme un bref calcul le fait voir.

Ainsi le carré $C_4 \otimes C_5$ de la figure 20 est diabolique pour le motif à droite de la figure 21. En fait le carré C_5 de la figure 5 s'est révélé diabolique pour au moins 7 motifs distincts et chacun contribue à rendre le carré $C_4 \otimes C_5$ diabolique. Nous avons vu que le carré C_9 de la figure 11c est diabolique pour au moins 8 motifs. Le produit $C_5 \otimes C_9$ est donc diabolique pour au moins 56 motifs. Nous en illustrons un, figure 22, au moyen de cases foncées, plutôt qu'en termes de matrice.

On pourrait continuer… Qu'on me permette plutôt de conclure comme Descartes le fait dans sa *Géométrie* : « Mais ie ne m'arreste point a expliquer cecy plus en detail, a cause que ie vous osterois

le plaisir de l'apprendre de vous mesme »

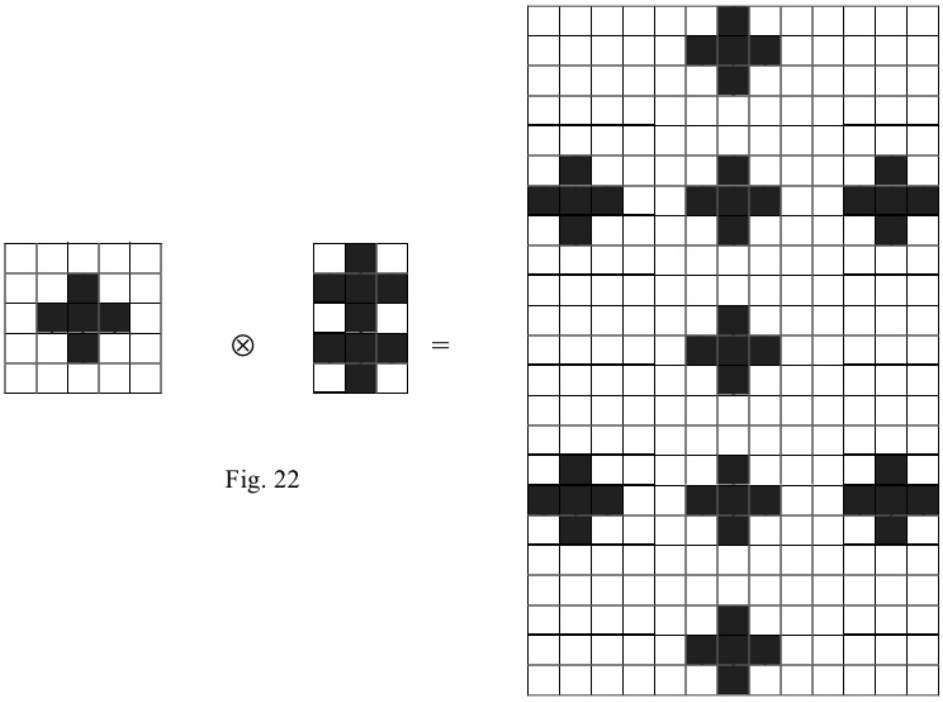


Fig. 22

L'auteur peut rendre disponible un petit logiciel en langage J permettant de construire aisément des carrés magiques suivant la méthode exposée dans le texte. Le langage J, très concis et puissant, agit naturellement sur les tableaux (vecteurs, matrices, etc.) et est disponible gratuitement sur Internet (JSoftware.com).

Références

[1] Constantin, Julien. *Carrés magiques : une construction géométrique*. Bulletin AMQ, Vol. XLV, no 1, mars 2005.
http ://newton.mat.ulaval.ca/amq/bulletins/mars05/carres.pdf

[2] Constantin, Julien. *Sur une construction de carrés magiques diaboliques*, dans Mathématiques et diversité culturelle, Actes du 49e congrès de l'Association mathématique du Québec, 31 mai-1er juin 2006. p. 95-103.

[3] Martin, Yves. *Les carrés magiques dans la tradition arabe*. in Actes du colloque *L'Océan Indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoise, européennes et indiennes*. 1997, p. 240-267, IUFM, Dép. de mathématiques, Saint-Denis de la Réunion.
http ://www.reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/Seminaires/Resources/Martin38.pdf