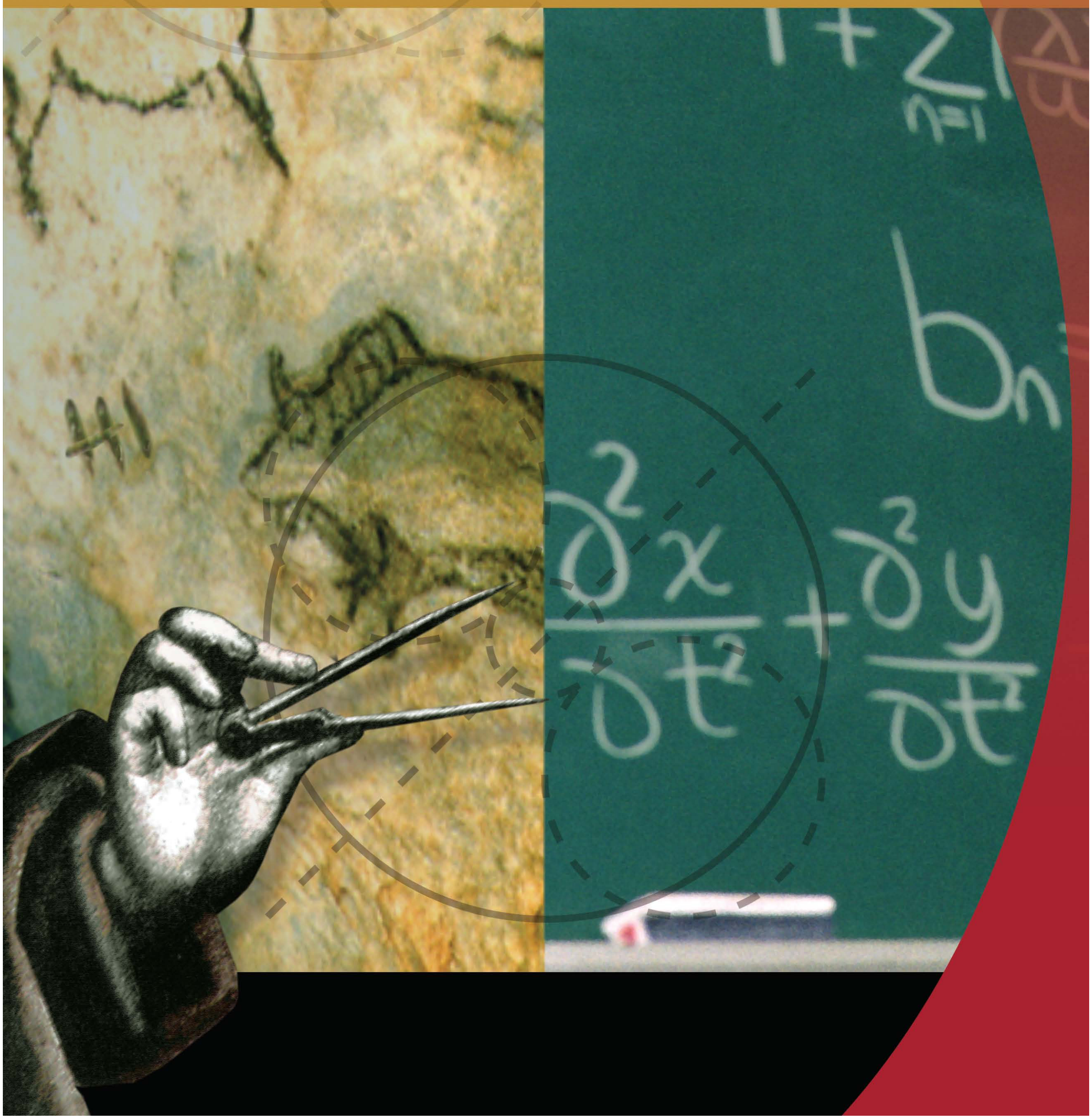
Bulletin AMQ

Association mathématique du Québec

Mai 2006



Membres du comité de rédaction

Politique de rédaction

Dans chaque numéro du *Bulletin AMQ* on retrouve un éditorial circonstancié, des chroniques de nature mathématique, des textes d'information et des articles de fond.
Les articles de fond doivent normalement se situer à l'intérieur de l'un des trois thèmes du *Bulletin AMQ* : mathématiques, didactique des mathématiques, informatique appliquée à l'enseignement ou à l'apprentissage des mathématiques. En général, ils ne doivent pas avoir été publiés dans une autre revue. Toutefois, il pourrait y avoir des exceptions qui seront étudiées par le Comité de rédaction.
Les articles parus dans le *Bulletin AMQ* peuvent être reproduits avec la mention de la source. Les auteurs cèdent à l'AMQ toute redevance qui, leur étant due en vertu des lois touchant aux droits d'auteur, provient de toute utilisation pouvant être faite de leurs textes publiés dans le *Bulletin AMQ*.

ISSN 0316-8832
Dépôt légal - Bibliothèque et Archives nationales du Québec, 2006

Montage de la couverture effectué à partir d'une affiche de Marie-Claude Asselin. `www.conceptionmc.com`.

Mise en page par Marie-Claude Côté.

Association Mathématique du Québec

Table des matières

Bulletin AMQ Vol. XLVI, n° 2, mai 2006

AMQ en action

50e congrès de l'AMQ, octobre 2006 .... **p. 4**

Le prix Abel-Gauthier 2004 remis à Jean Dionne .... **p. 5**

Les Prix de l'AMQ pour 2005 .... **p. 7**

Concours de l'Association mathématique du Québec 2006 - Ordre collégial .... **p. 9**

Concours de l'Association mathématique du Québec 2006 - Ordre secondaire .... **p. 16**

Article

Coups d'oeil à saveur historique sur l'extraction de racine carrée
Bernard R. Hodgson .... **p. 18**

Chroniques

Mathématiques et civilisation
Les observations de Tycho Brahe
André Ross .... **p. 50**

Lu pour vous
Robert Bilinski .... **p. 65**

AMQ en action

50e congrès de l'AMQ, octobre 2006

Le 50e congrès de l'Association mathématique du Québec aura lieu les 20, 21 et 22 octobre 2006 à Shawinigan. Nous reproduisons ci-après le texte apparaissant sur la page d'accueil du site du congrès (http ://aspreg.collegeshawinigan.qc.ca/amq/index.htm). Nous vous invitons à visiter ce site afin d'y trouver toutes les informations nécessaires.

Le Département de mathématiques du Collège Shawinigan est heureux de vous inviter au 50e congrès de l'Association mathématique du Québec, qui se tiendra au Collège Shawinigan les 20, 21 et 22 octobre 2006.

Le thème plus qu'approprié « Mathématiques et Énergie » a été choisi d'abord parce que nous sommes en plein cœur de la région de l'Énergie. C'est ici que le premier grand complexe hydroélectrique du Canada a été construit par la Shawinigan Water and Power, permettant ainsi à Shawinigan de devenir une des premières villes industrielles au pays.

Évidemment, le lien entre les mathématiques et l'énergie ne s'arrête pas là. Qu'on parle d'énergie hydro-électrique, nucléaire, éolienne ou de toute autre forme d'énergie, les mathématiques sont omniprésentes quand il s'agit de la canaliser afin de la rendre utilisable.

Sans oublier, bien sûr, l'énergie et le dynamisme de tous les mathématiciens qui continuent, encore aujourd'hui, de faire évoluer et transmettre cette belle science que sont les mathématiques !

Nous vous proposons d'ailleurs, pour fêter le 50e congrès de l'AMQ, une visite complète de la Cité de l'énergie et un spectacle du conteur Fred Pellerin, grand ambassadeur de la Mauricie.

Au plaisir de vous rencontrer à Shawinigan en octobre 2006 !

Le prix Abel-Gauthier 2004 remis à Jean Dionne

Frédéric Gourdeau

J'ai eu le plaisir de présider le comité du Prix Abel Gauthier 2004, prix remis lors du congrès de l'année suivante, soit celui d'octobre 2005. Deux récipiendaires du prix avaient accepté de joindre le comité pour la remise du prix pour l'année 2004, soit Bernard Hodgson et André Deschênes. Un appel de candidature avait été lancé peu avant ma nomination.

Le travail du jury est basé sur des critères larges qui permettent de souligner le mérite de personnes exceptionnelles, peu importe leur ordre d'enseignement. Il ne s'agit donc pas de porter un regard uniquement sur la production en recherche mais bien de soupeser la contribution à la qualité de l'enseignement des mathématiques au Québec, à la reconnaissance dont jouissent les mathématiques au Québec.

Le récipiendaire de cette année est l'une de ces personnes dont les contributions ont été exceptionnelles : Jean Dionne. Jean a toujours répondu présent lorsque venait le temps de travailler à la reconnaissance des mathématiques et de leur enseignement au Québec. Il a été l'un des artisans des États généraux sur l'éducation. Il a présidé le comité de programme du plus gros congrès québécois portant sur l'enseignement des mathématiques, le Congrès mathématiques de l'an 2000, tenu à l'Université Laval. Il a aussi présidé l'Association mathématique du Québec de 2000 à 2004.

Je viens de nommer quelques uns des défis que Jean Dionne a su relever. Ceux-ci suffiraient à le qualifier pour le prix Abel Gauthier. Mais il y a plus, tellement plus.

Jean écrit magnifiquement. Ses interventions publiques, ses communications avec le ministre de l'Éducation ou son ministère, ses prises de position nous ont toujours honoré. Ses éditoriaux dans le bulletin de l'AMQ étaient souvent des perles de rédaction et d'argumentation. Je me permets de citer brièvement l'éditorial de mai 2001.

> En ce mois de mai, au risque de paraître décousu dans mon propos - mais les quelques fils conducteurs de ce texte se verront nouer plus loin - je ne peux m'empêcher de revenir sur l'événement qui, il y a un an, nous a rassemblés à Québec afin de parler de Mathématiques pour le monde. Moment de pur bonheur, où des personnes de formation et d'expérience diversifiées ont pu se retrouver autour d'une discipline et de son enseignement et échanger sur leurs passions comme sur leurs préoccupations. Ce fut aussi un exemple extraordinaire de ce que peut apporter la collaboration entre les associations, un souvenir d'autant meilleur que porteur de promesses pour l'avenir.

. . .

> L'idée a un jour été lancée de rassembler toutes les associations en une seule. Elle en a choqué plusieurs. Et choque encore. Elle était prématurée. Elle l'est toujours. Et je ne suis pas du tout certain qu'elle soit heureuse : chacune des associations a une raison d'être, sa raison d'être, et réussirions-nous à tout regrouper sous un seul chapiteau que nous risquerions de perdre de vue certaines de ces raisons. Par contre, encouragés par le caractère fructueux des collaborations existantes et par les promesses d'avenir évoquées, il vaudrait la peine d'intensifier nos relations, ne serait-ce qu'en vertu de ce vieux principe de l'union qui, dit-on, ferait la force.
>
> Une première idée a déjà été lancée l'an dernier et est régulièrement revenue sur le tapis : il ne faudrait pas attendre dix ans, laps de temps écoulé entre les États généraux de l'enseignement des mathématiques de 1990 et le congrès de l'an 2000, pour organiser un événement conjoint. Beaucoup souhaitent qu'un tel congrès revienne à tous les quatre ou cinq ans. Il n'est peut-être pas nécessaire de décider pour le siècle à venir, mais sans doute vaut-il la peine de réfléchir dès maintenant à ce que l'on pourrait faire en 2004 ou 2005 Ce serait un projet à long terme.

Au moment de présenter ce prix, EMF 2006 était en route. Le congrès a depuis eu lieu et l'AMQ, le GRMS et un colloque pour le primaire s'y étaient donné rendez-vous. Là comme ailleurs, Jean était présent.

Lorsque le GDM avait besoin d'un président ou d'un membre du comité exécutif, Jean a répondu présent. Lorsque le Forum canadien en enseignement des mathématiques avait besoin d'un membre de comité de programme, présent. Diriger un groupe de travail à ICME 92, aussi présent. Lorsqu'on cherche quelqu'un pour résumer des travaux de quelques heures en quelques minutes, ici ou sur la scène internationale, on se tourne sans crainte vers lui. Jean Dionne, un indéfectible allié, un merveilleux collaborateur.

Jean a aussi contribué plus largement à l'enseignement des mathématiques, avec notamment plus de 7 doctorats et 13 maîtrises complétés sous sa direction. Je ne mentionne ici aucun des nombreux exposés qu'il a présentés lors de congrès ou conférence. Il a de plus contribué à plusieurs ouvrages écrits en collaboration – faut-il s'en étonner ? J'en souligne un : *La construction des savoirs. Manuel de méthodologie en sciences humaines*, avec Christian Lavigne, traduit en portugais et ouvrage de base au Brésil tout comme ici.

En terminant, soulignons qu'il ne s'agit pas d'un prix remis au président sortant de l'AMQ, mais plutôt d'un prix remis à Jean Dionne, dès qu'il a été possible de le faire – il aura donc fallu attendre qu'il ne soit plus président ! - en remerciement de tout ce qu'il a fait et comme une invitation à continuer.

Les Prix de l'AMQ pour 2005

Voici venu le temps de préparer vos propositions de candidatures aux divers prix de l'AMQ pour l'an 2005, lesquels seront remis lors du congrès 2006 au Collège Shawinigan. Vous trouverez la liste de ces prix ci-dessous avec, le cas échéant, quelques précisions sur l'un ou l'autre, ainsi que les coordonnées des présidents ou présidentes des jurys à qui expédier les dossiers. Pour tous sauf un, le prix Rolland-Brossard, la date limite de réception des propositions est fixée au 15 août, ce qui ne doit surtout pas vous empêcher de les soumettre plus tôt.

Prix Abel-Gaulthier : personnalité de l'année
Président du jury : Frédéric Gourdeau
Département de mathématiques et de statistiques
Université Laval
Québec, Canada, G1K 7P4
Téléphone : (418) 656-2131, poste 3088
Télécopieur : (418) 656-2817
Courriel : frederic.gourdeau@mat.ulaval.ca

Prix Adrien-Pouliot : meilleur matériel édité
Présidente du jury : Diane Demers
Département de mathématiques
Collège de Maisonneuve
3800, rue Sherbrooke Est
Montréal, Québec, H1X 2A2
Téléphone : (514) 254-7131 poste 4725
Courriel : ddemers@cmaisonneuve.qc.ca

Prix Frère-Robert : meilleur matériel non édité

Président du jury : Jean Turgeon
Dép. de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
Case postale 6128, Suc. Centre-ville
Montréal, Québec, H3C 3J7
Téléphone : (514) 343-7178
Télécopieur : (514) 343-5700
Courriel : turgeon@dms.umontreal.ca
Pour ce prix, il faut expédier le matériel proposé en 5 exemplaires si possible.

Prix Roland-Brossard : meilleur article publié dans le *Bulletin AMQ*

Président du jury : Fernand Beaudet
Cégep de St-Hyacinthe
Téléphone (cégep) : (450) 773-6800, poste 395
Télécopieur : (450) 773-9971
Courriel : fbeaudet@cegepsth.qc.ca
Ce prix est attribué à la suite d'un vote des lecteurs du Bulletin : il suffit de retourner avant le 30 août le bulletin de vote que vous recevrez par la poste en début août.

Prix Dieter-Lunkenbein : meilleure thèse de doctorat en didactique des mathématiques déposée au cours des deux années précédentes

Présidente du jury : Pascale Blouin
Département des sciences de l'éducation
Université du Québec à Trois-Rivières
3351, boulevard des Forges
Case postale 500
Trois-Rivières, Québec, G9A 5H7
Télélphone (bur.) : (819)-376-5011, poste 3657
Courriel : Pascale_Blouin@uqtr.ca
Ce prix est accordé pour une maîtrise une année et pour un doctorat l'année suivante. Cette année, c'est le tour des thèses de doctorat de se voir célébrer.

Concours de l'Association Mathématique du Québec 2006
Ordre collégial

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.
Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note : *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

QUESTION 1 – Dix boules d'une même couleur

Dans une boîte, il y a 18 boules bleues, 15 boules vertes, 8 boules jaunes, 7 boules rouges et 20 boules oranges. Trouver le plus petit nombre de boules que l'on doit piger dans la boîte (sans remise) pour être certain d'avoir au moins dix boules d'une même couleur. [Note : bien sûr, il se peut que les dix premières boules pigées soient d'une même couleur, mais ça ne correspond pas à la question].

Esquisse de solution :
Au pire, on pigera les 8 jaunes, les 7 rouges, 9 bleues, 9 vertes et 9 oranges, pour un total de 42 boules et la 43$^{\mathrm{e}}$ boule sera la 10$^{\mathrm{e}}$ bleue, verte ou orange.
Réponse : 43.

QUESTION 2 – Une factorisation spéciale

Il est bien connu que tout nombre entier > 1 peut être écrit comme un produit de nombres premiers. Par exemple, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$ et $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Quelle est l'écriture du nombre

$$12345654321$$

comme produit de nombres premiers ?

Esquisse de solution :
On vérifie facilement que
$$111111^2 = 12345654321.$$
Mais,
$$\begin{aligned} 111111 &= 111 \cdot 1001 \\ &= (3 \cdot 37) \cdot (7 \cdot 11 \cdot 13). \end{aligned}$$
Ainsi
$$12345654321 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 37^2.$$

QUESTION 3 – De Héron à Pythagore

Considérons un triangle quelconque dont les côtés mesurent a, b et c unités. L'aire de ce triangle est donnée par la formule suivante due au mathématicien grec Héron
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
où $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ désigne le demi-périmètre du triangle. Démontrer que la formule de Héron entraîne le théorème de Pythagore
$$a^2 + b^2 = c^2$$
dans le cas particulier où le triangle est rectangle d'hypothènuse c. [Aide : Considérer l'aire du triangle rectangle.]

Esquisse de solution :
Le triangle est rectangle si et seulement si $S = \frac{1}{2}\,ab$. Ainsi, si le triangle est rectangle, on a
$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{a^2b^2}{4}.$$
En d'autres termes
$$\frac{(a+b+c)}{2} \cdot \frac{(a+b-c)}{2} \cdot \frac{(a-b+c)}{2} \cdot \frac{(-a+b+c)}{2} = \frac{a^2b^2}{4}.$$
On obtient alors successivement
$$\frac{((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2)}{16} = \frac{a^2b^2}{4},$$
$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4a^2b^2,$$
$$2c^2(a^2+b^2) = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2,$$
$$2c^2(a^2+b^2) = (a^2+b^2)^2 + c^4,$$
$$c^4 - 2(a^2+b^2)c^2 + (a^2+b^2)^2 = 0,$$

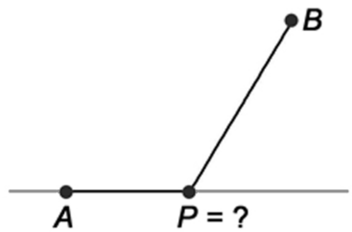
$$(c^2 - (a^2 + b^2))^2 = 0.$$

D'où,

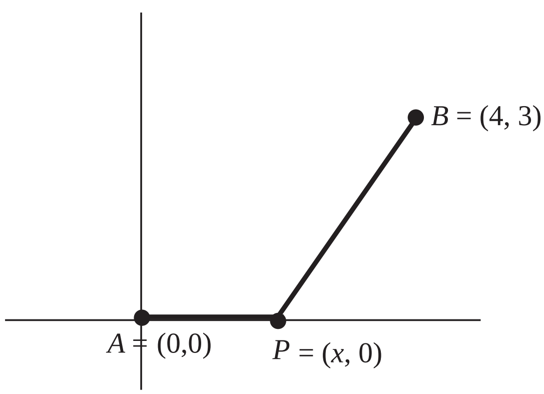
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

QUESTION 4 – La course d'André vers Béatrice

André est à bicyclette au point A sur un route rectiligne et est impatient de rencontrer Béatrice qui l'attend à 5 km de lui, au point B, hors de la route. Il décide de quitter sa bicyclette en un point P sur la route (voir figure) et de courir ensuite à pied, vers Béatrice. Sachant que Béatrice est à 3 km de la route et que la vitesse moyenne d'André à bicyclette est le double de sa vitesse moyenne à pieds, à quelle distance du point A, André doit-il quitter la route de façon à rejoindre Béatrice le plus tôt possible ?



Esquisse de solution :



En coordonnées cartésiennes, posons $A = (0,0)$, $P = (x,0)$, $B = (b,3)$. Comme $b^2 + 3^2 = 5^2$, on a $b = 4$ comme dans la figure.

Sans perte de généralité, on peut supposer que la vitesse moyenne d'André à bicyclette est 2 et sa vitesse à la course est 1. Le temps de parcours du trajet APB est

$$\begin{aligned} T &= \frac{x}{2} + \sqrt{(4-x)^2 + 3^2} \\ &= \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 - 8x + 25}. \end{aligned}$$

Il s'agit de résoudre l'équation

$$\frac{dT}{dx} = 0.$$

C'est-à-dire, $\frac{1}{2}+\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+25}}=0$. On trouve, après calculs, $x=\overline{AP}=(4-\sqrt{3})$ km $\approx 2,268$ km.

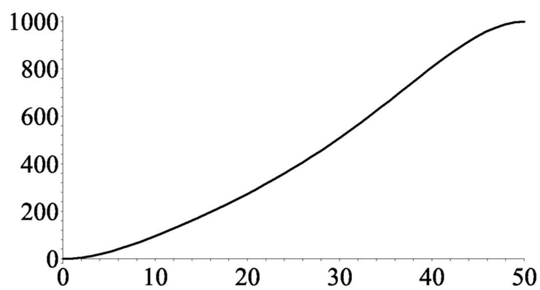
QUESTION 5 – Accélération – décélération

Partant du repos, avec une accélération initiale de 3 mètres/seconde^2 et s'arrêtant au bout de 50 secondes avec une décélération finale de 6 mètres/seconde^2, un véhicule a parcouru 1000 mètres. La courbe suivante donne la distance parcourue, en mètres, par le véhicule en fonction du temps écoulé, en secondes. Sachant que l'équation de cette courbe est

$$y=ax^2+bx^3+cx^4+dx^5,$$

déterminer les valeurs de a,b,c,d.

Note : Une décélération de 6 mètres/seconde^2 équivaut à une accélération négative de -6 mètres/seconde^2.



Esquisse de solution :

Soit $p(x)=ax^2+bx^3+cx^4+dx^5$. La vitesse et l'accélération au temps x sont respectivement données par

$$p'(x)=2ax+3bx^2+4cx^3+5dx^4$$

et

$$p''(x)=2a+6bx+12cx^2+20dx^3.$$

Puisque $p(0)=0$ et $p'(0)=0$, les conditions du problème peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{array}{rcl} p''(0) & = & 3; \\ p(50) & = & 1000; \\ p'(50) & = & 0; \\ p''(50) & = & -6. \end{array}$$

Ce qui fournit les 4 équations

$$2a=3$$
$$2\,500\,a+125\,000\,b+6\,250\,000\,c+312\,500\,000\,d=1\,000$$
$$100\,a+7\,500\,b+500\,000\,c+31\,250\,000\,d=0$$
$$2a+300\,b+30\,000\,c+2\,500\,000\,d=-6.$$

Simplifiant et résolvant, on trouve

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = -\frac{7}{100}, \quad c = \frac{9}{5000}, \quad d = -\frac{21}{125\,000}$$

Ainsi,

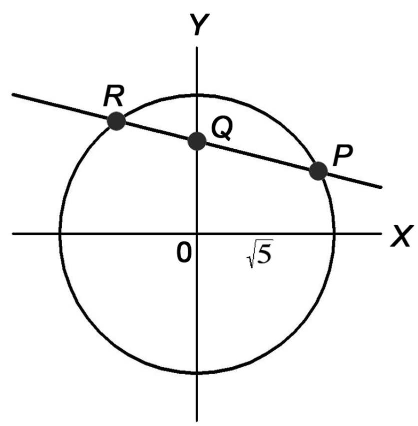
$$y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{100}x^3 + \frac{9}{5\,000}x^4 - \frac{21}{125\,000}x^5.$$

QUESTION 6 – Rationnalité circulaire

Un point du plan cartésien est dit rationnel si chacune de ses deux coordonnées est un nombre rationnel. Par exemple, le point $P = (2, 1)$ est rationnel, ainsi que le point $T = (-3/4, 2/3)$. Ça n'est pas le cas pour le point $U = (\sqrt{2}, 7/8)$ puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel. Considérons la circonférence (voir figure)

$$x^2 + y^2 = 5$$

dont le rayon est le nombre irrationnel $\sqrt{5}$. Cette circonférence contient pourtant le point rationnel $P = (2, 1)$ car $2^2 + 1^2 = 5$. Prouver que si Q est un point rationnel quelconque sur l'axe des y alors le point d'intersection R de la droite PQ avec la circonférence est aussi un point rationnel. En déduire le résultat surprenant suivant : la circonférence $x^2 + y^2 = 5$, de rayon irrationnel $\sqrt{5}$ contient une infinité de points rationnels !



Esquisse de solution :

Posons $Q = (0, u)$ où $u = m/n$ est un nombre rationnel. Puisque $P = (2, 1)$, la droite passant par PQ est donnée, après calculs par l'équation

$$y = u + \frac{1}{2}(1 - u)x.$$

En substituant cette valeur de y dans l'équation $x^2 + y^2 = 5$, on trouve, après calculs,

$$x = 2, \text{ ou } x = \frac{2(u^2 - 5)}{5 - 2u + u^2}.$$

Dans les deux cas, x est rationnel. Les valeurs de y correspondantes sont

$$y = 1 \text{ et } y = -\frac{5 - 10u + u^2}{5 - 2u + u^2}.$$

Ainsi, $(x, y) = R$ est rationnel. Finalement, puisqu'il existe une infinité de points rationnels $Q = (0, u)$ sur l'axe des y, il existe nécessairement une infinité de points rationnels R sur la circonférence.

Le concours collégial de l'AMQ (2006) était sous la responsabilité d'une équipe de l'UQAM formée de Jeanne Laporte-Jobin qui s'occupe de l'administration du concours et de Gilbert et Jacques Labelle qui se chargent du questionnaire, du solutionnaire et de la correction..

L'AMQ remercie Jacques Labelle et son équipe ainsi que les responsables locaux du concours dans les collèges. Enfin, l'AMQ tient à remercier les étudiantes et les étudiants de leur participation et les félicite de leurs succès.

Résultats du concours 2006 – Ordre collégial		
Position	**Nom**	**Institution**
1	CAO Yanshuai	Collège Marianopolis
2 à 4	URLEA Maria	CEGEP de Maisonneuve
2 à 4	ATTOYAN Tigran	Collège Marianopolis
2 à 4	JIANG Xian	Collège Marianopolis
5 et 6	RAJALINGHAM Rishi	Collège Marianopolis
5 et 6	YANG Dan Yang	Collège Vanier
7 et 8	DESSUREAULT Patrick	CEGEP de l'Abitibi-Témiscamingue
7 et 8	FORTIER BOURQUE Maxime	CEGEP de Thetford
9 à 11	BÉRUBÉ Nicolas	CEGEP Bois-de-Boulogne
9 à 11	BARIL Geneviève	Collège André-Grasset
9 à 11	GERVAIS Hualong	Collège régional Champlain - St-Lambert
12 et 13	SAVARD Bruno	CEGEP Saint-Jean-sur-Richelieu
12 et 13	REMILLARD Olivier	Collège international des Marcellines
14 et 15	LAVOIE Guillaume	CEGEP Bois-de-Boulogne
14 et 15	TANEV Tanio	Collège Marianopolis
16	AUMOND-BEAUPRÉ Jessé	CEGEP de l'Abitibi-Témiscamingue
17 à 20	MATHIEU Daniel	CEGEP Beauce-Appalaches
17 à 20	AGENOR Aouod Quang	Collège Jean-de-Brébeuf
17 à 20	LABELLE Alexandre	Collège Jean-de-Brébeuf
17 à 20	FILIP Ioan	Collège Marianopolis
21 à 23	POULIN Guillaume	Collège André-Laurendeau
21 à 23	BEARDSELL Guillaume	Collège de Lévis-Lauzon
21 à 23	TAJDIN Moez	Collège Marianopolis
24 à 26	SIMARD Sébastien	Collège André-Laurendeau
24 à 26	BILODEAU Pierrick	Collège Champlain-St. Lawrence
24 à 26	BROSSEAU Pierre-Olivier	Collège Jean-de-Brébeuf
27 et 28	LIU Kunpeng	Collège André-Laurendeau
27 et 28	GOSSELIN-ARCOUET Laurent	Collège Jean-de-Brébeuf
29 à 31	BERNARD Sébastien	CEGEP Beauce-Appalaches
29 à 31	LEMIRE PAQUIN Alexandre	CEGEP de Shawinigan
29 à 31	MOSCOVICI Jonathan L.	Collège Marianopolis

Concours de l'Association Mathématique du Québec 2006
Ordre secondaire

Le questionnaire et les solutions du concours seront publiés dans le numéro d'octobre 2006. Nous publions ici la liste des noms des étudiantes et étudiants qui ont obtenus les 30 meilleurs résultats.

Résultats du concours 2006 – Ordre secondaire		
Rang	**Nom**	**Institution**
1er	HU, Zhebin	École Internationale de Montréal, Montréal
2e	NAI, Ma	École Internationale de Montréal, Montréal
3e	HU, Zheping,	École Internationale de Montréal, Montréal
4e	CAMPAGNA, Jean-Marc	École Secondaire des Sources, Dollard des Ormeaux
5e	SOKOLOV, Alexey	École Secondaire Louis-Riel, Montréal
	TOTEVA, Téodora	École Secondaire Pierre-Laporte, Montréal
7e	WEN, Heming	École Internationale de Montréal, Montréal
8e	LEFEBVRE, Martin	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	NICOLAU, Sefan	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	CHARRON, Philippe	École Secondaire Sophie-Barat, Montréal
	WANG, Ning Nan	École Secondaire Sophie-Barat, Montréal
12e	ROUSSEAU, Matthieu	Collège Ste-Anne, Lachine
13e	VÉRES, Adrian	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	BÉNIAK, Stéphane	Collège Ste-Anne, Lachine
	PELLETIER, François	Le Lycée du Saguenay, Chicoutimi
16e	LEPAGE, Jean-Félix	Collège Beaubois, Pierrefonds
	TALISSÉ, Maude	Collège Beaubois, Pierrefonds
	DUMONT, Hervé	Académie les Estacades, Trois-Rivières
19e	ALLARD, Catherine	École Secondaire Marcellin-Champagnat, St-Jean-sur-Richelieu
	CANTIN, Émile	Académie les Estacates, Trois-Rivières

21e	AVIS, Éric	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	TROTTIER, Simon	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	BROUILLETTE, David	Collège Mont St-Louis, Montréal
	CANTIN, Danny	École Secondaire Marcellin-Champagnat, St-Jean-sur-Richelieu
	NGUYEN, Thamh Long	École Secondaire Mont-Royal, Montréal
26e	FEDEROV, Dmitri	Collège Jean-Eudes, Montréal
	MUNTEANU, Andrei	Collège Jean-Eudes, Montréal
	YING, Xue Hao	École Secondaire Louis-Riel, Montréal
	TOBAN, Nader	École Secondaire des Sources, Dollard des Ormeaux
	GAUTHIER, Marianne	Le Lycée du Saguenay, Chicoutimi

Coups d'oeil à saveur historique sur l'extraction de racine carrée

Bernard R. Hodgson
Université Laval

1 Introduction

Aussi loin que l'on remonte en mathématiques, l'extraction de racine carrée a toujours suscité un vif intérêt. Clairement de portée géométrique — il est bien sûr question, comme son nom l'indique d'ailleurs, du côté d'un carré d'aire donnée —, la racine carrée s'avère, d'un point de vue arithmétique, une opération d'une complexité calculatoire non banale. Pour un Descartes néanmoins, l'extraction des racines (notamment carrées) occupe une place privilégiée en arithmétique, en compagnie des quatre opérations usuelles :

> (...) toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division (...) ([4, p. 1])

Ce commentaire de Descartes se retrouve au tout début de *La Géométrie*, dans une section où il explique « *comment le calcul d'arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie* ». Suivent donc des commentaires où Descartes indique comment effectuer à la règle et au compas non seulement l'addition et la soustraction, mais aussi la multiplication et la division (à l'aide de triangles semblables bien choisis), et l'extraction de racine carrée (encore une fois à l'aide de triangles semblables, en élevant une perpendiculaire dans un demi-cercle).

De nos jours, une simple calculatrice de poche rend le calcul d'une racine carrée tout à fait banal — dans la mesure où la précision désirée ne dépasse pas les capacités d'affichage de la calculatrice. Mais tel n'a évidemment pas toujours été le cas. Au fil des âges, diverses méthodes ont été introduites afin d'évaluer une racine carrée, ou encore d'en donner à l'aide d'algorithmes approximatifs, le cas échéant, une valeur approchée avec la précision désirée.

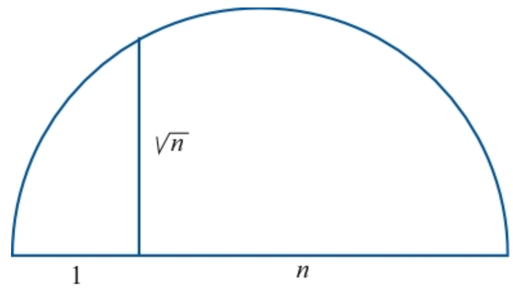


Figure 1

Cette idée de calcul par approximations successives occupe une place importante dans le présent texte. Elle a été exprimée comme suit par d'Alembert dans un article de l'*Encyclopédie* (seconde moitié du XVIII[e] siècle) :

> Si un nombre n'est point un carré parfait, il ne faut pas s'attendre d'en pouvoir tirer la racine exacte en nombres rationnels, entiers ou rompus ; dans ces cas, il faut avoir recours aux méthodes d'*approximation*, & se contenter d'une valeur qui ne diffère que d'une très petite quantité de la valeur exacte de la racine cherchée.
>
> (Cité dans [2, pp. 227-228])

Nous proposons dans ce texte un survol de quelques techniques d'extraction de racine carrée. Les méthodes que nous présentons ont été développées en divers moments et lieux de l'histoire des mathématiques et illustrent bien, nous semble-t-il, la richesse et l'ingéniosité des points de vue que l'on a su adopter d'une époque à l'autre. Notre périple nous amènera tout d'abord en Mésopotamie, où on observera des valeurs approchées de racines carrées pouvant se justifier par un argument géométrique ; puis en Grèce, avec les calculs par approximations successives résultant de la célèbre méthode de Héron ; cet algorithme est lui-même un cas particulier de la méthode de Newton-Raphson, dans laquelle intervient la dérivée d'une fonction bien choisie ; puis on verra comment une valeur de $\sqrt{2}$ présente dans la tradition mathématique indienne peut s'expliquer en faisant appel à une dissection astucieuse de deux carrés ; on empruntera ensuite à la tradition chinoise une approche géométrique menant à l'algorithme de type « chiffre à chiffre » encore enseigné dans nos écoles primaires il a quelques décennies, avant l'avènement de la calculatrice ; enfin on terminera par une technique qui peut être rattachée à l'équation de Pell-Fermat.

2 La racine carrée en Mésopotamie

Notre premier arrêt nous amène donc en Mésopotamie (l'actuel Irak) quelques siècles avant notre ère. Les mathématiques de cette civilisation nous sont connues par l'intermédiaire de tablettes d'argile — on en a répertorié littéralement des centaines ! —, et certaines d'entre elles contiennent des inscriptions se rapportant à des racines carrées (par exemple, on cherche le côté d'un triangle rectangle, connaissant les deux autres). On y trouve ainsi comme valeurs de $\sqrt{2}$ les nombres

$$1+\frac{25}{60} \tag{1}$$

et

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3} \tag{2}$$

(les Mésopotamiens utilisaient un système de numération sexagésimal, c'est-à-dire de base soixante). Cette dernière approximation vaut environ 1,41421296, avec exactitude sur les cinq premières décimales. On ne connaît pas le raisonnement ayant mené les mathématiciens mésopotamiens à ces valeurs particulières. Dans le cas de l'approximation (1), on pourrait imaginer que l'on a tout bonnement procédé par essai et erreur en élevant au carré des nombres donnés.

L'historien Victor Katz propose comme plausible l'explication suivante du procédé qu'auraient pu suivre les Mésopotamiens pour en venir à ces valeurs. Se basant sur des informations figurant sur certaines tablettes, Katz affirme (voir [10, p. 28]) qu'il s'agit là d'une méthode « for which there is some textual evidence ».

2.1 Approximation de $\sqrt{k}$ à partir d'une valeur par défaut

Géométriquement parlant, le calcul de $\sqrt{k}$ peut être vu comme la recherche du côté d'un carré d'aire k. On peut chercher à inclure dans ce carré le plus grand carré possible de côté connu — on peut utiliser pour ce faire l'une des nombreuses tablettes de nombres élevés au carré que possédaient les Mésopotamiens. Appelons a le côté du carré ainsi introduit, et c le petit segment qu'il faut ajouter à a pour obtenir le côté du carré d'aire k, c'est-à-dire $a+c=\sqrt{k}$.

La recherche d'une valeur a' plus près de $\sqrt{k}$ revient donc à trouver une bonne approximation de c, ce qui peut se faire en examinant la région en forme de « L » inversé entourant le carré de côté a — par analogie avec le style d'un cadran solaire ou encore avec l'équerre, cette région était appelée *gnomon* par les anciens Grecs (voir la définition 2 du Livre II des *Éléments* d'Euclide, où cette expression est introduite en lien avec un parallélogramme).

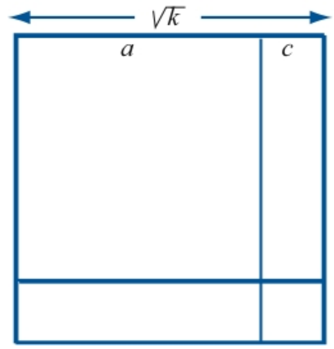


Figure 2

Ce gnomon a bien sûr une aire de $k - a^2$. Mais observons qu'il peut se décomposer en deux rectangles de côtés a et c, plus un « petit » carré de côté c. On a donc

$$2ac + c^2 = k - a^2.$$

(Ce type d'argument géométrique, basé sur des dissections élémentaires de figures, est indéniablement à la portée des Mésopotamiens. Mais il y a bien sûr un anachronisme dans la notation algébrique que nous utilisons pour exprimer ces faits géométriques.) On peut, afin de simplifier la discussion, négliger le carré de côté c, obtenant ainsi l'approximation $2ac \approx k - a^2$, c'est-à-dire

$$c \approx \frac{k - a^2}{2a}.$$

Il s'ensuit qu'une meilleure valeur de $\sqrt{k}$ (par rapport à la valeur de départ a) est obtenue en prenant pour approximation de $a + c$ la quantité

$$a' = a + \frac{k - a^2}{2a}. \tag{3}$$

Posant $c' = \frac{k-a^2}{2a}$, on observera que l'approximation $c \approx c'$ en est une *par excès* ($c' > c$) : en effet, puisque $2ac' = k - a^2$, on suppose donc que les deux rectangles a par c' ont ensemble même aire que le gnomon, forçant ainsi une valeur de c' plus grande que c. Il en résulte que l'approximation (3), $a' = a + c'$, basée sur une valeur de départ a prise *par défaut* (c'est-à-dire $a < \sqrt{k}$), est elle-même par excès ($a' > \sqrt{k}$).

L'inégalité $a' > \sqrt{k}$ peut aussi être justifiée en élevant chacun de ses membres au carré. Comme $a' = \frac{a^2+k}{2a}$, on a en effet

$$\begin{aligned} a'^2 - k &= \frac{a^4 + 2a^2k + k^2 - 4a^2k}{4a^2} \\ &= \frac{(a^2 - k)^2}{4a^2}, \end{aligned}$$

de sorte que $a'^2 - k > 0$, puisque le numérateur et le dénominateur du membre de droite de la dernière égalité sont tous deux strictement positifs.

On verra à la section 2.4 un argument géométrique montrant que l'approximant a' prend toujours une valeur par excès.

2.2 Approximation de $\sqrt{k}$ à partir d'une valeur par excès

Qu'arriverait-il si au lieu de partir d'un carré de côté a situé à l'intérieur du carré d'aire k, on en prenait un le contenant ?

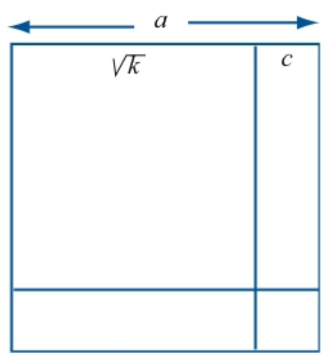


Figure 3

On a alors $a - c = \sqrt{k}$. Par ailleurs, le gnomon entourant le carré d'aire k, qui est maintenant d'aire $a^2 - k$, se décompose en deux rectangles de côtés $a - c$ et c, plus un « petit » carré de côté c. On a donc

$$2(a - c)c + c^2 = a^2 - k.$$

On en tire que $2ac - c^2 = a^2 - k$ (cette dernière expression s'interprète d'ailleurs aisément sur le gnomon). Négligeant à nouveau le carré de côté c, on obtient l'approximation c' telle que $2ac' = a^2 - k$, c'est-à-dire

$$c \approx c' = \frac{a^2 - k}{2a}.$$

Il s'ensuit, dans ce cas, qu'une meilleure valeur de $\sqrt{k}$ est obtenue en prenant pour approximation de $a - c$ la quantité

$$a' = a - c' = a - \frac{a^2 - k}{2a} = a + \frac{k - a^2}{2a}. \tag{4}$$

Il est intéressant de constater que la « formule d'approximation » qui en découle est exactement la même (comparer les lignes (3) et (4)), que la valeur de départ a soit prise plus petite ou plus grande que $\sqrt{k}$. Il en résulte que l'approximation de la racine carrée, lorsque basée sur une valeur de départ a prise *par excès* ($a > \sqrt{k}$), est elle-même par excès encore une fois ($a' > \sqrt{k}$). (On pourrait également justifier cette affirmation en notant que dans le cas $a > \sqrt{k}$, l'approximation de c par c' se fait maintenant par défaut : $c' < c$. On suppose en effet que les deux rectangles a par c' ont ensemble même aire que le gnomon, forçant ainsi une valeur de c' plus petite que c, puisque le gnomon est formé de deux rectangles a par c *moins* le carré de côté c. Conséquemment a' est par excès, puisque dans l'expression $a - c'$, on soustrait de a une quantité par défaut.)

Si on applique cette méthode à l'évaluation de $\sqrt{2}$ en partant de la valeur $1 + \frac{25}{60}$ (supérieure à $\sqrt{2}$), on trouve directement l'expression $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ — en se limitant à une précision de trois « positions sexagésimales ». Le détail des calculs est laissé aux bons soins du lecteur.

2.3 Une autre interprétation géométrique

Faisant fi de l'anachronisme inhérent à une telle manipulation, simplifions allègrement (et algébriquement !) la « formule mésopotamienne » $a + \frac{k-a^2}{2a}$; on obtient ainsi aisément

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right). \tag{5}$$

Cette réécriture met l'accent, dans le calcul de $\sqrt{k}$, sur les deux nombres a et $\frac{k}{a}$, où a peut être pris comme une certaine valeur approchée de $\sqrt{k}$ (peu importe la manière dont celle-ci a été obtenue). Et on voit de plus qu'il est ici question de la *moyenne arithmétique* de ces deux nombres, $\frac{1}{2}(a + \frac{k}{a})$.[1]

Cette vision donne lieu à une nouvelle interprétation géométrique. La recherche du côté du carré d'aire k peut se faire en remplaçant ce carré par un rectangle de côtés a et $\frac{k}{a}$, et donc d'aire k lui aussi — la figure suivante illustre le cas $a > \sqrt{k}$.

On prend ensuite la moyenne arithmétique $a' = \frac{1}{2}(a + \frac{k}{a})$ des deux côtés du rectangle, obtenant ainsi une nouvelle valeur a' qui, à tout le moins sur le plan intuitif, constitue une « meilleure approximation » du côté du carré.

Et c'est bel et bien le cas ! Ainsi, dans le cas illustré à la figure 4, on a d'une part $a' < a$ (puisque cette moyenne a' est située au milieu des valeurs a et $\frac{k}{a}$, avec $\frac{k}{a} < a$), et nous montrons d'autre part à la section suivante que a' est toujours plus grand que $\sqrt{k}$. Il en résulte donc que $\sqrt{k} < a' < a$, de sorte que l'approximant a' est plus proche que a de $\sqrt{k}$.

[1] Il convient d'insister sur le fait qu'une telle vision en termes de la moyenne arithmétique des deux nombres a et $\frac{k}{a}$ ne se retrouve pas dans les documents issus de l'époque mésopotamienne. Mais on la rencontre explicitement chez Héron d'Alexandrie (voir section 3.1).

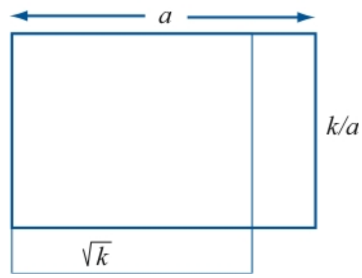


Figure 4

2.4 Une méthode excessive

L'interprétation géométrique de la section 2.3 mène à une preuve visuelle[2] du fait que la valeur obtenue par la méthode mésopotamienne est toujours par excès, que le nombre a soit inférieur ou supérieur à $\sqrt{k}$. Considérons par exemple le cas $a > \sqrt{k}$. Dans le rectangle de côtés a et $\frac{k}{a}$, insérons un carré de côté $\frac{k}{a}$ et considérons ensuite le carré de côté $a' = \frac{1}{2}(a+\frac{k}{a})$. Comme a' est la moyenne arithmétique de a et $\frac{k}{a}$, le côté de ce dernier carré est précisément à mi-chemin entre les longueurs a et $\frac{k}{a}$. Constatant la congruence des deux régions tramées de la figure 5, on voit immédiatement que le carré de côté a' a une aire plus grande que le rectangle a par $\frac{k}{a}$, c'est-à-dire $a'^2 > k$.

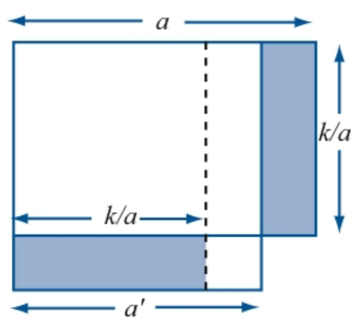


Figure 5

Nous avons donc le résultat suivant, auquel nous ferons appel à la section 3.2.

> *Peu importe que la valeur a constitue une approximation de $\sqrt{k}$ par défaut ou par excès, l'approximant $a' = \frac{1}{2}(a + \frac{k}{a})$ est toujours par excès, c'est-à-dire $a' > \sqrt{k}$.*

[2] Cette preuve m'a été suggérée par mon collègue Frédéric Gourdeau, que je remercie.

Rappelons qu'outre la preuve visuelle qui précède, ce résultat a d'abord été établi plus haut par un raisonnement géométrique portant sur les gnomons (sections 2.1 et 2.2). Nous en avons aussi donné une preuve algébrique à la section 2.1. Nous aimerions conclure cette section en présentant un autre argument de ce même résultat.

Une façon simple de se convaincre de la validité de l'inégalité $a' > \sqrt{k}$ est de faire appel à un fait « classique » en mathématiques élémentaires, l'*inégalité moyenne géométrique – moyenne arithmétique* (que nous désignons de manière abrégée par le sigle MG–MA). Mais pourquoi au juste parlons-nous ici de moyenne géométrique ?

Le fait de remplacer le carré d'aire k par un rectangle de même aire et de côtés a et $\frac{k}{a}$, comme l'illustre la figure 4, correspond bien sûr à l'égalité $k = a \times \frac{k}{a}$. Mais alors le côté du carré, qui est la racine carrée recherchée, s'écrit sous la forme

$$\sqrt{k} = \sqrt{a \times \frac{k}{a}},$$

où l'on retrouve dans le membre de droite la *moyenne géométrique* des deux nombres a et $\frac{k}{a}$. Or n'oublions pas que l'approximant a' est justement la moyenne arithmétique de ces deux mêmes nombres.

Dit autrement, on peut interpréter la méthode mésopotamienne comme consistant à approximer la racine carrée d'un nombre k, que l'on peut voir comme la moyenne géométrique de deux nombres a et $\frac{k}{a}$, à l'aide de la moyenne arithmétique de ces deux mêmes nombres. On est ainsi amené à se pencher sur la relation entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique de deux nombres, et c'est là qu'intervient l'inégalité MG–MA : la moyenne géométrique de deux nombres ne dépasse jamais leur moyenne arithmétique.

Inégalité MG–MA
Étant donné deux réels non négatifs u et v, on a

$$\sqrt{u \cdot v} \leq \frac{1}{2}(u + v),$$

l'égalité étant satisfaite lorsque $u = v$.

Il existe de nombreuses preuves de ce résultat bien connu. Pour le lecteur intéressé, nous en présentons quelques-unes dans l'Appendice 1 au présent texte.

Transposée au cas qui nous intéresse, l'inégalité MG–MA devient donc

$$\sqrt{a \times \frac{k}{a}} \leq \frac{1}{2}(a + \frac{k}{a}),$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{k} \leq a'.$$

L'égalité $a = \frac{k}{a}$ étant mise de côté pour raison de trivialité, on en tire donc, tel que souhaité,

$$\sqrt{k} < a'.$$

3 La racine carrée par approximations successives : la méthode de Héron

Autant que je sache, on ne retrouve pas chez les Mésopotamiens l'idée de répéter systématiquement leur démarche, c'est-à-dire de reprendre le calcul à partir de chaque nouvelle valeur ainsi obtenue, afin de trouver de proche en proche une meilleure approximation de $\sqrt{k}$. Mais une telle idée d'itérations successives pour la racine carrée se retrouve explicitement chez le mathématicien grec Héron d'Alexandrie (Ier siècle de notre ère).

3.1 La méthode proposée par Héron

L'expression $\frac{1}{2}(a + \frac{k}{a})$ a été proposée comme approximation de $\sqrt{k}$ par Héron d'Alexandrie dans le Livre I de ses *Métriques* — ouvrage perdu puis retrouvé en 1896. Héron présente au début de ce livre divers problèmes arithmétiques sur les triangles (calcul de l'aire et de l'hypoténuse du triangle rectangle de cathètes donnés, aire du triangle isocèle de côtés donnés, etc.) et il en vient, dans le problème 8 ([7, pp. 18–25]), à une méthode générale pour le calcul de l'aire A du triangle dont on connaît les trois côtés a, b et c. C'est alors qu'il introduit la célèbre formule qui porte son nom — quoiqu'elle était vraisemblablement connue d'Archimède (cf. [6, II, p. 322]) :

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{6}$$

où $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ est le demi-périmètre du triangle. Le problème 8 du Livre I se termine d'ailleurs par une « preuve géométrique » (selon les mots mêmes de Héron) de la formule (6).

Mais auparavant Héron applique, dans ce même problème, sa formule au cas $a = 7$, $b = 8$ et $c = 9$, de sorte qu'il doit calculer $\sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{720}$ (dans les problèmes précédents, les longueurs ont été choisies de manière à ce que les extractions de racine carrée soient immédiates : $\sqrt{25}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{144}$). Héron écrit alors :

> Puisque 720 n'a pas de côté rationnel, nous extrairons le côté avec une très petite différence de la façon suivante. Comme le premier nombre carré plus grand que

720 est 729 qui a pour côté 27, divise 720 par 27, cela fait 26 et $\frac{2}{3}$, ajoute 27 cela fait 53 $\frac{2}{3}$; prends-en la moitié, cela fait 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$. En fait, 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ multiplié par lui-même donne 720 $\frac{1}{36}$; de sorte que la différence (sur les carrés) est $\frac{1}{36}$. Si nous voulons rendre cette différence inférieure encore à $\frac{1}{36}$, nous mettrons 720 $\frac{1}{36}$ trouvé tout à l'heure à la place de 729 et, en procédant de la même façon,[3] nous trouverons que la différence (sur les carrés) est beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$.

(Cité dans [2, p. 231])

Ce texte de Héron mentionne donc explicitement l'idée de répéter le calcul à partir de la valeur obtenue, de manière à se rapprocher autant que désiré de la valeur recherchée. On voit ainsi surgir une suite (théoriquement illimitée) de valeurs $a_1, a_2, a_3, \ldots$ obtenues par itération de la « formule de Héron » et se rapprochant de $\sqrt{k}$, chaque approximation étant reliée à la précédente par la relation

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right). \tag{7}$$

Ainsi, c'est presque en passant que Héron introduit la formule $\frac{1}{2}(a+\frac{k}{a})$, et il ne dit rien quant à la manière dont il est parvenu à cette expression. S'agit-il d'un raisonnement géométrique comme celui évoqué à la section 2.3, où on approxime un carré par des rectangles de même aire ? Ou bien a-t-il utilisé une autre approche ? Ou encore s'agit-il d'un fait emprunté à des textes plus anciens ou appartenant au « folklore mathématique » de son temps ? On ne le sait pas.

Nous aimerions néanmoins revenir ici sur l'interprétation de l'algorithme de Héron qui résulte des propos de la section 2.4. À défaut d'avoir pu être repérée explicitement dans la littérature de l'époque, cette interprétation fait à tout le moins intervenir deux expressions tout à fait dans l'esprit des mathématiques grecques de l'Antiquité : la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de deux nombres donnés. Rappelons à cet égard que les Pythagoriciens considéraient diverses sortes de « moyennes » (voir [6, I, pp. 85–89]), dont en particulier la *moyenne arithmétique* $\frac{1}{2}(u+v)$ et la *moyenne géométrique* $\sqrt{u \cdot v}$ de deux nombres u et v.

Les commentaires de la section suivante sont largement inspirés de la présentation que l'on trouve dans [1, pp. 11-13].

3.2 Une analyse de la méthode de Héron

[3] Autrement dit, en travaillant avec le « côté » 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ plutôt qu'avec 27. Rappelons au passage que la notation 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ signifie $26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

La formule de Héron fait donc intervenir deux nombres, a et $\frac{k}{a}$, qui sont les côtés d'un rectangle d'aire k que l'on prend comme approximation du carré de même aire. On suppose ici que $a \neq \frac{k}{a}$, car sinon le problème de la recherche de $\sqrt{k}$ serait terminé !

Or il est clair que ces deux nombres a et $\frac{k}{a}$ viennent « encadrer » le côté $\sqrt{k}$ du carré, dans le sens que

- si $a < \sqrt{k}$, alors $\sqrt{k} < \frac{k}{a}$ (cas $a < \sqrt{k} < \frac{k}{a}$), et
- si $a > \sqrt{k}$, alors $\sqrt{k} > \frac{k}{a}$ (cas $\frac{k}{a} < \sqrt{k} < a$).

Cette observation découle directement de l'égalité $a \cdot \frac{k}{a} = k$: lorsqu'on considère un produit de deux facteurs, ces facteurs se situent forcément de part et d'autre de la racine carré du produit. On peut aussi raisonner directement sur les inégalités ; ainsi, dans le cas où par exemple $a > \sqrt{k}$, on a alors $\frac{k}{a} < \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}$.

De plus, si on pose

$$a' = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$$

— a' est donc la nouvelle valeur d'approximation donnée par une application de l'algorithme de Héron —, on a clairement que a' est elle aussi encadrée par a et $\frac{k}{a}$ (a' est en effet une moyenne arithmétique !). On peut donc espérer que les deux nombres a' et $\frac{k}{a'}$ vont constituer un « meilleur encadrement » de $\sqrt{k}$ que a et $\frac{k}{a}$. Et c'est bien le cas !

Afin d'établir ce fait, nous simplifions d'abord le cadre de notre discussion en rappelant le résultat suivant introduit à la section 2.4.[4]

Peu importe que la valeur a constitue une approximation de $\sqrt{k}$ par défaut ou par excès, la nouvelle valeur $a' = \frac{1}{2}(a + \frac{k}{a})$ est toujours par excès, c'est-à-dire $a' > \sqrt{k}$.

Chaque étape de la méthode de Héron donne donc une valeur d'approximation par excès, de sorte que la seule exception possible devient le choix de la valeur initiale, que la personne appliquant la méthode pourrait éventuellement choisir par défaut. Dans la discussion

[4] Rappelons qu'une des preuves du résultat figurant en encadré fait intervenir les notions de moyennes arithmétique et géométrique. Ces moyennes, nous l'avons dit, remontent à l'école pythagoricienne, donc plus de cinq cents ans avant Héron. Cependant rien dans la littérature, autant que je sache, ne vient supporter la prétention que l'interprétation en termes de ces moyennes serait le point de vue qui aurait guidé Héron. Néanmoins il s'agit sans contredit d'une manière à la fois élégante et inspirante d'aborder la méthode de l'Alexandrin. Par ailleurs, nous mentionnons à l'Appendice 1 deux textes grecs anciens dont on peut extraire le lien entre ces deux moyennes tel qu'exprimé par l'inégalité MG–MA. Mais il n'est pas du tout clair pour autant qu'une telle vision aurait pu servir d'inspiration à Héron.

qui suit, nous ne perdons donc pas de généralité en nous restreignant au cas de valeurs approximatives par excès.

Étant donné le couple $(\frac{k}{a}, a)$ formant un encadrement de $\sqrt{k}$,

$$\text{c.-à-d.} \quad \frac{k}{a} < \sqrt{k} < a,$$

on en tire, par une application de la formule de Héron, un approximant a' tel que $a' > \sqrt{k}$, de sorte que le couple $(\frac{k}{a'}, a')$ constitue un encadrement plus fin :

$$\frac{k}{a} < \frac{k}{a'} < \sqrt{k} < a' < a.$$

Il en est bien sûr de même pour les étapes suivantes a'', a''', etc. Il y a même plus. Comme a' est la moyenne arithmétique de $\frac{k}{a}$ et a, ce point est situé précisément au milieu de l'intervalle séparant ces deux points. La valeur recherchée, $\sqrt{k}$, se trouve donc dans la « moitié gauche » de cet intervalle. Il en est de même pour les étapes d'approximation suivantes.

4 À la recherche d'une racine d'une équation algébrique : la méthode de Newton-Raphson

Si $\sqrt{k}$ s'interprète géométriquement comme le côté du carré d'aire k, algébriquement il s'agit d'une solution de l'équation $x^2 - k = 0$. Ce passage à un cadre où on s'intéresse aux racines d'un polynôme permet de mettre en jeu une méthode générale de recherche des « zéros » d'une fonction f — c'est-à-dire des valeurs de la variable x qui sont racines de l'équation $f(x) = 0$. Le lecteur ayant conservé un certain souvenir de son premier cours de calcul différentiel — la présente vision relève donc à la fois de l'algèbre et de l'analyse — aura reconnu ici le contexte d'application de la méthode de Newton-Raphson, un thème classique dans un tel cadre. Cette méthode a été introduite par Isaac Newton vers 1670, puis simplifiée par son compatriote Joseph Raphson en 1690 dans les formules itératives aujourd'hui usuelles. Ce n'est qu'une centaine d'années plus tard qu'on insistera sur l'aspect géométrique de la méthode — d'où l'appellation « méthode de la tangente » fréquemment utilisée —, de même que sur les considérations de convergence (voir [2, Chap. 6]).

Soit donc une fonction f « assez jolie » — dans notre cas, il suffira de supposer que f est deux fois dérivable, ce qui est évidemment le cas de la fonction $f(x) = x^2 - k$ à laquelle nous appliquerons Newton-Raphson. On supposera de plus qu'on a repéré un certain intervalle où se situe une racine de l'équation $f(x) = 0$, par exemple en étudiant la variation du signe de la fonction f. La méthode de Newton-Raphson consiste à se donner une valeur arbitraire a située « près de » la racine recherchée, pour ensuite prendre comme approximation de cette racine le point d'intersection a' avec l'axe des x de la *tangente à la courbe* au point $f(a)$.

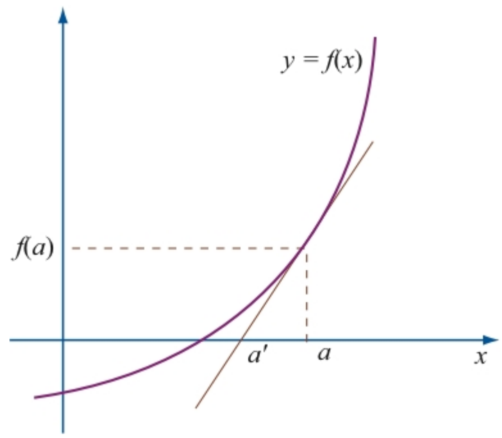


Figure 6

La pente de cette tangente s'exprimant, à l'aide de la fonction dérivée f', sous la forme

$$f'(a) = \frac{f(a)}{a - a'},$$

on en tire facilement la relation suivante pour a' :

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

À nouveau l'idée est de procéder par approximations successives, obtenant une suite de valeurs $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se rapprochant de plus en plus du zéro de la fonction f.

Lorsque appliquée à la fonction $f(x) = x^2 - k$, la relation caractéristique pour a' devient

$$a' = a - \frac{a^2 - k}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right),$$

où on reconnaît à la fois la formule mésopotamienne et, bien sûr, celle de Héron.

Un des intérêts de relier tant la technique mésopotamienne que celle de Héron à la méthode de Newton-Raphson est qu'on peut tirer de ce cadre des renseignements précieux sur l'efficacité de ces algorithmes. En effet, on peut démontrer assez facilement que la méthode de Newton-Raphson *converge de façon quadratique*. On signifie par là que l'erreur faite à la $(i+1)^{\text{e}}$ étape — c'est-à-dire la différence $e_{i+1} = x_{i+1} - \bar{x}$ entre le $(i+1)^{\text{e}}$ approximant x_{i+1} et $\bar{x}$, le zéro de f — s'exprime en fonction du carré de l'erreur e_i de l'étape précédente. (Ce dernier résultat fait l'objet de l'Appendice 2 de ce texte.)

C'est donc dire que si on se situe dans un « bon voisinage » de la racine recherchée, par exemple avec une erreur de l'ordre de 10^{-3}, une nouvelle application de la méthode mésopotamienne, ou de Héron, donnera une erreur d'ordre 10^{-6}, doublant par le fait même le nombre de décimales de précision. On voit ainsi que ces méthodes d'approximation de la racine carrée, malgré leur grande simplicité, sont d'une remarquable efficacité.

5 La racine carrée par un bricolage géométrique

Nous empruntons à la tradition indienne notre prochain exemple d'extraction d'une racine carrée. Les *Sulbasutras* forment une annexe à un ensemble de textes religieux (les *Védas*) et ils remontent à l'époque 800-600 avant notre ère. Le mot *sulba* signifie « corde » : on trouve dans les *Sulbasutras* des instructions pour la construction d'autels pour des rituels religieux, la corde servant à mesurer les dimensions des autels.

On propose dans les *Sulbasutras* la méthode suivante pour le calcul de $\sqrt{2}$ (vraisemblablement en rapport avec le projet de construire un autel d'aire double d'un autel donné) : « Augmente la mesure de son tiers, et ce tiers de son propre quart moins la trente-quatrième partie de ce quart. » ([11, p. 40]) On utilise donc comme approximation de $\sqrt{2}$ l'expression

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}. \tag{8}$$

Cette approximation vaut environ 1,414215686, avec exactitude sur les cinq premières décimales. Comme c'est le cas pour la méthode mésopotamienne ou celle de Héron, les auteurs des *Sulbasutras* n'ont fourni aucune indication quant au raisonnement les ayant menés à cette valeur pour $\sqrt{2}$.

Une vision possible de l'expression (8) est reprise par Joseph [8, pp. 234–236] (s'appuyant sur des travaux de B. Datta). L'argument repose sur le fait de se donner deux copies d'un carré d'aire 1 et de voir comment « réunir » ces figures de manière à former un carré d'aire 2, dont on cherchera ensuite à évaluer le côté. Bien sûr une solution générale à un tel problème d'addition d'aires est fournie par le théorème de Pythagore : le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle a justement pour aire la somme des aires des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit. Mais une telle approche, si élégante soit-elle en ce qui concerne l'idée d'additionner des aires, n'est guère utile lorsqu'on cherche à obtenir une valeur numérique du côté du carré. L'argument que l'on trouve dans [8] repose sur le « bricolage » géométrique suivant, dans lequel intervient la figure 7.

Soit donc les carrés $ABCD$ et $PQRS$, tous deux d'aire un. Nous décomposons tout d'abord l'un des deux carrés donnés en trois bandes identiques. Deux de ces bandes (régions 1 et

2) peuvent être placées sur les côtés de l'autre carré. Partageant alors la troisième bande en trois carrés, nous prenons l'un d'eux (région 3) pour le placer dans le « coin », près des régions 1 et 2. Il reste donc à placer autour du carré $ABCD$ (ainsi augmenté) les deux derniers carrés, vestiges du deuxième carré de départ. À cette fin, nous partageons chacun de ces deux « petits » carrés en quatre bandes identiques (régions 4 à 11), que nous plaçons tel qu'indiqué à la figure 7.

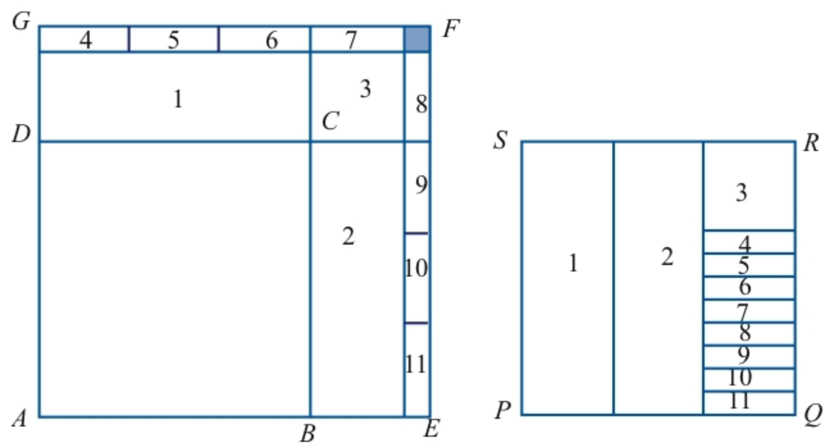


Figure 7

À ce stade, le premier carré $ABCD$ a donc été transformé en un grand carré $AEFG$ de côté

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = 1\,\frac{5}{12}. \tag{9}$$

Cependant l'aire de ce grand carré excède le double de celle de $ABCD$, puisque le petit carré tramé situé près du sommet F n'a pas été recouvert par des morceaux provenant du carré $PQRS$. Or, ce petit carré a une aire de $(\frac{1}{3\cdot 4})^2$. Il nous faut donc, pour équilibrer le tout, « répartir » ce petit carré le long des côtés du carré $AEFG$ en le retranchant.

À cette fin, imaginons que l'on enlève deux très minces bandes, chacune de largeur x, du carré $AEFG$ — par exemple on enlève une première bande à la gauche, le long de AG, et l'autre au bas, le long de AE. On suppose bien sûr que ces deux bandes totalisent une aire de $(\frac{1}{3\cdot 4})^2$, de sorte que

$$2x\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}\right) - x^2 = \left(\frac{1}{3 \cdot 4}\right)^2.$$

Négligeant le terme x^2, cette dernière équation devient après simplification

$$x \approx \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34},$$

tel que désiré.

On aura remarqué que l'analyse géométrique qui précède ne vaut que pour le cas de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire lorsqu'on cherche à doubler l'aire d'un carré.

Katz [10, p. 28] propose une autre interprétation de l'approximation (8) pour $\sqrt{2}$. Prenant comme point de départ la valeur $1\frac{5}{12}$ figurant à la ligne (9), il applique l'approximation mésopotamienne $a' = a - \frac{a^2-k}{2a}$ — voir la ligne (4) —, obtenant ainsi directement l'approximation indienne de $\sqrt{2}$:

$$\frac{17}{12} - \frac{(\frac{17}{12})^2 - 2}{2 \cdot \frac{17}{12}} = \frac{17}{12} - \frac{\frac{1}{144}}{\frac{34}{12}} = \frac{17}{12} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

À ce sujet, Neugebauer écrit d'ailleurs : « The possibility seems to me not excluded that both the main term and the subtractive correction are ultimately based on the two Babylonian approximations. » ([12, p. 35])

6 La racine carrée « chiffre à chiffre » : visions géométrique et algébrique de l'algorithme usuel

Le prochain exemple de méthode d'extraction de racine carrée nous amène du côté de la Chine ancienne. Le livre *Les Neuf chapitres sur les procédures mathématiques* (en chinois, *Jiuzhang suanshu* — voir [3], [9]) figure parmi les principaux textes de mathématiques de l'Antiquité chinoise. Cet ouvrage, qui remonte à l'époque de la dynastie Han (–206 à 220), fut composé aux environs des débuts de l'ère commune et consiste en un recueil de connaissances mathématiques développées au cours du millénaire précédent. Le contenu mathématique des *Neuf chapitres* est présenté de façon sommaire et sans justifications, sous forme de problèmes avec réponses et de procédures pour trouver ces réponses. Cependant cet ouvrage, l'un des « classiques » de la Chine ancienne, a fait l'objet au cours des siècles de commentaires expliquant et justifiant ces algorithmes. Particulièrement intéressants pour notre propos sont les commentaires de Liu Hui (263), qui donnent une interprétation géométrique fort limpide de la méthode proposée dans les *Neuf chapitres* pour l'extraction de racine carrée.

6.1 Une vision géométrique

Nous voulons maintenant illustrer le fonctionnement de l'algorithme chinois pour la racine carrée et en fournir une motivation géométrique basée sur les commentaires de Liu Hui. À cette fin, nous utilisons comme cas-type le calcul de $\sqrt{55\,225}$, qui est l'un des exemples numériques traités dans *Les Neuf chapitres* (problème 12 du Chapitre 4). Le fait que ce nombre soit un carré parfait n'enlève rien à la généralité du propos, l'algorithme livrant un à un les chiffres de la racine carrée, quelle que soit leur valeur positionnelle. La discussion qui suit pourrait donc facilement être transposée au cas d'une racine carrée non entière. Cette constatation se retrouve d'ailleurs dans les commentaires de Liu Hui, qui parle explicitement de la poursuite de l'extraction de racine au-delà de l'unité, « dans la partie décimale » ([3, p. 365]) : Liu Hui mentionne que les chiffres successivement obtenus sont alors pris comme numérateurs, tandis qu'interviennent comme dénominateurs 10, 100, ... Et il exprime clairement le fait que plus on calcule de chiffres décimaux, plus les fractions correspondantes sont « fines », de sorte que bien que le carré de départ n'ait pas été complètement épuisé, la partie (« surface ») négligée devient si petite qu'« il ne vaut pas la peine d'en parler. » ([3, p. 365])

Sans surprise, Liu Hui voit le calcul d'une racine carrée comme la recherche du côté d'un carré d'aire donnée. Cependant, au lieu de procéder à une décomposition du carré « à la Mésopotamienne », il en fait une dissection qui colle de très près à la numération de base dix. Soulignons simplement, à propos de la numération chinoise, que les Chinois utilisaient entre autres un système décimal positionnel assez près du nôtre, le système des baguettes à calculer.

La figure 8, tirée des commentaires de Liu Hui (voir [3, pp. 323 et 801] et [9, p. 207]), sert de support aux arguments géométriques qui sous-tendent la procédure des *Neuf chapitres* pour l'extraction de racine carrée. La figure doit se lire étape par étape, tandis que l'on cherche à « épuiser » le carré d'aire donnée par des carrés de plus en plus grands — Liu Hui utilise même de la couleur pour illustrer ses propos, là où nous mettons une trame. (Cette figure n'est bien sûr pas à l'échelle.)

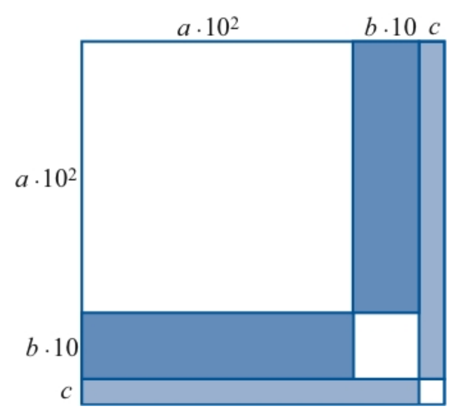


Figure 8

Il faut tout d'abord observer que $\sqrt{55\,225}$ est un nombre dont l'écriture décimale contient trois chiffres : ce fait découle facilement de l'examen du nombre de chiffres des premières puissances de 10. En base 10, le nombre $\sqrt{55\,225}$ est donc de la forme abc (ou si on préfère, $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$). Nous évaluons maintenant un à un chacun des chiffres a, b et c, dans l'ordre. Pour la clarté de la discussion, nous reproduisons la figure 8 à chaque étape du calcul, en insistant sur les éléments pertinents à cette étape. Il va de soi cependant que tout le raisonnement peut se faire sur la seule figure 8.

Étape I : Le chiffre des centaines

On cherche tout d'abord la valeur du chiffre des centaines, a, qui soit maximale de sorte qu'un carré de côté $a \cdot 10^2$ soit compris dans le carré d'aire 55 225, c'est-à-dire

$$(a \cdot 10^2)^2 \leq 55\,225. \tag{10}$$

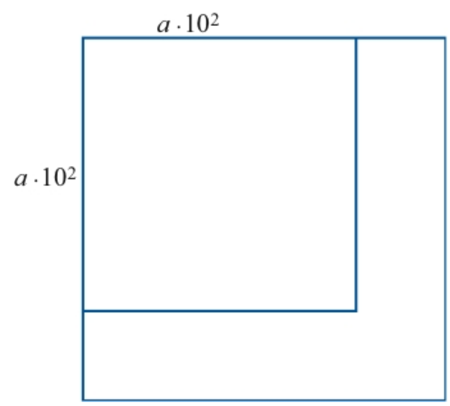


Figure 9

Il en résulte que $a = 2$. Observons alors le gnomon autour de ce carré de côté 200 ; il a pour aire $55\,225 - 200^2 = 15\,225$.

Étape II : Le chiffre des dizaines

Dans un deuxième temps, on cherche cette fois la valeur du chiffre des dizaines, b, qui soit maximale de sorte que deux rectangles de côtés 200 et $b \cdot 10$ plus un carré de côté $b \cdot 10$ soient compris dans le gnomon d'aire 15 225, c'est-à-dire

$$2 \cdot 200 \cdot b \cdot 10 + (b \cdot 10)^2 \leq 15\,225. \tag{11}$$

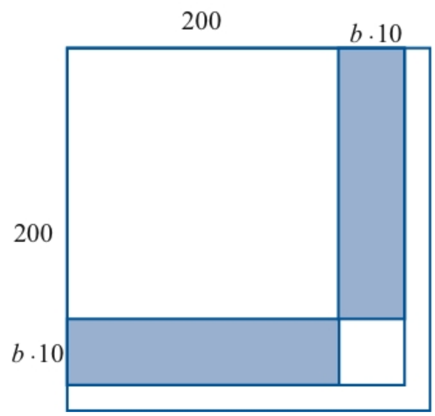


Figure 10

Comme $2 \cdot 200 \cdot 3 \cdot 10 + (3 \cdot 10)^2 = 12\,900$ et $2 \cdot 200 \cdot 4 \cdot 10 + (4 \cdot 10)^2 = 17\,600$, on en conclut que $b = 3$. On se retrouve alors avec un carré de côté 230, entouré d'un gnomon d'aire $55\,225 - 230^2 = 2\,325$.

Étape III : Le chiffre des unités

On cherche maintenant la valeur du chiffre des unités, c, qui soit maximale de sorte que deux rectangles de côtés 230 et c plus un carré de côté c soient compris dans le gnomon d'aire 2 325, c'est-à-dire

$$2 \cdot 230 \cdot c + c^2 \leq 2\,325. \tag{12}$$

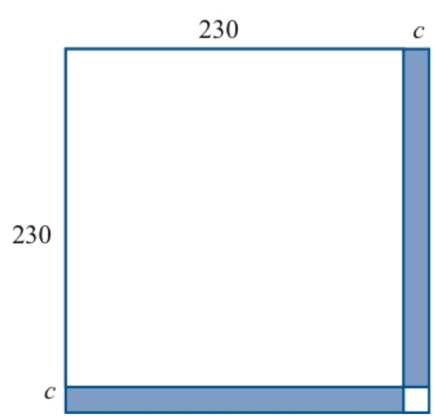


Figure 11

On en tire finalement que $c = 5$ — avec égalité à la ligne (12) —, de sorte que $\sqrt{55\,225} = 235$.

Insistons sur le fait que, contrairement aux méthodes vues dans les sections précédentes, la procédure des *Neuf chapitres* livre un à un les chiffres de la racine carrée recherchée, chaque étape de calcul founissant une nouvelle position décimale (par ordre de grandeur décroissant). C'est ainsi que dans le calcul de $\sqrt{55\,225}$, on a successivement obtenu les valeurs 200, 230 et 235. Dans le cas des algorithmes précédents, chaque étape permet en général d'obtenir plusieurs chiffres de la racine — n'oublions pas que ces méthodes sont toutes englobées dans l'algorithme de Newton-Raphson, qui converge quadratiquement.

6.2 Lien de l'algorithme chinois avec l'algorithme usuel

Il y a tout juste quelques décennies, on enseignait encore à l'école primaire une méthode de calcul de la racine carrée. Cet algorithme était bien sûr introduit comme une série de règles à appliquer plus ou moins aveuglément, sans justification aucune. Nous aimerions montrer brièvement ici que ce « truc de calcul » n'est en fait qu'une disposition commode des manipulations numériques que l'on exécute en utilisant la méthode chinoise. Notons à cet égard que *Les Neuf chapitres* proposent une certaine disposition sous forme de tableau des nombres intervenant dans un tel calcul — il est alors question de représentation de nombres à l'aide de « baguettes à calculer » (voir [3, p. 324] et [9, p. 207]). Mais l'assemblage de nombres qui en résulte diffère de ce qui suit.

Étape 0′ : Le nombre de chiffres de la racine carrée

On commence par diviser le nombre dont on extrait la racine carrée par tranches de deux chiffres en allant vers la gauche à partir de la virgule décimale. (S'il y a une partie décimale, on fait de même pour les décimales, en allant vers la droite à partir de la virgule.)

$$\begin{array}{r|l} 5\ \ 52\ \ 25 & \underline{\qquad} \\ & \\ & \end{array}$$

La racine carrée de 55 225 est donc composée de trois chiffres (dans sa partie entière.)

Étape I′ : Le chiffre des centaines

On cherche le chiffre a maximal tel que $a^2 \leq 5$. On a donc $a = 2$, et on élève au carré : $2 \times 2 = 4$, que l'on soustrait de 5, reste 1.

$$\begin{array}{l|l}
5\ \ 52\ \ 25 & \underline{2\qquad\ } \\
\underline{4} & 2 \times 2 \\
1 &
\end{array}$$

Étape II′ : Le chiffre des dizaines

On abaisse la tranche suivante, 52. Puis on biffe le produit 2×2 (qui ne servira plus), et on double le 2 pour obtenir 4.

$$\begin{array}{l|l}
5\ \ \cancel{52}\ \ 25 & \underline{2\qquad\ } \\
\underline{4} & \cancel{2 \times 2} \\
1\ \ 52 & 4
\end{array}$$

On cherche alors le chiffre b maximal tel que le nombre qui s'écrit « $4b$ », lorsque multiplié par b, entre dans 152. Autrement dit, on veut que $(2 \cdot 20 + b) \cdot b \leq 152$. On trouve $b = 3$. Et on calcule : $43 \times 3 = 129$, que l'on soustrait de 152, reste 23.

$$\begin{array}{l|l}
5\ \ \cancel{52}\ \ 25 & \underline{23\qquad\ } \\
\underline{4} & \cancel{2 \times 2} \\
1\ \ 52 & 43 \times 3 \\
\underline{1\ \ 29} & \\
\ \ \ 23 &
\end{array}$$

Étape III′ : Le chiffre des unités

On abaisse la tranche suivante, 25. Puis on biffe le produit 43×3, et on double 23, obtenant 46.

$$\begin{array}{l|l}
5\ \ \cancel{52}\ \ \cancel{25} & \underline{23\qquad\ } \\
\underline{4} & \cancel{2 \times 2} \\
1\ \ 52 & \cancel{43 \times 3} \\
\underline{1\ \ 29} & 46 \\
\ \ \ 23\ \ 25 &
\end{array}$$

On cherche alors le chiffre c maximal tel que le nombre qui s'écrit « $46c$ », lorsque multiplié par c, entre dans 2 325. Autrement dit, on veut que $(2 \cdot 230 + c) \cdot c \leq 2\,325$. On trouve $c = 5$. Et on calcule : $465 \times 5 = 2\,325$, de sorte qu'il y a un reste de 0 et que la racine carrée est maintenant sous nos yeux, au haut et à la droite de la grille de calcul : $\sqrt{55\,225} = 235$.

$$
\begin{array}{l|l}
5\ \cancel{52}\ \cancel{25} & \underline{235\qquad} \\
\underline{4} & \cancel{2 \times 2} \\
1\ 52 & \cancel{43 \times 3} \\
\underline{1\ 29} & 465 \times 5 \\
\ 23\ 25 & \\
\ \underline{23\ 25} & \\
\ \ 0 &
\end{array}
$$

Le « mystère » entourant les étapes du type « *on double le nombre apparaissant à la ligne du haut, dans la partie droite du tableau de calcul* » s'évanouit complètement lorsqu'on songe au lien avec la décomposition géométrique du carré initial en rectangles et carrés de différentes tailles, telle que proposée par Liu Hui. Les diverses manipulations effectuées lors de l'application de l'algorithme « chiffre à chiffre » deviennent d'ailleurs plus limpides si on prend la peine d'inscrire les zéros requis pour combler toutes les positions décimales au cours du calcul. (On peut aussi en profiter pour aligner les calculs intermédiaires correspondant aux inégalités (10), (11) et (12) avec les produits qui en résultent.)

$$
\begin{array}{r|l}
5\ \cancel{52}\ \cancel{25} & \underline{235\qquad} \\
\underline{4\ 00\ 00} & \cancel{200 \times 200} \\
1\ 52\ 25 & \\
\underline{1\ 29\ 00} & \cancel{430 \times 30} \\
23\ 25 & \\
\underline{23\ 25} & 465 \times 5 \\
0 &
\end{array}
$$

6.3 Une vision algébrique de l'algorithme usuel

Algébriquement parlant, l'algorithme usuel dont il a été question à la section précédente peut se voir comme l'utilisation à répétition de l'identité fondamentale

$$(u+v)^2 = u^2 + (2uv + v^2) \tag{13}$$

(le même lien peut bien sûr être fait avec la procédure géométrique de Liu Hui). Nous indiquons sommairement ici comment cette identité intervient dans les calculs en cause.

Étape I″ : Le chiffre des centaines

Pour trouver le chiffres des centaines a, on utilise l'inégalité (10), $(a \cdot 10^2)^2 \leq 55\,225$, dont l'interprétation est la même dans un contexte algébrique.

Étape II$''$: Le chiffre des dizaines

Soit maintenant le chiffre des dizaines b. Dans ce cas, l'identité fondamentale (13) devient

$$(200 + b \cdot 10)^2 = 200^2 + (2 \cdot 200 \cdot b \cdot 10 + (b \cdot 10)^2).$$

Or, les deux derniers termes que l'on retrouve à la droite de cette égalité constituent le membre de gauche de l'inégalité (11) et ils peuvent se récrire comme $(2 \cdot 200 + b \cdot 10) \cdot b \cdot 10$. On cherche donc le b maximal tel que

$$(2 \cdot 200 + b \cdot 10) \cdot b \cdot 10 \leq 15\,225.$$

On obtient $b = 3$, de sorte que l'inégalité précédente devient $430 \times 30 = 12\,900 \leq 15\,225$, ce qui, à la section 6.2, correspond à la deuxième partie de l'étape II$'$.

Lorsqu'exprimée en termes généraux, conservant le symbole a pour le chiffre des centaines, cette étape concerne donc l'expression $(2 \cdot a \cdot 10^2 + b \cdot 10) \cdot b \cdot 10$, qui se repère facilement dans les manipulations de la section 6.2.

Étape III$''$: Le chiffre des unités

Dans le cas du chiffre des unités c, l'identité fondamentale (13) devient maintenant

$$(230 + c)^2 = 230^2 + (2 \cdot 230 \cdot c + c^2).$$

Encore une fois, les deux derniers termes à la droite de l'égalité renvoient à une inégalité de la section 6.1, à savoir l'inégalité (12). En récrivant ces termes sous la forme $(2 \cdot 230 + c) \cdot c$, on retrouve ainsi le calcul de la dernière partie de l'étape III$'$, à la section 6.2.

Dans le cas général, l'interprétation algébrique de cette étape porte sur l'expression

$$2 \cdot (a \cdot 10^2 + b \cdot 10) \cdot c + c^2 = (2 \cdot (a \cdot 10^2 + b \cdot 10) + c) \cdot c,$$

qui intervient dans les calculs de la section 6.2.

Le lecteur intéressé trouvera dans [17] une autre analyse algébrique de l'algorithme usuel.

7 Quelques autres avenues

Le présent texte ne vise aucunement à l'exhaustivité en ce qui concerne le développement, au fil des âges, de techniques d'extraction de racine carrée. D'autres contributions auraient mérité d'être présentées, et nous nous bornons à en souligner trois au passage.

1. Vers l'an 370 de notre ère, Théon d'Alexandrie utilise comme support géométrique à ses calculs la dissection canonique du carré de côté $a + b$ en deux carrés et deux rectangles — décomposition pour laquelle il renvoie à la proposition II.4 des *Éléments* d'Euclide. Théon est alors en train de commenter l'*Almageste* de Ptolémée et il veut expliquer comment calculer $\sqrt{4500}$, dont ce dernier a donné la valeur sans explication. La figure qui accompagne le raisonnement de Théon (voir [14, p. 471]) est en tous points identique à celle de Liu Hui (figure 8), et l'algorithme qui en résulte est très près de l'algorithme « chiffre à chiffre » dont il a été question plus haut. La traduction du texte de Théon se trouve dans [2, pp. 233–234].

2. Cet algorithme « chiffre à chiffre » est présent dans de nombreux ouvrages de calcul au Moyen Âge. Un exemple en est donné par le mathématicien marocain Ibn al-Banna (XIII[e] siècle) qui, en s'appuyant sur la numération positionnelle, a fourni une description de la procédure à suivre dans l'extraction d'une racine carrée (voir [2, pp. 235–237]).

3. On retrouve dans l'Antiquité grecque une méthode tout autre de calcul de $\sqrt{2}$. Elle repose sur le constat, connu des Pythagoriciens, que le carré construit sur la diagonale d'un carré donné a une aire double de celle du carré de départ. Cependant l'irrationalité du rapport entre la diagonale et le côté du carré aurait amené les Pythagoriciens à introduire la procédure dite des *nombres latéraux et diagonaux* afin d'obtenir des valeurs approximatives de ce rapport (c'est-à-dire, en langage moderne, du nombre $\sqrt{2}$). La procédure en cause peut être vue comme consistant à travailler avec des rapports rationnels successifs, mais tels que le carré de l'un des membres d'un rapport donné ne diffère que d'une unité du double du carré de l'autre membre.

   Dans un ouvrage intitulé *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon* ([15]), le philosophe Théon de Smyrne (II[e] siècle de notre ère) introduit deux suites de nombres entiers satisfaisant justement une relation de ce type. Plus précisément, posant $c_1 = d_1 = 1$, il définit deux suites $\{c_n\}$ et $\{d_n\}$ par les égalités

   $$c_{n+1} = c_n + d_n \qquad \text{et} \qquad d_{n+1} = 2c_n + d_n.$$

   On obtient ainsi $c_2 = 2, d_2 = 3, c_3 = 5, d_3 = 7, c_4 = 12, d_4 = 17,$ etc. Théon mentionne que le carré de chaque nombre « diagonal » d_n diffère d'une unité du double du carré du nombre « latéral » correspondant c_n, ces différences prenant alternativement les valeurs -1 et $+1$. On a en effet la relation

   $$d_n^2 = 2c_n^2 + (-1)^n, \tag{14}$$

qui se vérifie aisément en notations modernes : puisque

$$\begin{aligned} d_n^2 - 2c_n^2 &= (2c_{n-1} + d_{n-1})^2 - 2(c_{n-1} + d_{n-1})^2 \\ &= 2c_{n-1}^2 - d_{n-1}^2 \\ &= -(d_{n-1}^2 - 2c_{n-1}^2), \end{aligned}$$

chaque passage d'une étape à l'autre ne fait donc qu'introduire un changement de signe, ce qui donne le résultat désiré lorsqu'on observe que $d_1^2 - 2c_1^2 = -1$.

D'un point de vue géométrique, les nombres latéraux et diagonaux peuvent s'interpréter comme suit. Partant d'un losange de côtés 1 et dont l'une des diagonales est elle aussi de longueur 1 — on a en effet $c_1 = d_1 = 1$ —, c'est-à-dire un losange dont les angles valent 60° et 120°, chaque étape d'itération consiste alors à remplacer ce losange par un autre plus grand et dont la forme se rapproche de plus en plus de celle d'un carré. Les rapports $\frac{d_n}{c_n}$, qui prennent comme valeurs successives $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, etc., tendent donc vers $\sqrt{2}$, alternativement par défaut et par excès, comme le montre d'ailleurs l'égalité (14) lorsque récrite sous la forme

$$\frac{d_n^2}{c_n^2} = 2 + \frac{(-1)^n}{c_n^2}. \tag{15}$$

En d'autres termes, si c_n est vu comme le côté d'un carré, alors d_n donne une approximation de sa diagonale. Notons que plus les d_n et c_n sont grands, meilleure est l'approximation — cette observation résulte immédiatement de l'égalité (15), ou encore peut être vue comme liée au fait que la différence entre d_n^2 et $2c_n^2$ n'est toujours que de 1.

Le commentateur Proclus (V^e^ siècle) indique que la procédure des nombres latéraux et diagonaux, qu'il associe explicitement aux Pythagoriciens, peut se voir géométriquement comme résultant de la proposition II.10 des *Éléments* d'Euclide (proposition de ce fait connue bien avant l'époque d'Euclide lui-même), dont une interprétation algébrique réside dans l'identité

$$(2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = 2x^2 - y^2$$

(voir [16, pp. 138–139]).

L'égalité (14) — avec n pair — est un cas particulier de l'*équation de Pell-Fermat*. Plus généralement, soit l'équation $x^2 - my^2 = 1$, où m un entier positif non carré. Cette expression peut se récrire sous la forme

$$\frac{x^2}{y^2} = m + \frac{1}{y^2}\,,$$

de sorte que lorsque y est « grand », la fraction $\frac{x}{y}$ donne une bonne approximation rationnelle de $\sqrt{m}$.

8 Conclusion

Lorsqu'il est question d'une racine carrée, c'est bien sûr d'abord et avant tout la relation

$$p = \sqrt{q} \quad \Longleftrightarrow \quad p^2 = q$$

qui est en cause. Davantage qu'une technique de calcul, c'est elle qui fait vraiment foi de l'essence même d'une racine carrée. De là, des techniques d'approximation numérique peuvent être mises en place. Si on dispose par exemple d'une calculatrice ayant une touche $\times$ (mais pas de touche $\sqrt{\cdot}$), la suite de calculs suivants permet d'aller chercher les trois premières décimales de $\sqrt{2}$. L'idée est alors de prendre 2 « en sandwich » entre deux carrés de manière de plus en plus fine, en augmentant d'une décimale la précision à chaque étape du calcul.

$$\begin{array}{rcccl} 1^2 & < & 2 & < & 2^2\,, \\ 1{,}4^2 & < & 2 & < & 1{,}5^2\,, \\ 1{,}41^2 & < & 2 & < & 1{,}42^2\,, \\ 1{,}414^2 & < & 2 & < & 1{,}415^2\,. \end{array}$$

Si élémentaire soit-il, cet algorithme « chiffre à chiffre » n'en demeure pas moins fondamental.

Les différentes méthodes présentées dans ce texte viennent apporter un éclairage différent sur l'extraction de racine carrée. Nous avons voulu de façon particulière mettre l'accent sur des méthodes reposant sur une interprétation géométrique, vision qui, nous semble-t-il, est trop souvent absente de l'enseignement usuel.

Plusieurs de ces méthodes sont d'une remarquable efficacité — pensons à la convergence quadratique de la méthode de Newton-Raphson, qui chapeaute plusieurs des algorithmes étudiés ici. Il pourrait être intéressant, lorsqu'on travaille avec des élèves de fin secondaire participant à des programmes où l'informatique a la part belle, de les amener à programmer Newton-Raphson et de leur permettre d'observer *de visu* la rapidité de convergence.

Cela pourrait même être l'occasion de réfléchir à ce qui se passe « dans le ventre » de la calculatrice, lorsqu'on appuie sur la touche $\sqrt{\cdot}$. Il y a peut-être du Newton-Raphson là-dessous... ou quelque chose du genre !

Appendice 1 : L'inégalité MG–MA

Nous voulons établir l'*inégalité moyenne géométrique – moyenne arithmétique* :

$$\sqrt{u \cdot v} \leq \frac{1}{2}(u+v),$$

où u et v sont deux réels positifs (ou nuls), avec égalité lorsque $u = v$. Le résultat est clair si l'un de ces nombres est nul.

Preuve géométrique

Soit un demi-cercle de diamètre $u + v$; la perpendiculaire élevée au point de rencontre des deux segments (de longueur respective u et v) est de longueur $\sqrt{u \cdot v}$. Et celle-ci est clairement bornée par le rayon du demi-cercle, qui est de longueur $\frac{1}{2}(u + v)$. Le cas limite $u = v$ correspond au fait que la perpendiculaire et le rayon coïncident.

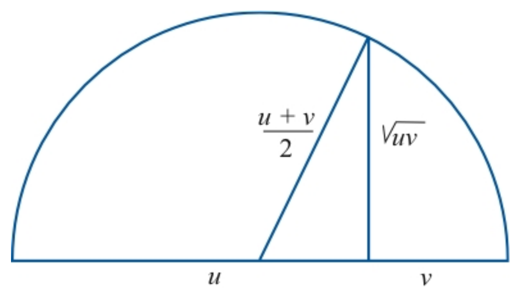


Figure 12

Preuve algébrique

L'idée est de faire appel à une équation algébrique bien choisie d'où découlera l'inégalité MG–MA. Voici deux exemples de telles équations — qui ne sont de fait qu'une variante l'une de l'autre.

- Observons que
$$(u + v)^2 = 4uv + (u - v)^2. \tag{16}$$
Il suit alors que
$$(u + v)^2 \geq 4uv,$$
d'où, en prenant la racine carrée,
$$u + v \geq 2\sqrt{uv},$$
avec égalité lorsque $u = v$ (puisqu'on a alors $(u - v)^2 = 0$).
- Puisque $(x - y)^2 \geq 0$, on a
$$x^2 + y^2 \geq 2xy, \tag{17}$$
avec égalité lorsque $x = y$. Le résultat suit en posant $x^2 = u$ et $y^2 = v$.

Remarque

Autant que je sache, l'inégalité MG–MA n'a pas été formulée de manière explicite dans la littérature de l'Antiquité — ce n'était vraisemblablement pas dans l'« esprit » de l'époque, pourrait-on dire. Néanmoins elle se retrouve en filigrane de divers textes. Ainsi, Heath ([5, II, pp. 185–186]) fait observer que la proposition V.25 des *Éléments* d'Euclide mène comme cas particulier à l'inégalité MG–MA. Cette proposition s'interprète en effet comme suit, algébriquement parlant : si les quantités a, b, c et d satisfont les proportions

$$a : b = c : d$$

(avec a la plus grande quantité et d la plus petite), alors

$$a + d > b + c.$$

Dans le cas où $b = c$, alors b est la moyenne géométrique de a et d, et la proposition V.25 affirme que celle-ci est bornée par la moyenne arithmétique de ces deux mêmes nombres.

De plus, la figure 12 qui accompagne la preuve géométrique précédente se retrouve telle quelle à la section 11 du Livre III de la *Collection mathématique* ([13, pp. 50–51]) de Pappus d'Alexandrie (IV$^{\text{e}}$ siècle). Pappus s'intéresse alors au problème de la représentation dans un demi-cercle des moyennes arithmétique et géométrique (de même que de la moyenne harmonique).

Notons enfin que l'identité (16) est connue depuis fort longtemps et correspond à la proposition II.5 des *Éléments* d'Euclide qui, vue en tant que résultat d'« algèbre géométrique », peut s'interpréter directement comme

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = uv + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2.$$

L'identité (16) est susceptible d'une preuve visuelle, tout comme l'inégalité (17) — voir figure 13.

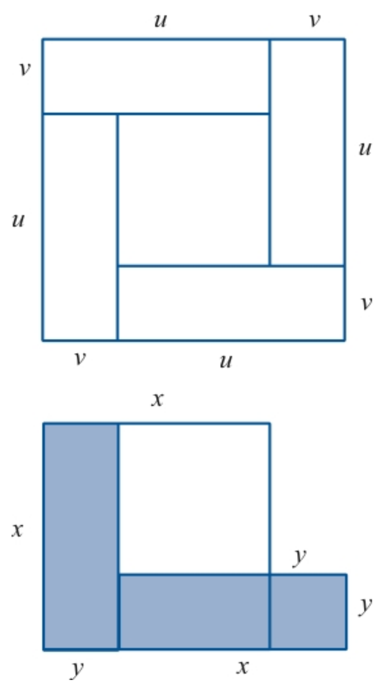


Figure 13

Appendice 2 : La convergence quadratique de la méthode de Newton-Raphson

Rappel : Les développements de Taylor

Étant donné une fonction f — pour les fins de la discussion, nous considérons une fonction d'une variable —, une idée de base en analyse est d'utiliser des fonctions simples, habituellement des polynômes, afin d'approximer f. Par exemple, on pourra chercher un polynôme P coïncidant avec f et certaines de ses dérivées en un point donné — il ne s'agit évidemment pas là de la seule manière de déterminer un polynôme d'approximation, mais cela en est une de grande importance, tant sur les plans théorique et historique que pratique.

On vérifie sans trop de peine (voir votre cours de calcul différentiel préféré) que si f est une fonction possédant une dérivée d'ordre n en un point a, il existe un et un seul polynôme P de degré $\leq n$ satisfaisant les $n+1$ conditions

$$P(a) = f(a), \qquad P'(a) = f'(a), \qquad P''(a) = f''(a), \qquad \ldots, \qquad P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a),$$

où $P^{(j)}$ et $f^{(j)}$ désignent la j^{e} dérivée de P et de f, respectivement. Si on écrit ce polynôme sous la forme générale

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n,$$

alors chaque coefficient a_j satisfait l'égalité

$$a_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}.$$

On obtient ainsi le *polynôme de Taylor de degré n au point a* pour la fonction f :

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

La fonction f peut en conséquence être représentée sous la forme d'un *développement de Taylor*,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + E_{n,a}(x),$$

le dernier terme donnant l'erreur introduite dans l'approximation de f par le polynôme $P_{n,a}$.[5]

Application à la méthode de Newton-Raphson[6]

Nous utilisons maintenant la notion de développement de Taylor afin de jauger l'efficacité de la méthode de Newton-Raphson dans la recherche des zéros d'une fonction.

Soit donc une fonction f possédant dans un certain intervalle un zéro $\bar{x}$ (on a donc par hypothèse $f(\bar{x}) = 0$), et introduisons la fonction auxiliaire

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

témoignant du processus itératif de calcul des racines de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton-Raphson. Effectuant le développement de Taylor de degré 2 de g autour du point $\bar{x}$, on obtient[7]

$$g(x) = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{g''(\bar{x})}{2!}(x-\bar{x})^2 + E_{2,\bar{x}}(x).$$

[5] Par exemple, si on suppose de plus que la dérivée $f^{(n+1)}$ existe, la version dite *de Lagrange* de l'erreur d'approximation est de la forme $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, avec c entre a et x.

[6] Je remercie mon collègue Jean-Jacques Gervais d'avoir porté à mon attention cette preuve de la convergence quadratique de la méthode de Newton-Raphson.

[7] Nous avons besoin à cette fin que la fonction g soit deux fois dérivable sur l'intervalle en cause, ce qui entraîne des conditions analogues pour f. Dans le cas qui nous intéresse pour le calcul de la racine carrée $\sqrt{k}$, à savoir la fonction f de la forme $f(x) = x^2 - k$, ces conditions ne posent évidemment aucun problème.

Puisque par hypothèse $f(\bar{x}) = 0$, on a donc $g(\bar{x}) = \bar{x}$ (on suppose ici que $f'(\bar{x}) \neq 0$, ce qui revient à éliminer les racines doubles de l'équation $f(x) = 0$). De plus, on vérifie sans trop de peine que $g'(\bar{x}) = 0$. En effet, un simple exercice de dérivation donne

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

de sorte que

$$g'(\bar{x}) = 1 - \frac{[f'(\bar{x})]^2 - 0}{[f'(\bar{x})]^2} = 0.$$

Il s'ensuit donc que

$$g(x) = \bar{x} + \frac{g''(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2 + E_{2,\bar{x}}(x),$$

c'est-à-dire

$$g(x) - \bar{x} \approx \frac{g''(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2. \qquad (*)$$

Posant maintenant $x = x_i$, le i^{e} itéré dans l'application de la méthode de Newton-Raphson, on a donc $g(x_i) = x_{i+1}$, de sorte que la ligne $(*)$ devient

$$x_{i+1} - \bar{x} \approx \frac{g''(\bar{x})}{2!}(x_i - \bar{x})^2. \qquad (**)$$

Or les expressions $x_{i+1} - \bar{x}$ et $x_i - \bar{x}$ (notons-les respectivement e_{i+1} et e_i) représentent les erreurs d'approximation à la $(i+1)^{\text{e}}$ et à la i^{e} étape. De plus le facteur $\frac{g''(\bar{x})}{2!}$ est une constante. La ligne $(**)$ est donc de la forme

$$e_{i+1} \approx cte \cdot e_i^2,$$

ce qui exprime le fait qu'à chaque itération, l'erreur d'approximation change selon une puissance 2. On dit alors que le processus de Newton-Raphson est de *convergence quadratique*, ou de *convergence d'ordre 2*. Cela signifie *grosso modo* que le nombre de décimales de précision double à chaque étape d'itération. Ainsi, si l'erreur e_i est de l'ordre de 10^{-4}, e_{i+1} sera d'ordre 10^{-8}. Newton-Raphson est donc une méthode puissamment efficace !

Références

[1] Marco Bélanger, Margot de Serres, François Laviolette, Anne-Marie Lorrain et Vincent Papillon, *Analyse et calcul.* (3e édition) Modulo Éditeur, 1994.

[2] Jean-Luc Chabert *et al.*, *Histoire d'algorithmes : Du caillou à la puce.* Belin, 1994.

[3] Karine Chemla et Guo Shuchun, *Les Neuf chapitres : Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires.* Dunod, 2004.

[4] René Descartes, *La Géométrie.* (1637) Version en français moderne parue dans : Auguste Comte, *La géométrie analytique.* Paris, Louis Bahl, 1894.

[5] Euclide, *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* (Traduction et commentaires de Thomas Heath.) (2^e édition) Tomes I, II et III. Dover, 1956. (Réimpression de la version de 1926)

[6] Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics.* Volume I : *From Thales to Euclid.* Volume II : *From Aristarchus to Diophantus.* Dover, 1981. (Réimpression de la version de 1921)

[7] Héron d'Alexandrie, *Les Métriques.* In : *Heronis Alexandrini Opera quæ sunt omnia*, vol. III (texte grec et traduction allemande par Hermann Schöne). B.G. Teubner, 1903. (Réimpression 1976)

[8] George Gheverghese Joseph, *The Crest of the Peacock : Non-European Roots of Mathematics.* Penguin Books, 1992.

[9] Shen Kangshen, John N. Crossley et Anthony W.-C. Lun, *The Nine Chapters on the Mathematical Art : Companion and Commentary.* Oxford University Press, 1999.

[10] Victor J. Katz, *A History of Mathematics : An Introduction.* (2^e édition) Addison-Wesley, 1998.

[11] Richard Mankiewicz, *L'histoire des mathématiques.* Seuil, 2001.

[12] Otto Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity.* (2^e édition) Dover, 1969. (Réimpression de la version de 1957)

[13] Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique.* Tome premier. (Traduction et commentaires par Paul Ver Eecke.) Desclée De Brouwer, 1933.

[14] Théon d'Alexandrie, *Commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste.* In : A. Rome, dir., *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste.* Tome II. Biblioteca Apostolica Vaticana, 1936.

[15] Théon de Smyrne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon.* (Traduction et commentaires par J. Dupuis.) Hachette, 1892.

[16] Ivor Thomas, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics.* Volume I : *From Thales to Euclid*. Harvard University Press, 2002. (Révision de la version de 1939)

[17] Jean M. Turgeon, « Racines carrées, racines cubiques. » Bulletin AMQ, vol. 46, no 1, mars 2006, pp. 27–40.

Association Mathématique du Québec

Mathématiques et civilisation

André Ross
Cégep de Lévis-Lauzon

Les observations de Tycho Brahe

Les premiers astronomes ont eu recours à la sphère comme représentation de l'Univers et au cercle pour expliquer les déplacements du Soleil et de la Lune. L'idéal de perfection attribué au monde céleste par Aristote l'avait amené à postuler que tous les mouvements du monde supralunaire étaient des mouvements circulaires à vitesse constante. En introduisant les notions d'épicycle, de déférent et de point équant, Eudoxe et Ptolémée avaient tenté d'expliquer les mouvements erratiques des planètes en acceptant ce postulat.

Dès le Moyen Âge, l'immobilité de la Terre avait été discutée par Jean Buridan et Nicole Oresme dans le but de critiquer les arguments des tenants du mouvement diurne (rotation) de la Terre. Ces discussions, quoique prenant en considération quelques arguments de nature scientifique (la flèche), sont surtout des discussions à caractère philosophique et théologique. En faisant paraître son *De Revolutionibus orbium cœlestium*, publié à Nuremberg en 1543, Copernic amène les discussions dans le domaine des sciences. Pour expliquer l'ensemble des phénomènes observés, il a, dans sa théorie, doté la Terre de trois mouvements :

- le mouvement diurne, soit la rotation de la Terre sur elle-même, qui explique l'alternance du jour et de la nuit ;
- le mouvement annuel, soit l'orbite autour du Soleil, qui explique l'alternance des saisons ;
- le mouvement conique de l'axe de la Terre qui visait à compenser le mouvement orbital de l'axe terrestre.

La théorie copernicienne n'a pas été adoptée d'emblée par les scientifiques de l'époque. D'autres modèles vont être proposés dont celui de Tycho Brahe, mais la contribution majeure de celui-ci fut de donner une orientation nouvelle à la recherche en astronomie.

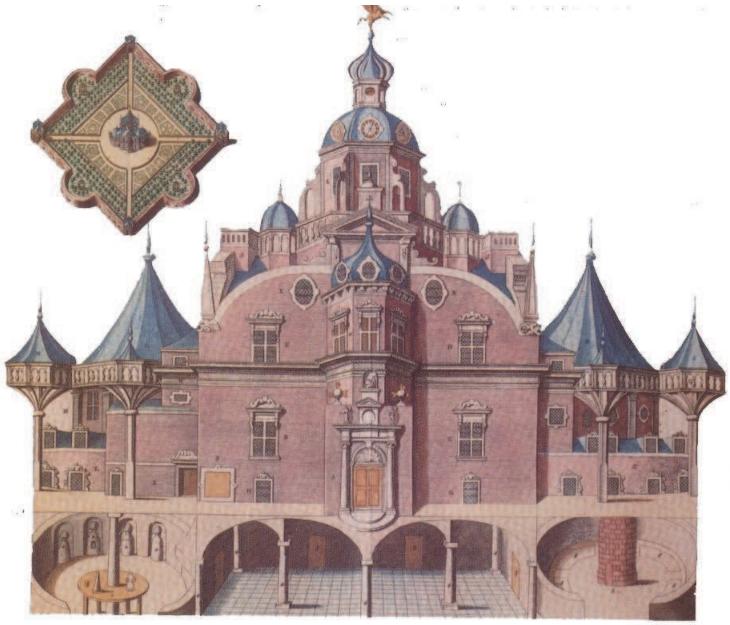
Tycho Brahe
(1546-1601)

Tycho Brahe est né le 14 décembre 1546 à Knudstrup alors sous domination danoise. Issu de la plus ancienne noblesse danoise, il fut élevé par un oncle paternel qui le destinait à une carrière en droit. Pour se préparer à cette profession, il commença ses études à l'université de Copenhague en avril 1599. Mais l'éclipse de Soleil du 21 août 1560 suscita son intérêt pour l'astronomie, d'autant plus que cette éclipse avait été prédite. Il se plongea alors dans l'étude de l'astronomie en lisant les ouvrages disponibles à l'époque. En février 1562, il entreprit des études à l'université de Leipzig où il commença à faire des observations.

L'une de celles-ci était une conjonction de Jupiter et de Saturne qui fut déterminante pour sa carrière. Cette conjonction été prévue par les tables astronomiques établies à l'aide du modèle de Ptolémée, mais avec une erreur d'un mois. Elle était également prédite par les tables basées sur le modèle de Copernic, mais avec une erreur de quelques jours. Brahe acquit la conviction qu'en établissant des tables à partir d'un programme systématique d'observations, il serait possible de prédire les phénomènes astronomiques avec une plus grande précision. Il s'intéressa alors aux instruments d'observation et à leur fonctionnement. Il visita plusieurs observatoires pour voir et comprendre le fonctionnement des instruments de mesure et d'observation, il en perfectionna quelques-uns avant d'en concevoir de nouveaux qui ne comportaient cependant pas de composante optique. En plus de l'astronomie, Brahe avait développé un intérêt croissant pour l'alchimie et, en 1571, il entreprit la construction d'un observatoire et d'un laboratoire d'alchimie.

Le 11 novembre 1572, après une longue journée d'expérimentation en alchimie, il sort dans la nuit et constate l'apparition d'une étoile nouvelle dans la constellation de Cassiopée. Il appela aussitôt son assistant pour lui faire confirmer l'existence de cette étoile. Heureusement, cette étoile, qui est connue sous le nom de « supernova[1] de Tycho » éveilla à nouveau son intérêt pour l'astronomie. Cette étoile est l'une des quelques supernovae observées dans notre galaxie.

[1] Une supernova est l'explosion d'une étoile dans sa phase finale.



Il n'était pas le premier à voir cette nouvelle étoile (une supernova), mais ses observations lui permettent de constater l'absence de parallaxe. Cela permet de conclure que l'étoile est à une très grande distance et ne peut être un phénomène du monde sublunaire. Ces observations furent publiées en 1574. Elles étaient importantes, car jusqu'alors tout phénomène céleste impliquant un changement était considéré comme un phénomène local du monde sublunaire. Pour préserver l'immuabilité des cieux héritée des aristotéliciens, l'hypothèse que cette étoile était d'une matière imparfaite et disparaîtrait rapidement fut avancée. Elle disparut au bout d'un an et demi, non sans avoir terni l'image d'un monde céleste parfait et immuable héritée d'Aristote.

Impressionné par les réalisations de Tycho, le roi du Danemark, Frédéric II, lui accorde l'île de Hveen (Ven) près de Copenhague ainsi qu'une importante pension pour poursuivre ses travaux. Tycho y construisit un observatoire, appelé Uraniborg, qu'il équipa d'instruments de très grande dimension, dont certains conçus par lui. En l'absence de composante optique, la dimension de ces instruments permettait d'accroître beaucoup la précision des observations. Tycho répertoria un catalogue de 777 étoiles et fut le premier à tenir compte de la réfraction de la lumière dans ses observations.

LES INSTRUMENTS DE TYCHO

Les instruments de Tycho peuvent être regroupés en trois grandes familles :

- les quadrants ;

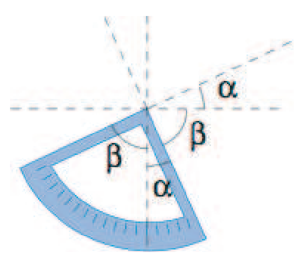
- les armilles ;
- les sextants.

Aucun de ces instruments ne nous est parvenu, ils sont connus par la description et les illustrations que Tycho en donne dans son ouvrage « *Mechanica Astronomiae instaurata* » (Instruments de la restauration de l'Astronomie). Il indique même les défauts de ceux-ci.

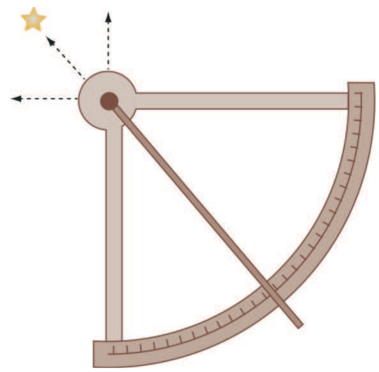
Les quadrants

Les quadrants servent à mesurer l'altitude ou angle d'élévation par rapport à l'horizon.

Ce type d'instrument était déjà utilisé par les astronomes arabes. Ils étaient normalement de petite dimension pour être facilement transportables mais également à cause des problèmes techniques que suppose la fabrication d'instruments de grande dimension. Les versions transportables sont munies d'un fil à plomb pour s'assurer que l'instrument est bien aligné dans la direction zénithale. En visant l'étoile avec la ligne extérieure du quadrant, on peut alors lire l'angle avec la direction zénithale, qui est indiquée par le fil à plomb. L'angle avec l'horizontale, ou altitude de l'étoile, est alors l'angle complémentaire à celui avec direction zénithale.



Les quadrants de grande dimension développés par Tycho peuvent être fixés selon le méridien ou libres de pivoter tous azimuts. Le quadrant est muni d'une branche mobile pour viser l'étoile (figure suivante). La règle graduée permet alors de mesurer l'angle de la direction de l'étoile par rapport au zénith.



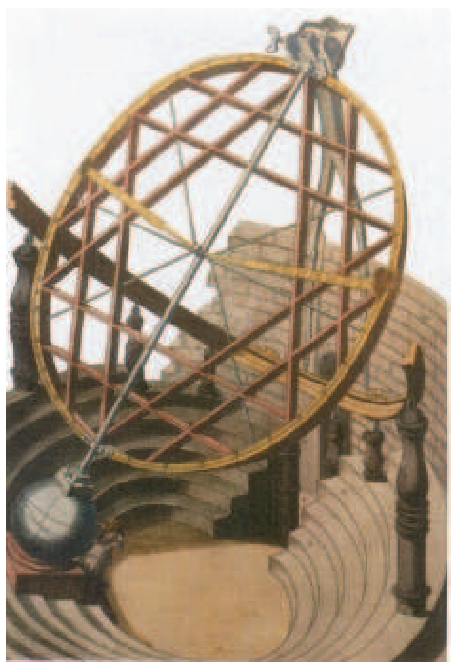
Un quadrant de grande dimension permet une mesure beaucoup plus précise. Celui de Tycho a 4,6 m de diamètre. Dans la figure suivante, Tycho est représenté devant le grand quadrant en laiton de l'observatoire d'Uraniborg.

Tycho et son quadrant mural

L'altitude selon le méridien peut être mesurée directement avec précision, mais lorsque la lecture n'est pas dans l'alignement du méridien, il faut compenser pour le décalage et Tycho n'a jamais réussi à avoir une horloge ayant la précision nécessaire pour ce faire.

Les armilles

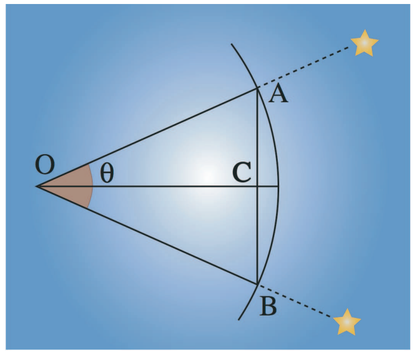
Les armilles sont des anneaux gradués permettant de mesurer directement aussi bien les coordonnées équatoriales qu'écliptiques sans qu'il soit nécessaire de compenser. Tycho a d'abord fabriqué une armille zodiacale d'un diamètre de 1,2 m pour mesurer aussi bien la longitude que la latitude. Cependant, le poids de l'anneau causait le déplacement de celui-ci et faussait les résultats. Il utilisa ensuite une armille équatoriale qu'il a lui-même conçue. Elle était constituée d'un anneau de 2,7 m de diamètre gradué au quart de minute d'arc.



La grande armille équatoriale

Les sextants

Les sextants sont des instruments qui servent à mesurer la distance angulaire entre deux étoiles jusqu'à 60° dans n'importe quelle direction. La précision des mesures prises par Tycho avec les sextants qu'il a conçus serait de 1 minute d'arc.



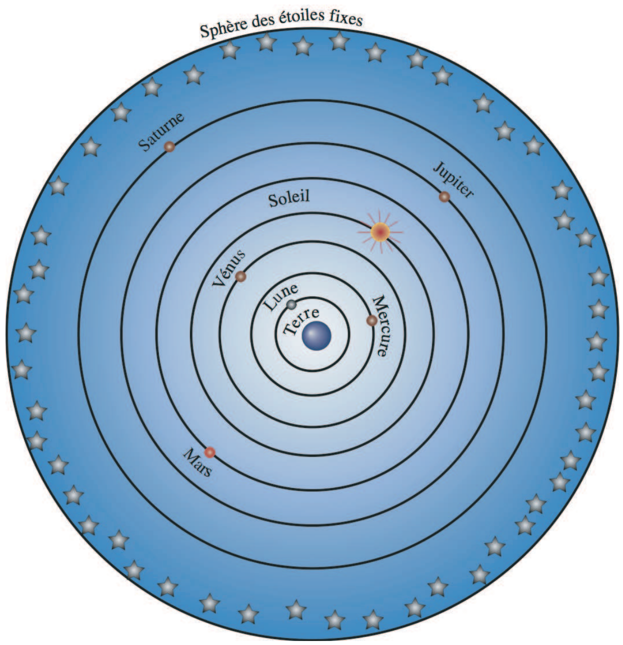
Tycho disposait également d'un globe céleste de 1,5 m de diamètre pour y inscrire les positions précises des étoiles observées.

LES OBSERVATIONS

Rappelons que, pour tracer un cercle, il suffit d'en connaître trois points. Si les orbites des planètes sont circulaires, il suffit donc d'en connaître trois points pour les tracer. Tous les astronomes et les mathématiciens le savent. Pour la majorité d'entre eux, il n'est donc pas indispensable de faire beaucoup d'observations. Copernic n'avait fait qu'une dizaine d'observations et s'était servi de celles accumulées par les astronomes Hipparque et Ptolémée pour rédiger son *De revolutionibus*. Tycho, au contraire, consacre sa vie à accumuler des observations toujours plus précises qui vont permettre à Kepler de poursuivre son travail.

L'observation la plus importante de Tycho est une comète qu'il vit pour la première fois le 13 novembre 1577 alors qu'il pêchait dans l'un des étangs de son domaine. Cette comète était aussi brillante que Vénus, avec une tête bleue dont le diamètre était de 7 à 8 minutes d'arc et une queue rougeâtre de 22° de longueur. Tycho s'empressa d'en déterminer la trajectoire et la distance, ce qui n'était pas simple puisque le mouvement apparent dépend du mouvement de la terre et du mouvement de la comète. Il observa la comète jusqu'en janvier et ne détecta aucune parallaxe, ce qui indiquait qu'elle était bien au-delà de la sphère lunaire. Ses travaux l'amenèrent à conclure que la trajectoire de la comète était voisine de celle de Vénus. Ces résultats constituaient la meilleure preuve que les comètes étaient un phénomène du monde supralunaire et non un phénomène atmosphérique comme on croyait alors en se fondant sur la cosmologie d'Aristote. Il décida de rédiger un ouvrage sur le sujet, mais il fallut près de dix ans pour qu'il soit édité, en 1588, sous le titre *De mundi aetheri recentioribus phaenomenis* (Sur les plus récents phénomènes du monde céleste).

En 1582, Tycho a imaginé une façon de déterminer lequel des deux systèmes, ptoléméen et copernicien, était conforme à la réalité. Dans le système de Ptolémée, la planète Mars est toujours plus éloignée de la Terre que le Soleil qui a une parallaxe[2] de 3 minutes d'arc. Si le modèle ptoléméen est correct, Mars devrait avoir une parallaxe inférieure à 3 minutes d'arc puisqu'elle est plus éloignée.



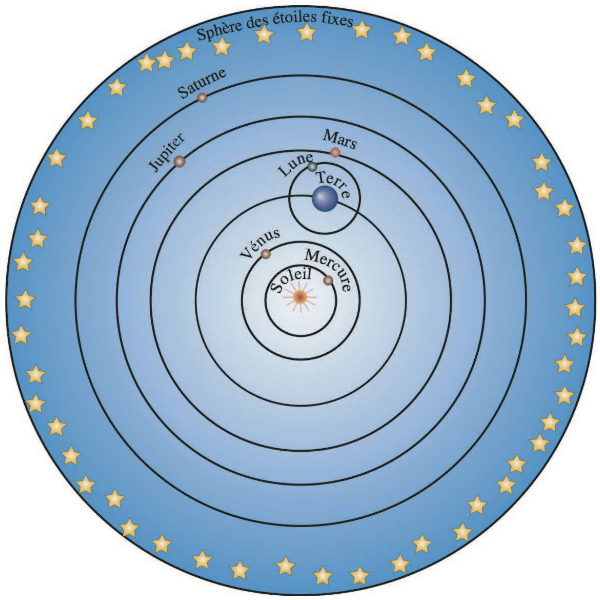
Opposition dans le modèle de Ptolémée

Mars est toujours plus éloignée de la Terre que le Soleil et devrait avoir une parallaxe inférieure à celle du Soleil qui est de 3 minutes d'arc.

Par ailleurs, dans le système copernicien, lorsqu'elle est en opposition[3], la planète Mars est plus proche de la Terre que le Soleil. Si ce système est correct, la planète Mars devrait avoir une parallaxe supérieure à 3 minutes d'arc puisqu'un changement de position par rapport à l'arrière-plan étoilé devrait être plus important. Tycho estimait que celle-ci devrait être d'environ 4,5 minutes d'arc. Il lui restait à valider cette déduction à partir d'observations.

[2]La parallaxe est le changement apparent de la position d'un corps céleste par rapport à l'arrière-plan résultant d'un changement de position de l'observateur.

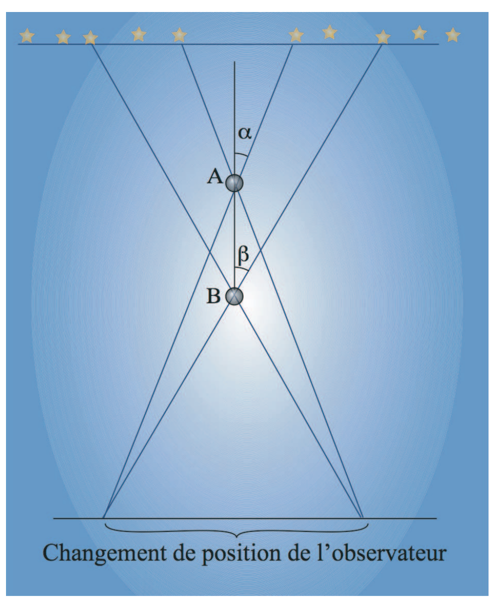
[3]Deux planètes sont en opposition lorsque leur distance angulaire, mesurée de la Terre, est de 180 degrés. Elles sont en conjonction lorsque leur distance angulaire est de 0 degré. Dans chacun des cas, les deux planètes et la Terre sont sur une même droite. Elles sont en opposition lorsque les deux planètes sont de part et d'autre de la Terre et en conjonction lorsqu'elles sont du même côté de la Terre.



Opposition dans le modèle de Copernic

Lorsqu'en opposition avec le Soleil, Mars est plus proche de la Terre et devrait avoir une parallaxe supérieure à celle du Soleil.

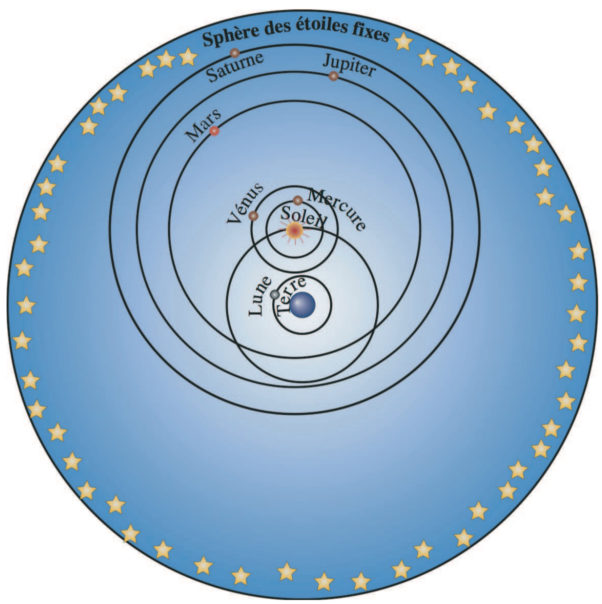
Dans la figure suivante, on peut constater que la mesure de la parallaxe de l'objet A, donnée par la mesure de l'angle α est plus petite que celle de l'objet B, donnée par la mesure de l'angle β. Plus l'objet céleste est éloigné, plus sa parallaxe est petite.



Parallaxe fonction de la distance

Lors d'une première tentative, il obtint que la parallaxe de Mars était inférieure à celle du Soleil. Cependant, en vérifiant ses mesures et ses calculs, il détermina que la parallaxe de Mars était supérieure à 3 minutes d'arc, ce qui plaidait en faveur du système de Copernic.

Par conviction religieuse, Tycho ne pouvait se résoudre à admettre que la Terre n'était pas le centre de l'Univers. Il élabora alors un modèle géocentrique, présenté dans *De mundi aetheri recentioribus phaenomenis*. Dans ce modèle, la Terre est immobile au centre de l'Univers. Les cinq planètes sont en révolution sur des orbites circulaires centrées au Soleil. La Lune et le Soleil sont en révolution sur des orbites dont la Terre est le centre. Ce modèle évacuait complètement les problèmes physiques découlant du mouvement terrestre. L'explication aristotélicienne de la chute des corps était toujours valide.



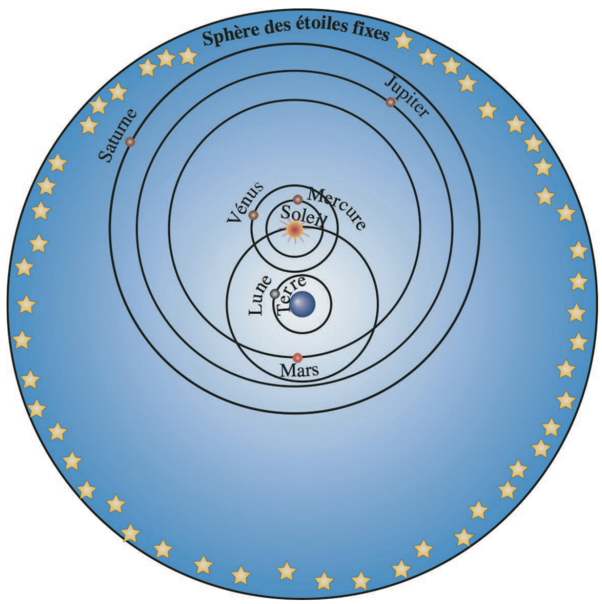
Modèle de Tycho Brahe

Dans le modèle de Tycho Brahe, les cinq planètes sont en révolution sur des orbites circulaires centrées au Soleil. La Lune et le Soleil sont en révolution sur des orbites dont la Terre est le centre.

La particularité la plus connue de ce modèle est que les orbites de Mars et du Soleil devaient se croiser pour expliquer le fait que la parallaxe de Mars était supérieure à celle du Soleil lorsqu'ils étaient en opposition. Cette particularité soulevait un problème. Comment les sphères célestes pouvaient-elles se croiser ainsi ? Physiquement, le modèle n'était pas possible.

C'est par une analyse plus approfondie de la distance et de la trajectoire de la comète de

1577 que Tycho a résolu ce problème. Déjà, certains astronomes remettaient en question l'existence des sphères de cristal que la comète semblait avoir traversé sans difficulté. Au début de 1587, Tycho réexamina ses observations et vint à la conclusion que la comète était passée d'une distance de 173 rayons terrestres à une distance de 1,733 rayons terrestres, traversant les sphères de Vénus et du Soleil. Ces calculs l'amenèrent à conclure qu'il n'y avait pas de sphères planétaires. L'élimination des sphères célestes fut la conclusion la plus importante que Tycho a tirée de ses observations. C'est un des postulats de l'astronomie aristotélicienne et ptoléméenne qui était ainsi éliminé.



Opposition dans le modèle de Tycho Brahe

Lorsqu'en opposition avec le Soleil, Mars est plus proche de la Terre, ce qui est conforme au fait que sa parallaxe est alors supérieure à celle du Soleil.

La rotation des sphères cherchait à expliquer le mouvement des planètes. En effet, les sphères étaient entraînées par la rotation de la sphère des fixes. L'élimination des sphères minait de façon importante la théorie aristotélicienne et ouvrait un nouveau champ d'investigation. Comment décrire et expliquer les mouvements planétaires en l'absence des sphères de cristal ? Johannes Kepler va écrire le premier chapitre de ce nouveau champ de recherches et Isaac Newton sera l'auteur du deuxième chapitre.

TYCHO À PRAGUE

À partir de l'avènement du roi Christian IV en 1588, Tycho eut de plus en plus de conflits avec le roi à cause des dettes qu'il accumule, de la façon dont il traite son entourage et des intrigues de gens de la noblesse. Sa pension fut coupée en 1597 et il se réfugia en Bohème sous la protection de Rodolphe II.

Tycho est un très grand observateur, mais il n'a pas la formation mathématique pour tirer profit de ses observations. Il réussit à convaincre Kepler de se joindre à son équipe. Il souhaite que celui-ci se serve de ses observations pour démontrer la justesse de son modèle. Ce n'est qu'en 1601 que Kepler se joint à l'équipe, il a 28 ans et Tycho 53, et leurs relations seront difficiles.

Ce que Tycho souhaite, c'est que Kepler utilise les observations que lui et son équipe ont accumulées pour démontrer la justesse de son modèle. Cependant, Kepler est copernicien et il ne répondra pas aux attentes de Tycho.

Tycho est décédé le 24 octobre 1601. Selon plusieurs historiens, sa mort serait due à des excès lors d'un souper. Cependant, des analyses récentes de ses restes indiquent que ce décès pourrait être attribuable à une intoxication au mercure. Ce qui est possible compte tenu que Tycho s'adonnait également à l'alchimie et qu'il a probablement, comme tous les alchimistes, manipulé du mercure lors de ses expériences.

Après le décès de Tycho, Kepler fut nommé Mathématicien de sa Majesté très chrétienne et hérita des observations de Tycho. Lorsque Kepler était arrivé à Prague, l'équipe travaillait sur les observations que Tycho avait prises des mouvements de la planète Mars. Kepler poursuivit l'étude de ces observations qui allaient lui permettre d'énoncer ses trois lois sur les mouvements planétaires.

CONCLUSION

Pour Tycho Brahe, le point équant du système de Ptolémée violait le principe du mouvement circulaire uniforme. De plus, il considérait que ce système expliquait mal le comportement des planètes par rapport au Soleil. Il rejetait également le système de Copernic qui, pour lui, n'était qu'un simple artifice de calcul, car aucune preuve ne confirmait la validité de ce modèle. Tycho croyait aux mouvements circulaires uniformes du système aristotélicien et à l'immobilité de la Terre. Pour contrer l'héliocentrisme, il a repris l'argument d'Aristote selon lequel la Terre est un corps lourd, dense et opaque, donc inapte au mouvement. Il a développé un modèle respectant ces principes et prenant en compte la parallaxe de Mars lorsque la planète est en opposition avec le Soleil. Ce modèle, qui n'est pas un véritable système, a été adopté par les Jésuites au XVII^{e} siècle pour des raisons philosophiques et théologiques, mais n'a pas survécu à la parution des *Principia* de Newton en 1687.

Les observations de la supernova et de la comète de 1577 ont porté un dur coup aux postulats aristotéliciens de l'immuabilité et de la perfection du monde supralunaire, et ont éliminé les sphères célestes.

Grâce aux grandes dimensions des instruments de Tycho, les mesures qu'il a accumulées sont plus précises que toutes celles obtenues par ses prédécesseurs. Ces données vont permettre à Kepler, qui est copernicien contrairement à Tycho, d'énoncer ses trois lois des mouvements planétaires. Les deux premières seront éditées en 1609 et la troisième en 1619. Avec ces observations, il a également construit des Tables astronomiques, les *Tables rudolphines* publiées à Ulm en 1627. La précision de ces tables a été un argument important pour convaincre les astronomes de la validité du modèle copernicien, même si le modèle de Tycho a eu la faveur de la plupart des astronomes jusqu'au milieu du XVII^{e} siècle car il avait l'avantage d'éviter les problèmes que soulevaient les mouvements de la Terre.

Les observations, même d'une grande précision, ne suffisent pas à la construction d'un savoir scientifique. Pour en dégager une théorie, il faut en faire l'analyse et construire des modèles mathématiques qui constitueront le cœur de la théorie. C'est la tâche que Kepler va accomplir avec les observations de Tycho.

Avec Tycho, puis Kepler, l'astronomie est passée des modèles spéculatifs hérités d'Aristote et Ptolémée aux modèles se fondant sur les observations.

Nous remercions Astrofiles pour la permisssion de reproduire les illustrations d'Uraniborg et des instruments de Tycho Brahe (voir le site www.astrofiles.net).

BIBLIOGRAPHIE

De la Cotardière, Philippe, *Histoire des sciences, de l'antiquité à nos jours*, Paris, Tallandier Éditions, 2004, 659 p.

Ferguson, Kitty, *Measuring the universe*, New-York, Walker and company, 1999, 342 p.

Ferguson, Kitty, *Tycho & Kepler, the unlikely partnership that forever changed our understanding of the heavens*, New-York, Walker and company, 2002, 402 p.

Kline, Morris, *Mathematics, a cultural approach*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1962, 70 p.

Kline, Morris, *Mathematics in western culture*, New York, Oxford University Press, 1974, 484 p.

Maor, Eli, *Trigonometric Delights*, Princeton, Princeton University Press, 1998, 236 p.

Moore, Sir Patrick, *Astronomy Encyclopedia*, Oxford, Oxford University Press, 2002, 456 p.

Toomer, G. J., *Ptolemy's Almagest*, Princeton, Princeton University Press, 1998, 693 p.

Vollmann, William T, *Uncentering the Earth, Copernicus and the Revolutions of the Heavenly Spheres*, New York, W.W. Norton & company, Atlas books, 2006, 295 p.

Walker, Christopher *Astronomy before the telescope*, The trustees of the British Museum, St.Martin Press, New-York.

Lu pour vous

Robert Bilinski
Collège Montmorency

Sous la présente rubrique, vous trouverez 8 livres dont une recension invitée. Ce mois-ci, les livres peuvent se regrouper sous un thème large comme « L'homme et les maths ». En effet, nous avons trois livres de vulgarisation qui abordent de manière radicalement différente notre matière première favorite (avec un filtre « anthropologique », un filtre « autour des nombres » et un filtre « je m'amuse »), un livre d'histoire des mathématiques arabes, un livre de philosophie des mathématiques, un livre d'amour pour le Nombre d'Or et le dernier sert à évaluer sa propre capacité logique. De plus, la recension que nous avons reçue de Louise Pagé présente un roman qui raconte l'amour d'un homme pour les mathématiques.

V. Clisson et A. Duval, *Tests de logique,*
Collection « Eyrolles Pratique », Eyrolles, 2003, 150 p.,
ISBN 2-7081-3524-4, entre 8 $ et 20 $ selon le libraire.

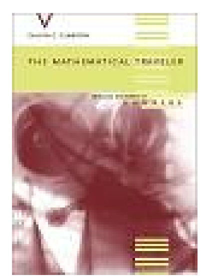
En cherchant un autre livre à la bibliothèque de mon collège, je suis tombé sur ce livre sur l'étagère des nouveautés et je l'ai emprunté. Comme le titre l'indique, ce livre contient des questions pour tester sa « logique ». Une occasion pour faire des « casse-tête » ne se manque pas, je me suis dit. Le livre est subdivisé en 8 chapitres. La répartition est simple : chaque chapitre contient un seul type d'exercice.

On retrouve des problèmes de suites de nombres et de lettres, des problèmes de cartes et de dominos, des petits casse-tête logiques, des petits problèmes mathématiques, des problèmes de suites de figures géométriques et une section de proverbes dont les mots ont été mis dans le désordre. Le premier et le dernier chapitre font bande à part. Dans le premier, on retrouve quelques exercices faciles d'initiation pour que le lecteur puisse comprendre de quoi il s'agit, et le dernier contient une série d'exercices qui tient lieu d'examen de pratique.

Il y a quelques années, j'ai passé l'examen de logique du gouvernement du Canada. Ce livre est supposé entraîner les gens à ce type d'examen, mais version France. Par contre, ce livre contient de nombreux défauts qui l'empêchent d'atteindre ce but. En premier lieu, il y a seulement une série d'exercices qui est organisée comme un examen de recrutement (le chapitre 8). En second lieu, les chapitres 3, 4 et 6 (la moitié de ceux qui « apprennent la résolution ») n'ont pas de section d'exercices, mais sont entièrement remplis d'exemples résolus. Ce format est bon pour voir la mécanique des problèmes, mais ne permet pas au lecteur d'acquérir la capacité de faire ce genre de problème ou de se tester. En effet, il ne peut pas se pratiquer ! En troisième lieu, les exemples sont beaucoup plus faciles que les exercices dans le « faux examen ».

Mon évaluation de ce livre est donc mitigée. Il fait bon de sortir des livres de mathématiques purs et durs. Mais si on veut s'entraîner à un examen de recrutement, je ne crois pas que ce livre aidera autant que d'autres. Il ne fera pas par contre de tord, je pense. Il me semble avoir vu des livres plus pédagogiques en magasin. Je vous reviens là-dessus dans une autre chronique, peut-être avec un livre plus complet et qui en donnera plus pour votre argent. Bonne lecture !

Calvin Clawson, *The mathematical Traveler*, Perseus Books (Harper-Collins), 2003, 320 p., ISBN 0-7382-0835-3, environ 17 $.



En bouquinant, j'ai découvert ce livre. Sa couverture verte et brune n'augurait rien de particulier. Mais le titre « Mathematical Traveler », soit « Voyageur Mathématique » a suscité ma curiosité. Sur la couverture arrière, la phrase suivante (traduite par moi) résume bien l'esprit du livre :

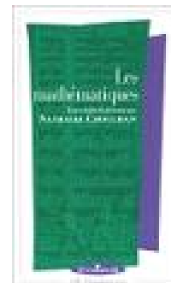
« *Au fils du livre vous allez apprendre sur la découverte de notre système d'énumération actuel en Sumérie, l'importance de la proportion divine et de Pi chez les Grecs, les percées sur les irrationnels de Gauss et Dedekind, et comment ces découvertes (et bien d'autres) ont poussé la culture, le commerce et la science à avancer.* »

En 15 chapitres, on parcourt de manière synthétique le développement de notre civilisation, de la préhistoire au XX^{e} siècle. Le fils conducteur de ce voyage est l'interaction entre le réel et la conscience à travers cet élément de nous que sont les Mathématiques.

Les auteurs de vulgarisation ont chacun leur style. Celui-ci, dans un anglais sans façon et sans figures de style mirobolante, nous offre une vision sobre et très réfléchie de nous-même. En empruntant énormément aux sciences humaines (histoire, géographie, anthropologie, sociologie, économie, philosophie), l'auteur dresse un tableau impressionnant et original de ce que nous, mathématiciens, faisons et avons fait. De plus, je crois que l'auteur démontre une grande objectivité historique et culturelle. En effet, il ne semble pas souffrir d'eurocentrisme ou de préjugés marqués (tout en admirant Pythagore, il le critique ...). J'invite d'ailleurs, en passant, les historiens des mathématiques parmi nous à me faire part de leurs commentaires à ce sujet. Ce livre est dans la même veine que celui d'Ifrah (que j'ai reçu en cadeau il y a quelques années de cela, mais que je n'ai que feuilleté). Par contre Ifrah, de mémoire, semble plus se concentrer sur les techniques des sociétés primitives que Clawson. Ce dernier explore plus l'anthropologie des mathématiques ou, plutôt, il explore la nécessité de l'homme à faire des mathématiques. À travers le livre, il répond entre autres aux questions : « Qu'est ce qui a poussé l'homme des cavernes à compter ? Quels éléments de l'environnement l'ont aidé dans cette démarche ? ».

On découvre à travers les pages de son livre une merveilleuse aventure : Une histoire de découverte et d'émerveillement, mais aussi de trahison et d'évolution. L'analyse qu'il fait de Pythagore et de son influence en est un exemple parfait. Il a à la fois révolutionné les mathématiques et les a aussi bloquées dans leur évolution. Ce livre n'est ni une biographie de mathématiciens, ni une suite de récits historiques énonçant les résultats mathématiques dans la chronologie de leurs découvertes. C'est clairement un travail savant et réfléchi sur, en quelque sorte, la condition humaine « mathématique », mais vulgarisée pour un publique instruit.

Plus qu'un voyage dans les mathématiques, ce livre est un voyage dans la conscience humaine. Je le recommanderais aux gens en sciences humaines pour leur faire comprendre en leurs termes notre position, aux introvertis et surtout aux introspectifs, aux amateurs de vulgarisation et aux bibliothécaires. Une des questions sous-jacentes du premier chapitre est : « Les mathématiques sont-elles innées ? ». Le reste du livre en est sa réponse. À vous d'y penser ! Bonne Lecture !



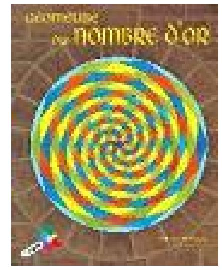
Nathalie Chouchan, *Les Mathématiques*,
Collection Corpus, Flammarion, 1999, 252 p.,
ISBN 2-08-073019-3, environ 13 \$.

Avec le peu de communications que j'ai pu avoir avec des philosophes, j'étais curieux de voir la vision qu'allait véhiculer un tel livre. De plus le titre annonçait un thème différent peut-être des autres. Aucun « Mathématiques et ... » ici, c'est « Mathématiques » tout court. La marche en est plus haute, non ? Le sujet n'est pas une partie du tout, mais le tout. Aussi, avec la lourdeur d'autres textes dans la même veine, je me demandais si j'allais le trouver digeste. En fait, l'auteure joue plus le rôle de rédacteur dans ce livre, car ce recueil regroupe des textes des plus grands penseurs de notre civilisation (de Platon à Russell, en passant par Kant et Descartes). Elle recueille la parole de tous ces grands...

Chaque chapitre suit, à peu de choses près, le même moule. En deux à quatre pages, l'auteur expose les grands points de la position du philosophe et le chapitre finit avec un extrait de trois à six pages d'une des œuvres du philosophe. C'est une manière fort intéressante d'aborder ses idées, compte tenu que les chapitres sont biens écrits. Je peux me reporter à une recension antérieure où le livre « Les mathématiques et le réel » a été recensé pour une approche plus académique et sèche, donc moins lisible du même sujet. Mais le but n'est visiblement pas le même dans les deux livres ! Il faut donc faire attention lors des comparaisons... Ce livre-ci a comme auditoire le « grand publique » (avec un certain bagage quand même), alors que le second était clairement une revue exhaustive et scolaire du même sujet.

À travers les pages de ce livre, on découvre les pensées des grands mathématiciens et des grands philosophes. Ce livre nous fait réfléchir à une autre manière de voir ce que nous faisons (que ce soit de faire des mathématiques, de faire faire des mathématiques ou de les enseigner). En quelque sorte, il permet de prendre du recul. Voici donc un livre approprié pour ces moments d'introspection et de quête d'une vision plus large. Bonne lecture !

R. Vincent, *Géométrie du nombre d'or (4^e édition)*,
Chalagam Éditions, 2004, 128 p.,
ISBN 2-951-9607-0-0, 35 \$.



La maison d'édition marseillaise Chalagam est assez petite, avec ses 5 livres. Par contre, ils parlent tous du nombre d'or d'un point de vue mathématique. Bien que je n'aie pas encore lu tous les livres, je ne pense pas qu'ils font partie de ces livres « ésotériques » qui parlent quasi-religieusement de ce nombre. Ce livre est ce qu'il dit être, soit un livre de géométrie. Le lectorat visé n'est pas mathématique en contre partie, ce qui lui confère son originalité.

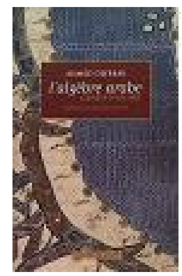
L'auteur, Robert Vincent, est un ingénieur français qui a entre autres enseigné un cours de géométrie euclidienne. Le livre et les constructions en témoignent. Elles se tiennent mathématiquement, mais avec la contrainte : Le nombre d'or s'y retrouve. Puisque le lectorat ciblé est large, les constructions ne contiennent aucune preuve et l'algèbre est réduite au minimum. Ce qui laisse libre cours à l'imagination mathématique du lecteur qui désire retrouver le nombre d'or par lui-même. J'ai ensuite pensé donner certaines des constructions en exercice à des élèves, mais je n'ai pas de cours de trigonométrie cette session.

La question que je me suis posée est : « Retrouve-t-on le nombre d'or naturellement ? » Autrement dit, apparaît-il parce qu'on veut absolument le voir partout ? Je n'ai pas de réponse à cela. En tant que mathématicien et amateur de géométrie, je peux faire apparaître la racine de 5 assez facilement et, du fait même, le nombre d'or dans une construction. Le livre aurait pu, selon moi, aller plus loin. Si la construction n'était pas un choix « humain », l'apparition du nombre d'or dedans serait plus « surprenante ». J'ai bien aimé le chapitre 6 ou la page 65 pour cela. En revanche, ce questionnement tout à fait personnel n'enlève rien à mon appréciation des constructions offertes. Entre autres, j'ai beaucoup aimé les spirales et l'œuf, voir l'apparition « simple » du nombre d'or dans certaines constructions.

Ce livre contient un irritant qui m'a suivi jusqu'à la dernière section. J'ai vite remarqué que, des fois, on retrouve le nombre d'or « à peu près » et, à d'autres endroits, on le retrouve « exactement ». L'irritation provient du manque d'utilisation du signe « $\approx$ » (par exemple p. 31), car par la suite, je me suis posé la question de la validité de l'apparition du nombre d'or dans les constructions. Mais il semble indiquer entre parenthèses la précision de l'approximation quand il y en a une. Mon irritation est partie lorsque j'ai atteint le chapitre 7 et j'ai vu « tracé approché » ou « méthode approchée » apparaître en sous-titre des constructions. Mais son utilisation inégale (p. 49) me laisse perplexe. C'est une coquille à corriger selon moi.

Voici donc un livre qui pourra meubler vos après-midi d'été. On peut le prendre à plusieurs niveaux : comme un livre d'art plein de belles images, comme un livre d'exercices qui nous stimule à trouver le nombre d'or... Bien que l'introduction relate le lien historique entre le nombre d'or et l'ésotérisme, il n'a pas succombé à la tentation d'y plonger : un gros plus selon moi. Bonne lecture !

Ahmed Djebbar, *L'algèbre arabe : Genèse d'un art,* Collection "Inflexions" Vuibert - Adapt, 2005, 214 p., ISBN 2-7117-5381-6, environ 40 $.



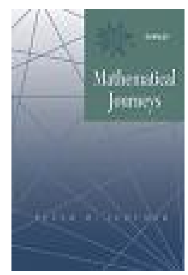
C'est vrai qu'un titre doit être accrocheur. Je commence à m'en rendre compte en écrivant ces recensions depuis 3 ans, car je soulève souvent la phrase « le titre m'a accroché... ». Je ne sais pas si c'est l'utilisation du mot art qui est le crochet ici, mais j'essaie justement de créer des artistes ou des artisans des maths plus que des techniciens dans mes cours. Je devinais par le titre que je lirais sur Al-Kwarizmi et la génèse de l'algèbre (al-jabr). J'ai visé juste. Mais la visée de l'auteur est plus vaste comme on le verra.

M. Djebbar est historien des mathématiques et spécialisé en mathématiques arabes. C'est un livre d'histoire, ça c'est clair depuis le début. L'auteur nous amène dans ce monde lointain pour nous, dans l'espace et le temps, en essayant de reconstituer aux sources les racines du corpus de connaissances que nous appelons l'algèbre. Qui a dit quoi ? Qui est le premier ? Comment faisait-il ? Pourquoi ? De qui s'est-il inspiré ? Le style est réservé et savant. Par contre, le sujet est clairement recherché et exposé avec le mot juste. Le contenu, lui, nous montre quand même un côté souvent bien caché des mathématiques : le côté humain, les chicanes. En lisant ce livre, on se rend compte jusqu'à quel point les chicanes sont liées aux mathématiques et depuis combien longtemps. Le lien se fait par les mathématiciens pour savoir qui a fait quoi en premier, mais aussi par ceux qui viennent voir les mathématiciens (ou maîtres des héritages comme ils étaient appelés des fois). Les disputes de voisins, de cohéritiers et de créanciers ont tout aussi fait avancé les mathématiques que la poursuite de la vérité, de la beauté et de la compréhension.

Ce livre consacre 72 pages aux mathématiques de l'Orient arabe au sens large (Bagdad, etc., avec les influences indiennes, perses et chinoises). Puis il dédie les prochaines 30 pages aux mathématiques arabes en Occident (Maghreb et Andalousie). Il poursuit avec 12 pages sur les mathématiques arabes en Europe. Il finit avec une conclusion de 6 pages. Ensuite, on retrouve 84 pages d'annexes (une vingtaine de pages contenant des biographies sur une soixantaine de mathématiciens, une quarantaine de pages de problèmes types avec résolution d'époque et moderne, un petit lexique de termes mathématiques pour les non-spécialistes, puis une bibliographie volumineuse qui couvre le reste du livre).

Voici donc un livre qui parle du dessous des mathématiques : les mathématiciens et les « ragots » qu'ils se disent entre eux, les clients des mathématiciens et leurs problèmes. C'est une vision intéressante. De plus, un coup d'œil sur une aussi longue période permet aussi de mieux comprendre comment les choses évoluent. Bonne lecture !

Peter D. Schumer, *Mathematical Journeys*,
Wiley, 2004, 200 p., ISBN 0-471-22066-3, entre 28 $ et 61 $.



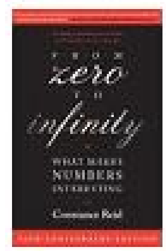
La recension de ce livre a été difficile à écrire à cause de l'éclectisme du style. « Ce livre a du style ! Non ! Que dis-je ? Du flair ! ». C'est l'idée qui m'est passée par la tête en premier lorsque j'ai voulu commencer cette recension. Mon intuition m'a servit puisqu'il sort de l'ordinaire. Après avoir recommencé à zéro cette recension 3 fois, je me suis même dit qu'il me faisait perdre mes mots ! À tous ceux qui me connaissent, marquer cette date dans votre calendrier, ça n'arrive pas souvent. Mais comme vous pouvez le constater, j'ai réussi à m'exprimer finalement !

L'auteur sort des résultats, se balade d'un champ des mathématiques à un autre, donne les preuves qu'il veut donner et finit par une conjecture dans le domaine avec une petite pointe au lecteur : « Veux-tu essayer ? ». Cela ressemble à du coq-à-l'âne. Vous avez raison, ça en est jusqu'à un certain point, mais l'auteur réussit à s'en sortir (d'après moi). L'image d'un cow-boy qui s'agrippe sur un taureau enragé me vient à l'esprit, mais c'est amusant à lire.

Les chapitres d'une dizaine de pages chacun sont faciles à lire et traitent chacun d'un sujet (graphes, ...). Le niveau du livre est celui d'un étudiant de première année de bac en mathématiques. C'est un peu comme un cours d'introduction aux grandes branches des mathématiques modernes (pas celles que l'on retrouvait dans les livres des années 60 ...). Le style de l'auteur est si personnel qu'on jurerait l'entendre nous parler, exposant ses idées au fils d'une conférence.

Les sujets traités ne se retrouvent pas tous dans des livres de vulgarisation. Il me semble d'ailleurs avoir remarqué un éclatement des sujets dans les livres qui osent s'éloigner de la théorie des nombres. Ce livre n'est pas grand public, mais il devrait avoir un attrait au sein de notre communauté. La recension est l'une des plus courtes, mais il ne faut pas s'y fier. Ce livre m'a touché. Trop de mots nuisent des fois. Bonne lecture !

Constance Reid, *From zero to infinity,*
A.K.Peters, 2006, 188 p., ISBN 1-56881-273-6, environ 26 $.



Ce livre est une réédition d'une parution des années 1950. D'après la dédicace, ce livre aurait brisé plusieurs stéréotypes à l'époque, ayant été écrit par une femme qui de surcroît n'était pas mathématicienne. Un simple amour des nombres l'avait inspiré. Après plusieurs réimpression, voici que l'éditeur A.K. Peters vient avec une réédition pour célébrer les cinquante années de cette parution. Le gros du livre semble être d'origine, mais on voit en lisant que certaines retouches ont été faites au fil des années, notamment pour mettre à jour certains records en théorie des nombres.

L'organisation des chapitres est trompeuse. On s'en rend vite compte. Ils s'intitulent « zero », « one », « two », « three », etc ... Mais, le chapitre sur « zero » ne parle pas de zéro seulement. Il en va de même pour les autres. Par exemple, le chapitre « trois » commence par l'idée que « trois est le premier nombre premier impair » et l'auteur embarque sur les nombres premiers pour le restant du chapitre. D'ailleurs, ce chapitre a une belle citation qui mérite d'être savourée :

Les ensembles finis relèvent seulement du physique. Les ensembles infinis relèvent de l'esprit !

C'est juste cocasse qu'à la fin du chapitre 1 par exemple, on se pose la question : « Où était le un ?!? ». Mais ça permet de faire de l'apprentissage par spirale et de faire un retour sur les notions.

Tout de même, Dame Reid nous amène sur un périple intéressant en dépit de cette « tromperie ». Il faut le prendre pour une métaphore de la complexité qu'une notion peut engendrer en mathématiques. On peut aussi le transformer en jeu (c'est d'ailleurs ce que j'ai fait à moment donné) qui a pour but de savoir où elle ira avec le chapitre qu'on est sur le point de commencer. À son avantage, je n'ai pas réussi du tout à deviner où elle allait, mais j'ai grandement apprécié être un passager.

J'ai lu ce livre à la queue leu leu des 2 autres livres de vulgarisation de cette chronique, soit « Mathematical Journeys » et « Mathematical Traveler » et, même si certains sujets étaient communs, je ne l'ai pas senti. À l'inverse des deux autres auteurs, elle privilégie la simplicité dans son exposé. À bien y penser, le leitmotiv semble être la quête du mathématicien. Elle transmet bien cet aspect de la recherche du mathématicien. D'ailleurs, elle alimente son texte avec plusieurs citations de grands mathématiciens sur ce qu'ils faisaient. Ce livre est très intéressant. Bonne lecture !

Voici une recension invitée ! Louise Pagé, ma coordonnatrice de département au cégep, s'est portée volontaire de son propre chef pour partager avec nous tous le grand plaisir qu'elle a eu à lire ce roman. La première fois qu'elle m'a abordé à ce sujet, elle a réussi à insérer les mots amour et beauté une vingtaine de fois dans une conversation de 4 minutes. Au plaisir de le lire. Merci Louise !

Yoko Ogawa, *La formule préférée du professeur,*
Actes Sud/Leméac, 2005, 247 p., ISBN 2-7609-2507-2.

Ce roman traduit par Rose-Marie Makino-Fayolle a été publié en japonais en 2003 et traduit en français et publié chez Actes Sud/Leméac en 2005. Il relate dans des mots et des phrases simples l'incursion d'une femme de ménage et de son fils dans la vie d'un mathématicien, ancien professeur d'université.

Ce mathématicien, retraité à la suite d'un accident qui a altéré sa mémoire et sa capacité d'intégration à la vie de tous les jours, ne bénéficie que de quatre-vingts minutes de mémoire par jour où il peut reconnaître ses proches. Le reste du temps, il peut quand même faire des mathématiques et participer à des concours de revues spécialisées, concours qu'il remporte d'ailleurs.

Sensible aux soins que la femme de ménage lui prodigue, il s'éprend d'affection pour son jeune garçon avec qui il partage la passion du baseball. À travers l'éducation mathématique du jeune garçon, nous redécouvrons les nombres entiers expliqués dans des situations de la vie courante et dans le baseball. Il nous fait voir et sentir les nombres d'une manière peu usuelle dans laquelle nous sentons la passion du métier et l'amour de l'enfance.

Ce roman vaut le détour pour sa simplicité et pour la redécouverte ou tout simplement la découverte des nombres entiers et de leur mystère.

Louise Pagé
Collège Montmorency

À venir :

En français :	Promenades mathématiques, Qu'est ce qu'un nombre ?, La théorie des graphes, Cinq siècles de mathématiques en France, géométrie au XX^{e} siècle, Homo Mathematicus, Approche pragmatique de la classification, Du vécu au jeu mathématique ...
En anglais :	Euclid in the rainforest, Mathematical sorcery, The mathematics of juggling, The prince of Mathematics, How students learn, Where mathematics come from, Mathematics in biology in the 21st century, Geometry : from Euclid to knots ...

Robert Bilinski
Collège Montmorency
rbilinski@gmail.com

Vous venez de lire un ouvrage qui vous a passionné ? Ou qui vous a choqué ? Nous attendons vos commentaires : un bref texte que vous postez à Robert Bilinski, Dép. de maths, 475, boul. de L'avenir, Laval (Québec), H7N 5H9. Vous pouvez aussi utiliser le courrier électronique (rbilinski@cmontmorency.qc.ca).