Association Mathématique du Québec

Article

Fonctions récursives à deux variables et coefficients binomiaux

Alain Birtz,
Département de mathématiques,
Cégep de St-Hyacinthe

Résumé

À la recherche d'une technique simple et rapide pour calculer les sommes partielles d'une suite de nombres donnés par un polynôme, il est apparu que le problème impliquait les fonctions répondant à la propriété : $f(m+1,n+1) = f(m+1,n)+f(m,n+1)$. Cette forme de récursivité sur les deux variables entières positives se retrouve dans le triangle de Pascal. Dans cet article, on fait une étude générale de ce type de fonctions. Quelles sont les propriétés de ces fonctions, comment peut-on les représenter graphiquement, quels sont leurs attributs graphiques et comment peut-on les caractériser ? Cette classe de fonctions forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Mais en définissant une multiplication « naturelle », on en fait un anneau commutatif unitaire. On verra que les éléments idempotents de cet anneau jouent un rôle clé dans la détermination des idéaux principaux et en particulier dans les idéaux principaux premiers. On montrera enfin que toute suite polynomiale se rattache à une fonction de la classe et on exposera la technique de *calcul* des sommes partielles qui en découle.

1 Définitions et résultats élémentaires

Définition 1 *Désignons par* $\mathbb{N}^{2^*}$ *l'ensemble* $\mathbb{N}^2$ - $\{(0,\,0)\}$. *Une fonction di-récursive est une fonction* $f : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $(m,n)\in\mathbb{N}^{2^*}$

$$f(m+1,n+1) = f(m+1,n) + f(m,n+1). \tag{1}$$

Présentons d'abord quelques résultats élémentaires sur les fonctions di-récursives (FDR).

Lemme 1 *Soit* $f : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ *une FDR, alors pour tout* $m \geq 1$ *et* $n \geq 1$, *on a*

$$f(m,n) = f(m-k,n) + \sum_{i=m-k+1}^{m} f(i,n-1) \quad \textit{pour } k \textit{ tel que } \ 1 \leq k \leq m, \tag{2}$$

$$f(m,n) = f(m,n-k) + \sum_{j=n-k+1}^{n} f(m-1,j) \quad \textit{pour } k \textit{ tel que } \ 1 \leq k \leq n. \tag{3}$$

© Association mathématique du Québec

Démonstration En appliquant successivement (1) au premier terme de chaque ligne, on obtient

$$\begin{aligned} f(m,n) &= f(m-1,n)+f(m,n-1) \\ &= f(m-2,n)+f(m-1,n-1)+f(m,n-1) \\ &= f(m-3,n)+f(m-2,n-1)+f(m-1,n-1)+f(m,n-1) \\ &\dots \\ &= f(m-k,n)+f(m-k+1,n-1)+\dots \\ &\quad +f(m-2,n-1)+f(m-1,n-1)+f(m,n-1) \\ f(m,n) &= f(m-k,n)+\sum_{i=m-k+1}^{m} f(i,n-1). \end{aligned}$$

L'identité (3) se démontre de la même façon. □

Lemme 2 *Soit $f:\mathbb{N}^{2^*}\to\mathbb{R}$ une FDR et $k,l\in\mathbb{N}$; alors $g:\mathbb{N}^{2^*}\to\mathbb{R}$ définie par $g(m,n)=f(m+k,n+l)$ est aussi une FDR.*

Lemme 3 *Soit $f:\mathbb{N}^{2^*}\to\mathbb{R}$ une FDR ; alors $g:\mathbb{N}^{2^*}\to\mathbb{R}$ définie par $g(m,n)=f(n,m)$ est aussi une FDR.*

Lemme 4 *Soit $f:\mathbb{N}^{2^*}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{N}^{2^*}\to\mathbb{R}$ deux FDR et $r,s\in\mathbb{R}$; alors $h:\mathbb{N}^{2^*}\to\mathbb{R}$ définie par $h(m,n)=rf(m,n)+sg(m,n)$ est aussi une FDR.*

Les preuves des lemmes 2, 3 et 4 sont laissées au lecteur.

On notera par $\mathscr{F}$ l'ensemble des FDR. Le lemme 4 montre que $\mathscr{F}$ forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Le zéro de cet espace vectoriel est la fonction sur $\mathbb{N}^{2^*}$ dont toutes les images sont nulles.

Définition 2 *$U:\mathbb{N}^{2^*}\to\mathbb{R}$ est donnée par*

$$U(m,n)=\begin{cases} \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)\dots(m+2)(m+1)}{n!} & \text{, si } n\geq 1 \\ 1 & \text{, si } n=0. \end{cases}$$

Proposition 1 *$U:\mathbb{N}^{2^*}\to\mathbb{R}$ est une FDR.*

Démonstration Si $m\geq 1$ et $n\geq 1$, $U(m,n)=\binom{m+n}{n}$ est le coefficient binomial et on vérifie (1) en vertu de la propriété bien connue $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}$.

Si $m = 0$ et $n \geq 1$ alors

$$\begin{aligned} U(1,n) + U(0,n+1) &= \binom{1+n}{n} + 1 \\ &= n+2 \\ &= \binom{1+n+1}{n+1} \\ &= U(1,n+1). \end{aligned}$$

Si $n = 0$ et $m \geq 1$ alors

$$\begin{aligned} U(m+1,0) + U(m,1) &= 1 + \binom{m+1}{1} \\ &= 1+m+1 \\ &= \binom{m+1+1}{1} \\ &= U(m+1,1), \end{aligned}$$

et dans ces deux derniers cas aussi (1) est vérifiée. □

Note : si on applique l'identité (3) du lemme 1 à U pour $k = n$, on obtient :

$$U(m,n) = U(m,0) + \sum_{j=1}^{n} U(m-1,j)$$

qui se traduit par une autre formule bien connue

$$\begin{aligned} \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{n!} &= 1 + m + \frac{m(m+1)}{2!} + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} + \ldots \\ + \quad & \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{n!}. \end{aligned}$$

La fonction U jouera un rôle important dans l'anneau des FDR. C'est l'unité multiplicative. Un autre élément essentiel d'une fonction di-récursive est donné par les images des couples du domaine $\mathbb{N}^{2*}$ qui ont une coordonnée nulle :

Définition 3 *Soit $f : \mathbb{N}^{2*} \to \mathbb{R}$ une FDR.*

$f_X = \{f(1,0), f(2,0), f(3,0), ...\}$ et $f_Y = \{f(0,1), f(0,2), f(0,3), ..\}$ sont les bases X et Y de f. f_B est le couple (f_X, f_Y) ; on le nomme base de f.

Lemme 5 *Une FDR est complètement déterminée par ses bases X et Y, c'est-à-dire que si deux FDR ont les mêmes bases, alors elles sont égales.*

Démonstration Soit $f : \mathbb{N}^{2*} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N}^{2*} \to \mathbb{R}$ deux FDR telles que $f_B = g_B$. Pour montrer que $f = g$, il suffit de prouver que $h = f - g$ est la fonction nulle. Noter que, d'après le lemme 4 , h est une FDR et $h_X = \{0, 0, 0, ...\}$ et $h_Y = \{0, 0, 0, ...\}$.

On va démontrer par induction sur n que $h(m,n) = 0$ pour tout $m \geq 1$.
Pour $k = m$, l'identité (2) du lemme 1 s'écrit

$$h(m,n) = h(0,n) + \sum_{i=1}^{m} h(i, n-1). \tag{4}$$

En particulier pour $n = 1$, on a

$$h(m,1) = h(0,1) + \sum_{i=1}^{m} h(i,0) = 0$$

quel que soit $m \geq 1$, puisque les bases de h sont nulles.

Supposons maintenant que pour un $n \geq 1$ quelconque, $h(m,n) = 0$ quel que soit $m \geq 1$.
Alors, en vertu de (4)

$$h(m,n+1) = h(0,n+1) + \sum_{i=1}^{m} h(i,n) = 0 + \sum_{i=1}^{m} 0 = 0.$$

Donc pour tout $n \geq 1$, $h(m,n+1) = 0$ quel que soit $m \geq 1$.
Ainsi $h = 0$ et $f = g$. □

2 Représentation graphique

Soit f une fonction de $\mathbb{N}^{2^*}$ dans $\mathbb{R}$. On place les valeurs de $f(m,n)$ dans une grille infinie dont les cases sont numérotées 0, 1, 2, 3, ... verticalement (pour n) et horizontalement (pour m).
La première case (0, 0) n'est pas utilisée. $\{f(0,n), f(1,n), f(2,n), ...\}$ est la rangée à hauteur n. $\{f(m,0), f(m,1), f(m,2), ...\}$ est la colonne m. Les bases f_X et f_Y constituent respectivement la rangée 0 et la colonne 0.

1	5	15	30	70
1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
	1	1	1	1

Figure 1. La grille de $U : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$

On remarque que le graphique est symétrique par rapport à la grande diagonale (à 45° et passant par la case (0, 0)). De fait, pour $m \geq 1$ et $n \geq 1$,

$$U(m,n) = \binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m+n-n} = \binom{n+m}{m} = U(n,m).$$

Les lignes foncées délimitent les bases X et Y (ici $\{1,1,1,...\}$ et $\{1,1,1,...\}$). Dans le lemme 2, $g(m,n) = f(m+k, n+l)$ s'interprète graphiquement comme la grille obtenue en enlevant les k premières colonnes et les l premières rangées. Dans le lemme 3, $g(m,n) = f(n,m)$ est la grille obtenue en interchangeant les colonnes et les rangées.

Les deux classes de fonctions qui suivent sont les éléments clés dans la décomposition des FDR en somme infinie à l'aide des nombres des bases X et Y. Elles jouent un rôle fondamental dans les développements qui apparaîtront par la suite.

Définition 4 *$X_k : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée par*

$$X_k(m,n) = \begin{cases} U(m-k, n-1) & , \textit{ si } m \geq k \textit{ et } n \geq 1 \\ 1 & , \textit{ si } m = k \textit{ et } n = 0 \\ 0 & \textit{partout ailleurs} \end{cases}$$

$Y_l : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée par

$$Y_l(m,n) = \begin{cases} U(m-1, n-l) & , \textit{ si } n \geq l \textit{ et } m \geq 1 \\ 1 & , \textit{ si } n = l \textit{ et } m = 0 \\ 0 & \textit{partout ailleurs} \end{cases}$$

Les k premières colonnes (0, 1, 2, ..., k-1) de X_k sont nulles.
La première rangée de X_k est nulle sauf la case k qui est de valeur 1.

Les l premières rangées (0, 1, 2, ..., l-1) de Y_l sont nulles.
La première des colonnes de Y_l est nulle sauf la case l qui est de valeur 1.

$X_k(m+k, n+1) = U(m,n)$ et $Y_l(m+1, n+l) = U(m,n)$.

0	0	1	6	21	56	126
0	0	1	5	15	35	70
0	0	1	4	10	20	35
0	0	1	3	6	10	15
0	0	1	2	3	4	5
0	0	1	1	1	1	1
	0	1	0	0	0	0

Figure 2. La grille de X_2

0	1	4	10	20	35	56
0	1	3	6	10	15	21
0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Figure 3. La grille de Y_3

À l'aide de ces observations et de la proposition 1 on peut facilement montrer le résultat qui suit.

Proposition 2 *$X_k : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ et $Y_l : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ sont des FDR.*

Le lemme 5 démontre qu'une FDR est complètement déterminée par ses bases X et Y. Le théorème 1 et son corollaire vont beaucoup plus loin en montrant comment les nombres des bases interviennent dans le développement d'une fonction di-récursive en somme infinie des fonctions élémentaires X_k et Y_l.

Théorème 1 *Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ deux suites quelconques de nombres réels. Il existe une (et une seule) FDR ayant A pour base X et B pour base Y. Si $f : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ est cette FDR, alors*

$$f \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k + \sum_{l=1}^{\infty} b_l Y_l.$$

Démonstration Posons

$$g \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k + \sum_{l=1}^{\infty} b_l Y_l.$$

Puisque $X_k(m,n) = 0$ pour tout $k>m$ et $Y_l(m,n) = 0$ pour tout $l > n$,

$$g(m,n) = \sum_{k=1}^{m} a_k X_k(m,n) + \sum_{l=1}^{n} b_l X_l(m,n),$$

donc g est bien définie.

En prenant les sommations jusqu'à $m+1$ et $n+1$, le lemme 4 montre que la règle (1) de la section (1) s'applique pour $g(m,n)$. De plus $g(s,0) = a_s$ et $g(0,t) = b_t$ pour tout $s \geq 1$ et $t \geq 1$. Il découle du lemme 5 que $f \equiv g$. □

Corollaire 1 *Soit $f : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ une FDR, alors*

$$f \equiv \sum_{k=1}^{\infty} f(k,0) X_k + \sum_{l=1}^{\infty} f(0,l) Y_l$$

et on a pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^{2^*}$

$$f(m,n) = \sum_{k=1}^{m} f(k,0) X_k(m,n) + \sum_{l=1}^{n} f(0,l) Y_l(m,n). \tag{5}$$

Exemple :

$$U \equiv \sum_{k=1}^{\infty} X_k + \sum_{l=1}^{\infty} Y_l$$

car $U(s,0) = 1$ et $U(0,t) = 1$ pour tout $s \geq 1$ et $t \geq 1$.

3 Anneau des FDR

Le lemme 4 montre que $\mathscr{F}$, l'ensemble des FDR, forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Pour donner une structure d'anneau à $\mathscr{F}$ il faut trouver une multiplication pour les fonctions di-récursives. Le produit de deux fonctions dans $\mathbb{R}$ est à écarter, car il ne donne pas une fonction di-récursive : par exemple si $h = UU$ on a $h(2,2) = 36$, alors que $h(2,1) + h(1,2) = 18$.
On voudrait cependant que la multiplication s'approche le plus possible du produit dans $\mathbb{R}$. Le théorème 1 montre qu'il existe une fonction qui préserverait le produit dans $\mathbb{R}$, au moins sur les bases de la multiplication de deux fonctions di-récursives. En fait, si l'on respecte cette condition, le lemme 5 montre aussi que la fonction du théorème 1 est la seule possible.

Définition 5 *Soit $f : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ deux FDR et $h : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$h \equiv \sum_{k=1}^{\infty} f(k,0)g(k,0)X_k + \sum_{l=1}^{\infty} f(0,l)g(0,l)Y_l.$$

Le théorème 1 montre que h est une FDR. On nomme cette FDR produit de f et g et on la note $f \cdot g$ (avec un $\cdot$ pour le différencier du produit fonctionnel dans $\mathbb{R}$).

On calcule $f \cdot g(m,n)$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^{2^*}$ par

$$f \cdot g(m,n) = \sum_{k=1}^{m} f(k,0)g(k,0)X_k(m,n) + \sum_{l=1}^{n} f(0,l)g(0,l)Y_l(m,n). \tag{6}$$

Exemple :

f

3	3	17	47	102
-8	0	14	30	55
5	8	14	16	25
2	3	6	2	9
	1	3	-4	7

g

-2	6	25	67	143
3	8	19	42	76
0	5	11	23	34
3	5	6	12	11
	2	1	6	-1

f.g

-6	-22	-19	-10	-15
-24	-16	3	9	-5
0	8	19	6	-14
6	8	11	-13	-20
	2	3	-24	-7

Figure 4. Les grilles de la multiplication de f par g

Si $g = U$ dans le produit, alors, du fait que $U(s,0) = 1$ et $U(0,t) = 1$ pour tout $s \geq 1$ et $t \geq 1$,

$$h(m,n) = f(m,n),$$

donc U est l'unité multiplicative du produit. De la même façon, si $g = 0$, alors $h = 0$.

Théorème 2 *L'ensemble $\mathscr{F}$ des FDR muni de l'addition du lemme 4 et du produit ci-dessus avec U comme unité et la fonction nulle comme zéro additif, forme un anneau commutatif.*

Démonstration L'unicité de la fonction dans le lemme 5 est un formidable outil pour vérifier une propriété dans $\mathscr{F}$. Il suffit en effet de vérifier cette propriété sur les bases X et Y, et la propriété est automatiquement vérifiée pour le reste des couples de $\mathbb{N}^{2^*}$. L'associativité, la distributivité et la commutativité sur $\mathscr{F}$ n'ont besoin d'être vérifiées que sur les bases. Mais sur les bases, la multiplication de fonctions est simplement le produit de nombres réels et ce produit est associatif, distributif et commutatif. Le lemme 5 garantit que ces propriétés seront vérifiées dans $\mathscr{F}$.

Par exemple, pour la distributivité sur la base X,

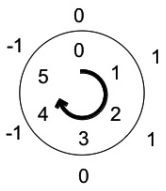
$$\begin{aligned} h \cdot (f+g)(m,0) &= h(m,0)(f(m,0) + g(m,0)) \\ &= h(m,0)f(m,0) + h(m,0)g(m,0) \\ &= h \cdot f(m,0) + h \cdot g(m,0). \end{aligned}$$

□

Avant de poursuivre l'étude de l'anneau des FDR, on va se familiariser avec ces fonctions en présentant des exemples de fonctions di-récursives possédant des propriétés très spéciales.

Définition 6 *Une fonction* $f : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ *est dite périodique s'il existe* $k,l \in \mathbb{N}$ *tels que* $f(m+k,n) = f(m,n)$ *et* $f(m,n+l) = f(m,n)$ *pour tout* $(m,n) \in \mathbb{N}^{2^*}$.

Soit c la fonction définie par



$$\begin{array}{lcl} 0 & \to & 0 \\ 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 1 \\ 3 & \to & 0 \\ 4 & \to & -1 \\ 5 & \to & -1 \end{array}$$

Figure 5. La fonction c

et $r(n)$ le résidu modulo 6 de n. Il est clair d'après le schéma que $c(r(n)) = c(r(n+1)) + c(r(n-1))$, i.e. le terme du milieu est la somme des termes adjacents.

Définition 7 $P_6 : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ *est donnée par* $P_6(m,n) = c(r(m-n))$.

Proposition 3 $P_6 : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ *est une FDR périodique.*

Démonstration

$$\begin{aligned} P_6(m+1,n+1) &= c(r(m+1-(n+1))) \\ &= c(r(m-n)) \\ &= c(r(m-n+1)) + c(r(m-n-1)) \\ &= P_6(m+1,n) + P_6(m,n+1) \end{aligned}$$

et (1) de la section (1) est vérifiée.

Par construction, $P_6(m+6,n) = P_6(m,n) = P_6(m,n+6)$, donc P_6 est périodique avec deux périodes de longueur 6. □

0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0
-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1
-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1
0	1	1	0	-1	-1	0	1	1	0
1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1
1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1
0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0
-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1
-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	1
	1	1	0	-1	-1	0	1	1	0

Figure 6. La grille de P_6

Noter que P_6 est antisymétrique par rapport à la grande diagonale.

On observe aussi la répétition des séquences 0, 1, -1 ou 0, -1, 1 dans les diagonales dans l'autre sens.

4 Fonction C

Considérons les fonctions suivantes

$$u_p(x) = \frac{1+(-1)^x}{2},$$

$$u_i(x) = \frac{1+(-1)^{x+1}}{2}$$

et

$$d_4(x) = (-1)^{\frac{x(x+1)}{2}}.$$

La fonction $u_p(x)$ prend la valeur 1 ou 0 selon que x est un entier pair ou impair, alors que $u_i(x)$ prend la valeur 1 ou 0 selon que x est un entier impair ou pair, et d_4 est une fonction périodique dont la période est {-1, -1, 1, 1}. On a les relations suivantes :

$$u_p(x) = u_i(x \pm 1),$$

$$\frac{d_4(x) + d_4(x-1)}{2} = d_4(x)u_p(x)$$

et

$$d_4(x) = -d_4(x-2).$$

Définition 8 *$C : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ est donnée par*

$$C(m,n) = u_i(n)16\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{n+1}{2}} d_4(m - \frac{n+1}{2}) + u_p(n)16\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{n}{2}} \frac{d_4(m-\frac{n}{2}) + d_4(m-\frac{n}{2}-1)}{2}.$$

Remarquer que dans la somme ci-dessus un des termes est toujours nul.

Si n est impair,

$$C(m,n) = 16\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{n+1}{2}} d_4(m - \frac{n+1}{2}).$$

Si n est pair,

$$C(m,n) = 16\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{n}{2}} \frac{d_4(m-\frac{n}{2}) + d_4(m-\frac{n}{2}-1)}{2}.$$

Proposition 4 *$C : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ est une FDR.*

Démonstration On sépare la démonstration en deux parties selon que n est pair ou impair.

1er cas : n est impair, donc n+1 est pair et

$$\begin{aligned} C(m+1,n+1)-C(m,n+1) &= 16\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{n+1}{2}}\frac{d_4(m+1-\frac{n+1}{2})+d_4(m+1-\frac{n+1}{2}-1)}{2} \\ &\quad -16\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{n+1}{2}}\frac{d_4(m-\frac{n+1}{2})+d_4(m-\frac{n+1}{2}-1)}{2} \\ &= 16\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{n+1}{2}}\frac{d_4(m+1-\frac{n+1}{2})-d_4(m-\frac{n+1}{2}-1)}{2} \\ &= 16\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{n+1}{2}}d_4(m+1-\frac{n+1}{2}) \\ &= C(m+1,n) \end{aligned}$$

car $d_4(x) = -d_4(x-2)$.

Donc (1) de la section (1) est vérifié dans le cas où n est impair.

2e cas : n est pair, donc n+1 est impair et

$$\begin{aligned} C(m+1,n+1)-C(m,n+1) &= 16\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{n+2}{2}}d_4(m+1-\frac{n+2}{2})-16\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{n+2}{2}}d_4(m-\frac{n+2}{2}) \\ &= 16\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{n}{2}}\frac{d_4(m+1-\frac{n+2}{2})-d_4(m-\frac{n+2}{2})}{2} \\ &= 16\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{n}{2}}\frac{d_4(m+1-\frac{n}{2})+d_4(m+1-\frac{n}{2}-1)}{2} \\ &= C(m+1,n) \end{aligned}$$

car $d_4(x) = -d_4(x-2)$.

Donc (1) est aussi vérifié dans le cas où n est pair. □

1/2	1/2	-1/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2	1/2
1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
0	-2	0	2	0	-2	0	2	0
-2	-2	2	2	-2	-2	2	2	-2
-4	0	4	0	-4	0	4	0	-4
-4	-4	4	4	-4	-4	4	4	-4
0	8	0	-8	0	8	0	-8	8
8	8	-8	-8	8	8	-8	-8	8
	0	-16	0	16	0	-16	0	16

Figure 7. La grille de C

On remarque une période de longueur 4 sur les rangées.

En effet, $u_p(x)$ et $u_i(x)$ ont des périodes de longueur 2 et $d_4(x)$ a une période de longueur 4 car $d_4(x+4) = -d_4(x+2) = d_4(x)$.

Définition 9 *Dans la grille de $f : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$, la diagonale k est*

$\{f(0,k), f(1,k-1), f(2,k-2), ..., f(k,0)\}$.

Dans la grille de $C : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ ci-dessus, la diagonale 2 est {0, 8, -16}.

Définition 10 *Une diagonale est nulle si tous ses éléments sont 0.*

Lemme 6 *Dans une FDR la diagonale juste en dessous d'une diagonale nulle est une suite alternée.*

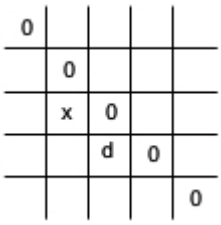


Figure 8. La diagonale k est nulle

Démonstration Soit $f : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ cette FDR, k tel que la diagonale k est nulle, d la valeur d'une case sur la diagonale $k-1$ (juste en dessous) et x la valeur de la case de la diagonale $k-1$ juste au-dessus de d (figure 8).

Alors, $d = f(m, k-1-m)$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$ et $f(m, k-m) = 0$.

Il résulte de (1) que $x = f(m-1, k-m) = f(m, k-m) - f(m, k-1-m) = 0 - d = -d$. □

5 Bases finies

Définition 11 *Une FDR est dite à bases finies si les bases X et Y ne comptent qu'un nombre fini d'images non nulles. B_{finies} est l'ensemble des FDR à bases finies.*

X_k et Y_l sont des exemples de FDR à bases finies. Il est clair que la somme ou la différence de fonctions à bases finies est aussi une fonction à bases finies. D'après la définition du produit $f \cdot g$, il est clair aussi que si une des deux fonctions f ou g est à bases finies, alors $f \cdot g$ est aussi à bases finies.

B_{finies} forme donc un idéal de $\mathscr{F}$.

Proposition 5 *Soit $f : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ une FDR à bases finies. Alors, f est combinaison linéaire de X_k et Y_l .*

Plus spécifiquement, si u et v sont les plus grands indices tels que $f(u,0) \neq 0$ et $f(0,v) \neq 0$, alors

$$f \equiv \sum_{k=1}^{u} f(k,0)X_k + \sum_{l=1}^{v} f(0,l)Y_l.$$

La preuve découle directement du corollaire du théorème 1.

6 FDR finies

Définition 12 *Une FDR est dite finie si et seulement si elle n'a qu'un nombre fini d'images non nulles.*
Son degré est k si la diagonale k est non nulle et que les diagonales $k+1, k+2, k+3...$ sont toutes nulles.

Définition 13 *$B_k : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée par*

$$B_k(m,n) = \begin{cases} (-1)^m \binom{k-n-1}{m-1} & \text{, si } m \geq 1 \text{ et } n+m \leq k, \\ 1 & \text{, si } m = 0 \text{ et } n = k, \\ 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases}$$

0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	0
0	-1	1	0	0	0	0
0	-1	2	-1	0	0	0
0	-1	3	-3	1	0	0
	-1	4	-6	4	-1	0

Figure 9. La grille de B_5

Remarquer la suite alternée de la diagonale 5 en dessous de la diagonale 6 (nulle). En général la diagonale k est une suite alternée de ± 1. La colonne d'indice 1 débute par k cases toutes de valeurs -1 et se poursuit avec des 0.

Proposition 6 *$B_k : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ est une FDR.*

Démonstration Pour $m = 0$, la preuve se déduit des remarques ci-dessus.
Pour $m \geq 1$ et $m + 1 + n + 1 \leq k$,

$$\begin{aligned}
B_k(m+1, n+1) - B_k(m, n+1) &= (-1)^{m+1} \binom{k-n-2}{m} - (-1)^m \binom{k-n-2}{m-1} \\
&= (-1)^{m+1} \frac{(k-n-2)!}{(k-n-m-2)!m!} + (-1)^{m+1} \frac{(k-n-2)!}{(k-n-m-1)!(m-1)!} \\
&= (-1)^{m+1} \frac{(k-n-2)!}{(k-n-m-2)!(m-1)!} \Big(\frac{1}{m} + \frac{1}{k-n-m-1} \Big) \\
&= (-1)^{m+1} \frac{(k-n-2)!}{(k-n-m-2)!(m-1)!} \Big(\frac{k-n-1}{m(k-n-m-1)} \Big) \\
&= (-1)^{m+1} \frac{(k-n-1)!}{(k-n-m-1)!m!} \\
&= (-1)^{m+1} \binom{k-n-1}{m} \\
&= B_k(m+1, n).
\end{aligned}$$

□

Théorème 3 *Toute FDR finie de degré k est combinaison linéaire de $B_1, B_2, ..., B_k$.*

Démonstration par induction sur k. Soit $f : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ cette FDR.

Pour $k = 1$, posons $d = f(0, 1)$; alors il résulte du lemme 6 que $f(1, 0) = -d$ et la grille de f (figure 10) montre que $f = dB_1$.

0	0	0	0
0	0	0	0
d	0	0	0
	-d	0	0

Figure 10. La grille de f

Supposons le résultat vrai pour toute FDR finie de degré $r \leq k - 1$ et soit f de degré k.
Posons $d = f(0, k)$. En vertu du lemme 6, la diagonale k de f est la même que la diagonale k de dB_k (figure 11).

0					
d	0				
	-d	0			
		d	0		
			-d	0	
				...	0

Figure 11. La diagonale k de dB_k

Il s'ensuit que $g = f - dB_k$ est une FDR finie dont la diagonale k (et les suivantes) est nulle. Par induction, g est combinaison linéaire de $B_1, B_2, ..., B_s$ où $s \leq k-1$.

$$g = d_1B_1 + d_2B_2 + ... + d_sB_s$$

et

$$f = d_1B_1 + d_2B_2 + ... + d_sB_s + dB_k$$

sont combinaisons linéaires de $B_1, B_2, ..., B_k$. □

Bien que l'ensemble des FDR finies forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, ce n'est pas un idéal de $\mathscr{F}$. En fait, cet ensemble n'est même pas fermé sous la multiplication. Par exemple, l'équation (6) devient pour $h = B_1 \cdot B_1$ et $n = m$,

$$h(n,n) = 2\sum_{k=1}^{n} B_1(k,0)^2 X_k(n,n) = 2X_k(n,n).$$

$h(1,1), h(2,2), ...$ forme une suite (croissante) d'entiers non nuls et h n'est pas une FDR finie.

0	0	0	0	0
2	0	0	0	0
-5	-2	0	0	0
3	3	2	0	0
	0	-1	-2	0

Figure 12. La grille de D

Exemple : Trouver la décomposition (figure 13) en B_k de la FDR D de la figure 12 en utilisant la technique présentée dans la preuve. Ci-dessous les grilles sont celles des B_k et non celles des multiples de B_k.

D

0	0	0	0	0
2	0	0	0	0
-5	-2	0	0	0
3	3	2	0	0
	0	-1	-2	0

$-2B_3$

0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	-1	0	0	0
0	-1	1	0	0
	-1	2	-1	0

=

E

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
-5	0	0	0	0
3	5	0	0	0
	2	-5	0	0

E

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
-5	0	0	0	0
3	5	0	0	0
	2	-5	0	0

$+5B_2$

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	-1	0	0	0
	-1	1	0	0

=

F

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
3	0	0	0	0
	-3	0	0	0

=

$3B_1$

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
	-1	0	0	0

Figure 13. La décomposition de D

Donc $D = 2B_3 - 5B_2 + 3B_1$.

7 FDR simples

On peut légitimement se demander s'il n'existe pas des fonctions di-récursives données par des fonctions simples comme les polynômes à deux variables ou les fonctions exponentielles. Pour les fonctions de type exponentiel, supposons que $f(m,n) = a^m b^n$ est une FDR.

27 / 8	81 / 8	243 / 8	729 / 8
9 / 4	27 / 4	81 / 4	243 / 4
3 / 2	9 / 2	27 / 2	81 / 2
	3	9	27

Figure 14. La grille de $f(m,n) = \frac{3^{m+n}}{2^n}$

D'après (1) de la section (1), on a $a^{m+1}b^{n+1} = a^{m+1}b^n + a^m b^{n+1}$.

Si on exclut la fonction constante nulle ($a \neq 0$ et $b \neq 0$), on obtient par simplification $ab = a + b$ et donc $a = \frac{b}{b-1}$.

Pour $b = 2$ la fonction est

$$f(m,n) = 2^{m+n}.$$

Pour $b = 3$ la fonction est

$$f(m,n) = \frac{3^{m+n}}{2^n}.$$

Pour $b = 1/2$ la fonction est

$$f(m,n) = \frac{(-1)^m}{2^n}.$$

On vérifie facilement que toutes ces fonctions sont des FDR. La figure 14 est la grille pour $b = 3$.

Proposition 7 *Il n'y a pas de FDR de type polynomial.*

Démonstration Supposons au contraire que $f : \mathbb{N}^{2^*} \to \mathbb{R}$ soit une FDR de type polynomial et soit d le degré en x et y de $f(x,y)$. Une constante non nulle ne pouvant pas être une FDR, $d \geq 1$. Le polynôme possède donc au moins un monôme $ax^s y^t$ où $s + t = d$. Dans le développement de $f(x+1, y+1)$ en x et y, le monôme $x^s y^t$ a aussi a comme coefficient (car tous les autres monômes $x^u y^v$ ont soit $u<s$, soit $v<t$). De même, dans les développements de $f(x+1, y)$ et $f(x, y+1)$ en x et y, le monôme $x^s y^t$ a aussi a comme coefficient.

La fonction $g(x,y) = f(x+1,y) + f(x,y+1) - f(x+1,y+1)$ a donc aussi a comme coefficient du terme de plus haut degré en x et en y. La fonction g est donc un polynôme de degré $d \geq 1$ qui, en vertu de (1), s'annule sur $\mathbb{N}^{2^*}$. Mais les lemmes 2 et 4 montrent que g est une FDR. Il résulte du lemme 5 que g doit être la fonction nulle. Cette contradiction montre que $g(x,y)$, et donc aussi $f(x,y)$, n'existent pas. □

Considérons l'ensemble des FDR qui ont leurs deux premiers éléments de la base X nuls, soit $f(0,1) = f(0,2) = 0$. Cet ensemble est fermé pour l'addition et la soustraction de $\mathscr{F}$. Puisque la multiplication de $\mathscr{F}$ dans les bases est simplement le produit dans $\mathbb{R}$, l'ensemble est aussi fermé pour la multiplication par tous les éléments de $\mathscr{F}$. Cet ensemble forme donc un idéal de $\mathscr{F}$. Les éléments nuls dans les bases jouent un rôle déterminant dans l'étude des idéaux de $\mathscr{F}$. On verra que chaque idéal principal de $\mathscr{F}$ est complètement déterminé par ces éléments nuls dans les bases.

8 Idéaux de $\mathscr{F}$

Soit f une FDR. Les ensembles $ZX(f) = \{m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } f(m,0) = 0\}$ et
$ZY(f) = \{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } f(0,n) = 0\}$ sont les ensembles d'indices des éléments nuls des bases de f. L'ensemble $Z(f) = (ZX(f), ZY(f))$ est le couple de ces sous-ensembles. Désignons l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$ par $\mathbf{P}$.

Soit $(A,B),(C,D) \in \mathbf{P}^2$. On dira que $(A,B) \leq (C,D)$ si et seulement si $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$.

Dans ce qui suit, nous établirons une relation entre $\mathbf{P}^2$ et certaines FDR.

Soit $E \in \mathbf{P}^2$, $E = (E_X, E_Y)$ où $E_X, E_Y \subseteq \mathbb{N}^*$;

pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{, si } i \in E_X \\ 1 & \text{, si } i \notin E_X \end{cases}$$

et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{, si } j \in E_Y \\ 1 & \text{, si } j \notin E_Y. \end{cases}$$

Il résulte du théorème 1 qu'il existe une FDR unique associée au couple de suites $((x_1,x_2,x_3,...),(y_1,y_2,y_3,...))$. On notera w_E cette FDR. Il est manifeste que $Z(w_E) = E$.

Exemple : $w_{(\emptyset,\emptyset)} = U$, $w_{(\mathbb{N}^*-\{k\},\mathbb{N}^*)} = X_k$, $w_{(\mathbb{N}*,\mathbb{N}^*-\{l\})} = Y_l$ et $w_{(\mathbb{N}^*,\mathbb{N}^*)}$ est la fonction nulle.

Définition 14 *Soit f, g deux FDR. On dit que g divise f (et on le note $g \mid f$) s'il existe une FDR h telle que $f \equiv g \cdot h$.*

Lemme 7 *Soit f, g deux FDR. $g \mid f$ si et seulement si $Z(g) \leq Z(f)$.*

Démonstration Si $f = g \cdot h$ et si $g(m,0) = 0$, alors $f(m,0) = g(m,0)h(m,0)$ montre que $f(m,0) = 0$. De même si $g(0,n) = 0$, alors $f(0,n) = 0$. D'où $Z(g) \leq Z(f)$.

Réciproquement, si $Z(g) \leq Z(f)$ on doit trouver une FDR h telle que $f \equiv g \cdot h$.

Les bases de h sont définies par

$$x_i = \begin{cases} f(i,0)/g(i,0) & \text{, si } i \notin ZX(g) \\ 0 & \text{, si } i \in ZX(g) \end{cases}$$

et

$$y_j = \begin{cases} f(0,j)/g(0,j) & \text{, si } j \notin ZX(g) \\ 0 & \text{, si } j \in ZX(g) \end{cases}$$

et h est la FDR du théorème 1.
$h(i,0)g(i,0) = x_i g(i,0) = f(i,0)$ et $h(0,j)g(0,j) = y_j g(0,j) = f(0,j)$; donc $f \equiv g \cdot h$ d'après le lemme 5. □

Définition 15 *Soit $E, F \in \boldsymbol{P}^2$, $E = (E_X, E_Y)$ et $F = (F_X, F_Y)$ où $E_X, E_Y, F_X, F_Y \subseteq \mathbb{N}^*$.*

On note $E \cap F = (E_X \cap F_X, E_Y \cap F_Y)$, $E \cup F = (E_X \cup F_X, E_Y \cup F_Y)$, et $E - F = (E_X - F_X, E_Y - F_Y)$.

Bien que l'union et l'intersection de couples semblent un peu surprenantes, on les utilisera afin de faciliter la lecture du texte. Rappelons que (f) désigne l'idéal principal de f : c'est le sous-ensemble des multiples de f dans $\mathscr{F}$.

Lemme 8 *Soit f et g deux FDR. Alors, $Z(f \cdot g) = Z(f) \cup Z(g)$.*

Démonstration Les identités $f \cdot g(s,0) = f(s,0)g(s,0)$ et $f \cdot g(0,t) = f(0,t)g(0,t)$ pour tout $s \geq 1$ et $t \geq 1$ démontrent que $ZX(f \cdot g) = ZX(f) \cup ZX(g)$ et $ZY(f \cdot g) = ZY(f) \cup ZY(g)$. □

Lemme 9 *Soit I un idéal principal de $\mathscr{F}$ et $f \in \mathscr{F}$ tel que $I = (f)$. Alors, $I = (w_{Z(f)})$.*

Démonstration Posons $g = w_{Z(f)}$. $Z(f) = Z(g)$. Du lemme 7, on a $f \mid g$ et $g \mid f$, donc $(f) = (g)$. □

Corollaire 2 *Les idéaux principaux de $\mathscr{F}$ sont de la forme (w_E) où $E \in \boldsymbol{P}^2$ et l'association $E \to w_E$ est une bijection entre $\boldsymbol{P}^2$ et les idéaux principaux de $\mathscr{F}$.*

Proposition 8 *Soit f et g deux FDR. Alors, $(f) \cap (g) = (f \cdot g)$.*

Démonstration En vertu du lemme 7, si $h \in (f) \cap (g)$, alors $Z(f) \leq Z(h)$ et $Z(g) \leq Z(h)$; donc $Z(f \cdot g) = Z(f) \cup Z(g) \leq Z(h)$ d'après le lemme 8.
On déduit alors du lemme 7 que $f \cdot g \mid h$, $h \in (f \cdot g)$ et $(f) \cap (g) \subseteq (f \cdot g)$.
D'autre part, on a toujours $(f \cdot g) \subseteq (f) \cap (g)$, donc $(f) \cap (g) = (f \cdot g)$. □

Lemme 10 *Soit $E, F \in \boldsymbol{P}^2$, alors $w_E \cdot w_F = w_{E_\cup F}$.*
Si $E \leq F$ alors $w_E \cdot w_F = w_F$.
Si $E \cup F = (\mathbb{N}^*, \mathbb{N}^*)$ alors $w_E \cdot w_F = 0$ et $w_E + w_F = w_{E \cap F}$.

Démonstration Il faut en premier observer que les bases de $w_E \cdot w_F$ ne sont composées que de 0 et de 1. Il résulte du lemme 8 que $w_E \cdot w_F = w_{E \cup F}$. Alors, si $E \leq F$, on a $w_E \cdot w_F = w_F$.

Si $E \cup F = (\mathbb{N}^*, \mathbb{N}^*)$, alors $w_{E \cup F}$ est la fonction nulle et $w_E \cdot w_F = 0$. De plus, $E \cup F = (\mathbb{N}^*, \mathbb{N}^*)$ signifie que pour tout $s \geq 1$ l'une des deux valeurs $w_E(s, 0)$ ou $w_F(s, 0)$ est toujours nulle, et donc

$(w_E + w_F)(s, 0)$ est toujours 1 ou 0, ce dernier cas ne survenant que dans $E \cap F$.

On a alors $(w_E + w_F)(s, 0) = w_{E \cap F}(s, 0)$. De même, pour tout $t \geq 1$, $(w_E + w_F)(0, t) = w_{E \cap F}(0, t)$.

On conclut, d'après le lemme 5, que $w_E + w_F = w_{E \cap F}$. □

Notation A' est complément d'un ensemble A dans son ensemble de référence.

Lemme 11 *Soit $E, F \in \boldsymbol{P}^2$, alors $(w_E) + (w_F) = (w_{E \cap F})$.*

Démonstration En utilisant les résultats précédents et en notant F' le complément de F dans $(\mathbb{N}^*, \mathbb{N}^*)$, on a
$w_{E \cap F} = w_{(E \cup F') \cap F} = w_{E \cup F'} + w_F = w_E \cdot w_{E \cup F'} + w_F \in (w_E) + (w_F)$ donc $(w_{E \cap F}) \subseteq (w_E) + (w_F)$.
$w_E = w_{E \cap F} \cdot w_E \in (w_{E \cap F})$ et $w_F = w_{E \cap F} \cdot w_F \in (w_{E \cap F})$ d'où $(w_E) + (w_F) \subseteq (w_{E \cap F})$. □

Corollaire 3 *La somme de deux idéaux principaux de $\mathscr{F}$ est un idéal principal.*

Démonstration C'est une conséquence directe des lemmes 9 et 11. □

Proposition 9 *Soit f une FDR. Alors,*
a) f est inversible si et seulement si $Z(f) = (\emptyset, \emptyset)$,
b) f est diviseur de 0 si et seulement si $Z(f) \neq (\emptyset, \emptyset)$,
c) f est idempotente si et seulement si $f = w_E$ pour un certain $E \in \boldsymbol{P}^2$.

Démonstration

a) $f \mid U$ si et seulement si $Z(f) \leq Z(U)$ en vertu du lemme 7 et $Z(U) = (\emptyset, \emptyset)$.

b) Soit $E = (\mathbb{N}^* - ZX(f), \mathbb{N}^* - ZY(f))$ et $g = w_E$.

$g \neq 0$ car $Z(f) \neq (\mathbb{N}^*, \mathbb{N}^*)$. Suite au lemme 8 on a $Z(f \cdot g) = (\mathbb{N}^*, \mathbb{N}^*)$, donc $f \cdot g = 0$.

Réciproquement, si $f \cdot g = 0$ et $g \neq 0$, alors $Z(f) \neq (\emptyset, \emptyset)$ sinon d'après a) il existe une FDR h telle que $h \cdot f = U$ et donc $h \cdot f \cdot g = U \cdot g = g = h \cdot 0 = 0$.

c) w_E est idempotente en vertu du lemme 10. Si $f \cdot f = f$, alors les bases ne peuvent contenir que des 0 et des 1. Donc $f = w_{Z(f)}$. □

Note : il n'y a pas de FDR nilpotente autre que 0 car si $f \cdot f \cdot \cdots \cdot f = 0$, le lemme 8 montre que

$$Z(f) = Z(0) = (\mathbb{N}^*, \mathbb{N}^*)$$

et par conséquent $f = 0$.

Soit $I_1, I_2, I_3, ...$ une suite infinie d'idéaux de $\mathscr{F}$. Alors,

$$\sum_{k=1}^{\infty} I_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (I_1 + I_2 + \cdots + I_k)$$

est aussi un idéal.

Proposition 10 *Soit B_{finies} l'ensemble des FDR à bases finies. C'est un idéal non principal de $\mathscr{F}$ et*

$$B_{finies} = \sum_{k=1}^{\infty} (X_k) + \sum_{l=1}^{\infty} (Y_l).$$

Démonstration De la définition même de la multiplication dans $\mathscr{F}$, il est clair que B_{finies} est un idéal. L'égalité provient de la proposition 5.

Supposons que cet idéal soit principal et soit f une FDR telle que $B_{finies} = (f)$. Alors $f \mid X_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Il résulte du lemme 7 que $Z(f) \leq Z(X_k)$ et $ZX(f) \subseteq \mathbb{N}^* - \{k\}$ pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$. Mais l'intersection des $\mathbb{N}^* - \{k\}$ est $\emptyset$ d'où $ZX(f) = \emptyset$. De la même façon $ZY(f) = \emptyset$. En vertu de la proposition 9, f est inversible et $B_{finies} = (f) = \mathscr{F}$. Cette contradiction montre que B_{finies} n'est pas principal. □

Proposition 11 *Soit $X'_k = U - X_k$ et $Y'_l = U - Y_l$, alors (X'_k) et (Y'_l) sont des idéaux premiers de $\mathscr{F}$.*
Tout idéal premier qui n'est ni (X'_k) ni (Y'_l) contient B_{finies}.
Les idéaux premiers de $\mathscr{F}$ sont maximaux.

Démonstration $Z(X'_k) = (\{k\}, \emptyset)$. Soit $f \in \mathscr{F} - (X'_k)$. Posons $E = Z(X'_k)$ et $F = Z(f)$.

D'après les lemmes 9 et 11, $(X'_k) + (f) = (w_E) + (w_F) = (w_{E \cap F})$ et $E \cap F$ est soit $(\{k\}, \emptyset)$, soit $(\emptyset, \emptyset)$. Dans le premier cas $f \in (X'_k)$, ce qui contredit le choix de f. Donc $E \cap F = (\emptyset, \emptyset)$ et $(X'_k) + (f) = \mathscr{F}$.

Il n'y a donc aucun idéal intermédiaire entre (X'_k) et $\mathscr{F}$ et (X'_k) est maximal et donc premier. De même (Y'_l) est premier.

Si $E \in \mathbf{P}^2$ et $E \neq (\mathbb{N}^*, \mathbb{N}^*)$. Alors, w_E est idempotente et $\{w_E\}$ est un ensemble multiplicativement fermé et disjoint de $(w_{E'})$ suite au lemme 7. Le lemme de Zorn montre qu'alors $(w_{E'})$ peut être étendu à un idéal I qui est maximal parmi les idéaux disjoints de $\{w_E\}$ et contenant $(w_{E'})$. I est alors un idéal premier de $\mathscr{F}$. Si E et E' sont infinis, alors I n'est (X'_k) ou (Y'_l) pour aucun k, l dans $\mathbb{N}^*$. Dans ce cas $B_{finies} \subseteq I$. En effet on a $X_k \cdot X'_k = X_k \cdot (U - X_k) = 0$ car X_k est un idempotent. Comme I est premier, on a $X_k \in I$ ou $X'_k \in I$. Ce dernier cas étant exclu, on a $X_k \in I$. De même

$Y_l \in I$, donc $B_{finies} \subseteq I$. Cette propriété est vraie pour tous les idéaux premiers qui ne sont ni (X'_k) ni (Y'_l).

Montrons enfin que tout idéal premier I de $\mathscr{F}$ est maximal.
Soit $f \in \mathscr{F} - I$ et $E = Z(f)$. Le lemme 8 montre que $f \cdot w_{E'} = 0$ et comme I est premier, on a $w_{E'} \in I$. Alors, d'après le lemme 11, $(f)+(w_{E'}) = (w_E)+(w_{E'}) = (w_{E\cap E'}) = (w_{(\emptyset,\emptyset)}) = (w_U) = \mathscr{F}$.
Ainsi I est maximal. □

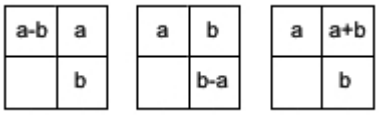
Dans les sections qui suivent, on présente les fonctions di-récursives de façon graphique plutôt qu'algébrique. L'équation (5) dans le corollaire du théorème 1 montre qu'une grille partielle dont les cases respectent la règle (1) de la section (1) peut toujours être étendue à une grille infinie représentant une FDR. Les résultats qui suivent mettront en lumière les différentes techniques pour « construire » des fonctions di-récursives à partir d'éléments spécifiques. On s'intéressera en particulier aux grilles qui contiennent des cases nulles et on verra qu'elles forment toujours des figures triangulaires spéciales. On verra aussi comment insérer des suites polynomiales comme rangées d'une FDR de telle sorte que la rangée supérieure donne les sommes partielles de la suite.

9 Interprétations graphiques

L'identité (1) de la section (1) peut être interprétée sur la grille d'une FDR par le schéma de la figure 15. Les points représentent les 3 cases (valeurs) de f dans (1). Si deux des points sont connus, le troisième est aussi connu.

Figure 15. Si deux des points sont connus, le troisième est aussi connu

Les trois carrés de la figure 16 représentent les 3 cas possibles. Remarquer que la case inférieure gauche n'est jamais utilisée. Le nom des **c**arrés est déterminé par la position **v**erticale, **h**orizontale ou **o**blique des cases (indépendantes) a et b.



CV CH CO

Figure 16 Les trois cas possibles

Le triangle ci-dessus avec les trois points (moitié supérieure d'un carré séparé par la diagonale descendante) est nommé triangle DR et noté TDR. Dans la grille d'une FDR, un triangle formé en reliant le centre des cases est aussi noté TDR. Le TDR est dit nul si toutes ses cases sont zéro.

Un segment vertical est une suite de cases adjacentes sur une colonne de la grille. Un segment horizontal est une suite de cases adjacentes sur une rangée de la grille. Un segment oblique est une suite de cases adjacentes sur une diagonale k (descendante) de la grille, pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Le segment est dit constant si toutes ses cases ont la même valeur. Il est dit alterné si la valeur des cases forme une suite alternée. Il est dit nul si la valeur de toutes ses cases est zéro.

Une case est dite en bordure d'un segment si elle est connectée à au moins une case du segment, mais ne fait pas partie du segment.

Dans le lemme 12 qui suit, seuls le segment et la case connectée sont connus. Cependant si la règle (1) s'applique, les valeurs des cases à proximité du segment pourront aussi être connues.

Lemme 12 *Une case en bordure d'un segment est toujours étendue à un unique segment parallèle respectant la règle (1) de la façon suivante :*
a) Le segment parallèle est juste au-dessus du segment horizontal et compte une case de plus à gauche (sauf si le segment rencontre la base Y). Si le segment des a_i est nul, b et les b_i forment un segment constant (qui devient nul si $b = 0$).

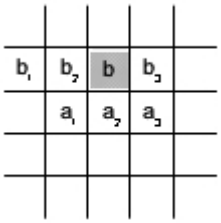


Figure 17. Horizontal

b) Le segment parallèle est juste à droite du segment vertical et compte une case de plus vers le bas. (sauf si le segment rencontre la base X). Si le segment des a_i est nul, b et les b_i forment un segment constant (qui devient nul si $b = 0$).

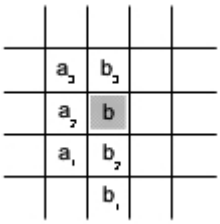


Figure 18. Vertical

c) Le segment parallèle est juste en dessous du segment oblique et compte une case de plus vers le bas (sauf si le segment rencontre la base X et/ou la base Y). Si le segment des a_i est nul, b et les b_i forment un segment alterné (qui devient nul si $b = 0$).

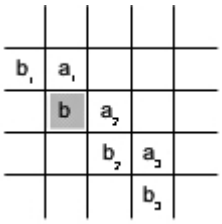


Figure 19. Oblique

Démonstration Dans les grilles (17), (18) et (19), le segment est $\{a_1, a_2, a_3\}$ et la case en bordure d'un segment est **b**. Le segment parallèle est complété par b_1, b_2, b_3. La preuve découle directement des carrés CH, CV et CO précédents. □

Dans le lemme 13 qui suit, seul le segment est connu. Cependant, si la règle (1) s'applique, les valeurs des cases du TDR associé au segment pourront aussi être connues.

Lemme 13 *Dans la grille, un segment est toujours étendu à un TDR unique respectant la règle (1) de la façon suivante :*
a) Le TDR est en dessous du segment horizontal. Le triangle pourrait être tronqué par la base X (en pointillé). Si le segment des a_i est nul, tous les autres éléments du TDR sont nuls.

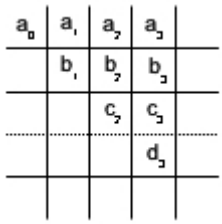


Figure 20. Horizontal

b) Le TDR est à gauche du segment vertical. Le triangle pourrait être tronqué par la base Y (en pointillé). Si le segment des a_i est nul, tous les autres éléments du TDR sont nuls.

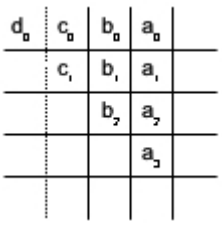


Figure 21. Vertical

c) Le TDR est au-dessus du segment oblique. Si le segment des a_i est nul, tous les autres éléments du TDR sont nuls.

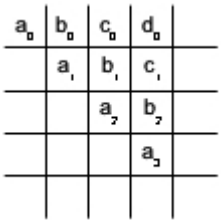


Figure 22. Oblique

Démonstration Dans les grilles ci-contre, le segment est $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$. Les segments $\{b_i\}$, $\{c_i\}$ et $\{d_i\}$ complètent le TDR. La preuve découle directement des carrés CH, CV et CO précédents. □

Définition 16 *Deux cases d'une grille de FDR sont dites connectées si et seulement si elles sont deux cases foncées du carré ci-contre. Elles sont donc deux sommets d'un TDR.*

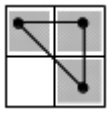


Figure 23. Cases connectées

Définition 17 *Une suite $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de cases est dite connectée si et seulement si c_i, c_{i+1} sont connectées pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Un ensemble S de cases est dit connecté si et seulement si chaque paire de cases de S appartient à au moins une suite connectée de cases de S.*

Définition 18 *Soit S un ensemble fini de cases d'une grille de FDR. L'enveloppe TDR de S est le plus petit TDR contenant S. L'enveloppe pourrait être tronquée par la base X et/ou la base Y.*

Lemme 14 *Soit S un ensemble fini de cases d'une grille de FDR. Chaque côté de l'enveloppe TDR de S contient au moins un élément de S.*

Note : un sommet du triangle fait simultanément partie des deux côtés adjacents.

Démonstration Dans le cas contraire, on pourrait enlever une rangée, une colonne ou une diagonale à l'enveloppe et obtenir un TDR plus petit contenant l'ensemble S. □

Théorème 4 *L'enveloppe TDR d'un ensemble fini S connecté de cases nulles d'une grille de FDR contient uniquement des cases nulles.*

Démonstration Si le côté vertical de l'enveloppe contient uniquement des cases nulles, le lemme 13b démontre le résultat.

Supposons que le côté vertical de l'enveloppe contient des cases non nulles. Alors, le lemme 14 montre que le côté vertical contient au moins une case nulle de S. Sur le côté vertical, cette case nulle de S peut être au-dessus ou au-dessous d'une case nulle dans l'enveloppe.

Supposons qu'il n'existe aucune case non nulle de l'enveloppe au-dessus de cette case nulle de S (voir figure 24). Le côté vertical est donc constitué d'un sommet nul et d'une suite descendante de cases nulles, dont une appartenant à S, jusqu'à une case non nulle. Désignons par $\mathbf{d}$ la valeur de cette case non nulle. Le lemme 13b et le lemme 12c montrent que le segment diagonal alterné $\pm\mathbf{d}$, sépare le TDR nul du reste de l'enveloppe. Alors, S n'est plus un ensemble connecté.

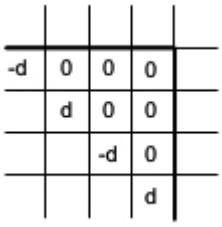


Figure 24

Par conséquent il existe au moins une case non nulle de l'enveloppe au-dessus de la case nulle de S sur le côté vertical. Il pourrait, ou non, y avoir une case non nulle en dessous de la case nulle de S, dans l'enveloppe TDR.

Supposons qu'il n'existe pas de telle case non nulle (voir figure 25). À partir du sommet du bas du côté vertical, il y a donc une suite ascendante de cases nulles, dont une appartenant à S, jusqu'à la case non nulle $\mathbf{d}$. Le lemme 13b et le lemme 12a montrent que le segment horizontal constant $\mathbf{d}$ sépare le TDR nul du reste de l'enveloppe. Alors, S n'est plus un ensemble connecté.

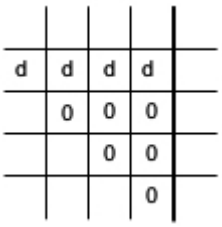


Figure 25

On en conclut qu'il doit y avoir une seconde case non nulle en dessous de la case nulle de S sur le côté vertical de l'enveloppe TDR (voir figure 26). Appelons $\mathbf{d}$ et $\mathbf{e}$ les cases non nulles les plus près de la case nulle de S, situées de part et d'autre de la case nulle de S, sur le côté vertical. Le lemme 13b et le lemme 12a et 12c montrent que le segment horizontal constant $\mathbf{d}$ et le segment diagonal alterné $\pm\mathbf{e}$ séparent le TDR nul du reste de l'enveloppe. Alors, S n'est plus un ensemble connecté.

d	d	d	d	
-e	0	0	0	
	e	0	0	
		-e	0	
			e	

Figure 26

Cette contradiction montre qu'il ne peut exister de case non nulle sur le côté vertical de l'enveloppe TDR de S. L'enveloppe est donc constituée uniquement de cases nulles. □

Exemple : une FDR avec une enveloppe nulle en îlot.

2	5	8	11	14	19	33
4	3	3	3	3	5	14
3	-1	0	0	0	2	9
-19	-4	1	0	0	2	7
21	15	5	-1	0	2	5
-5	-6	-10	-6	1	2	3
0	-1	-4	4	7	1	1

Figure 27. Enveloppe nulle

On peut étendre la notion d'enveloppe TDR à un ensemble connecté infini S. Appelons E cette enveloppe et soit $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \ldots$ une suite de sous-ensembles finis connectés de S de plus en plus grands tels que l'union de ces sous-ensembles soit S. Si E_i désigne l'enveloppe TDR de S_i alors $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \ldots$ et E est défini comme $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots$ Le côté vertical/horizontal de E peut être visible ; dans ce cas il est de longueur infinie, ou bien invisible s'il est repoussé à l'infini par les S_i. Il pourrait être tronqué par les bases.

Le théorème 4 s'applique alors aussi pour un ensemble connecté infini, car E est l'union de E_i qui n'ont que des cases nulles. X_k et Y_l (définies plus loin) sont des exemples de FDR ayant des enveloppes TDR infinies. La première est tronquée par la base X, la seconde par la base Y. Les FDR finies (comme B_k) sont des exemples de FDR ayant des enveloppes TDR infinies tronquées par les deux bases simultanément.

10 Suite et somme

Théorème 5 *Pour tout k entier positif et pour toute suite de nombres réels, il existe une infinité de FDR ayant cette suite comme rangée (colonne) d'indice k dans sa représentation graphique, de telle sorte que la rangée (colonne) d'indice $k + 1$ soit la suite des sommes partielles de la première suite.*

Démonstration Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ la suite de nombres réels. On place cette suite dans la rangée d'indice k d'une grille (voir figure 28). Le lemme 13a permet alors de compléter les lignes en dessous de la suite $a_0, a_1, a_2, \ldots$ pour former un TDR infini.

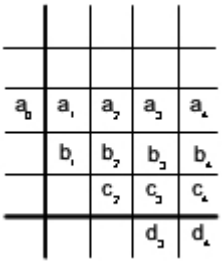


Figure 28

On choisit ensuite un nombre quelconque x et on le place dans la case de la première rangée juste en dessous de la diagonale k (celle qui commence par a_0) (voir figure 29). Le lemme 12c permet de compléter la diagonale se terminant par x. On répète en plaçant un autre nombre y à gauche de x et ainsi de suite jusqu'à la diagonale 1.

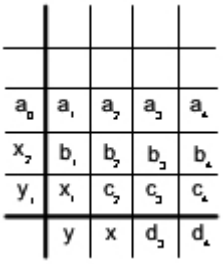


Figure 29

On remplit la case au-dessus de a_0 avec la valeur a_0 et les autres cases de la première colonne avec des nombres quelconques $u_0, v_0, \ldots$ (voir figure 30). L'application répétée du lemme 12a permet de compléter chacune des lignes commençant par $a_0, u_0, v_0, \ldots$ pour former une grille de FDR qu'on nommera f. Notons $s_1, s_2, s_3, \ldots$ les valeurs des cases en dessous de la ligne commençant par u_0 et à droite du second a_0. L'identité (2) du lemme 1 s'écrit, pour $k = m$,

$$f(m,n) = f(0,n) + \sum_{k=1}^{m} f(i, n-1)$$

Figure 30

et pour $n = k + 1$,

$$f(m, k+1) = f(0, k+1) + \sum_{k=1}^{m} f(i, k) = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=0}^{m} a_i = s_i.$$

Donc les s_i sont les sommes partielles.

Les valeurs arbitraires de $x, y, \ldots$ et $u_0, v_0, \ldots$ montrent qu'il y a une infinité de FDR qui répondent aux critères de l'énoncé du théorème.

Un raisonnement analogue sur les colonnes démontre que la suite $a_0, a_1, a_2, \ldots$ peut être placée sur une colonne plutôt que sur une rangée. □

Théorème 6 *Toute suite polynomiale est la rangée d'une FDR à bases finies telle que la rangée (colonne) qui la suit est la suite des sommes partielles. De plus, si r est le degré du polynôme, il existe une seule telle FDR ayant la suite polynomiale à la rangée (colonne) r +1 et possédant une base X (base Y) nulle et telle que l'autre base a des cases toutes nulles, sauf peut-être les r + 2 premières.*

Démonstration On utilise la construction du théorème 5 avec des valeurs zéros pour $x, y, \ldots$, pour $u_0, v_0, \ldots$, et pour $k = r + 1$. Soit $p(x)$ le polynôme de la suite. Dans la rangée d'indice $k - 1$, les valeurs des cases d'indice m (pour tout $m \geq 1$, c'est-à-dire à droite de la diagonale k) sont $p(m) - p(m-1)$ par le carré CH. $p(m) - p(m-1)$ est un polynôme de degré $r - 1$. De même, les valeurs des cases de la rangée d'indice $k - 2$ (à droite de la diagonale k) sont données par un polynôme de degré $r - 2$. Et ainsi de suite jusqu'à la rangée 1 qui est donnée par un polynôme de degré 0, soit un terme constant. La première rangée n'aura alors que des cases nulles (les cases à gauche ou sur la diagonale k étant nulles d'après le choix de $x, y, \ldots$). □

$\sum x^3$ →	1	9	36	100	225	441
x^3 →	1	8	27	64	125	216
	1	7	19	37	61	91
	0	6	12	18	21	30
	6	6	6	6	6	6
		0	0	0	0	0

Figure 31

Exemple : La suite des entiers au cube (dans la figure 31 $x = m + 1$). En appliquant le théorème 5 à cette FDR (appelons-la f), on obtient

$$f(m,n) = 6Y_1(m,n) + 0Y_2(m,n) + 1Y_3(m,n) + 1Y_4(m,n) + 1Y_5(m,n), \ \textit{pour } m \geq 1.$$

La rangée des cubes a pour indice $n = 4$.

$$\begin{aligned} f(m,4) &= 6U(m-1,3) + 0U(m-1,2) + 1U(m-1,1) + 1(1) + 1(0) \\ &= 6\binom{m+2}{3} + \binom{m}{1} + 1 \\ &= (m+1)^3. \end{aligned}$$

La rangée des sommes partielles a pour indice $n = 5$.

$$\begin{aligned} s_m &= f(m,5) \\ &= 6U(m-1,4) + 0U(m-1,3) + 1U(m-1,2) + 1U(m-1,1) + 1U(m-1,0) \\ &= 6\binom{m+3}{4} + \binom{m+1}{2} + \binom{m}{1} + 1 \\ &= \Big(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\Big)^2. \end{aligned}$$

Le procédé ci-dessus peut être répété pour obtenir la somme d'une suite de nombres donnée par un polynôme : on place le début de la suite dans une rangée, on calcule les différences des deux cases à la rangée en dessous et on continue jusqu'à obtenir une rangée de termes constants. Le nombre de rangées ainsi calculées est $r+1$ où r est le degré du polynôme. On ferme la grille vers le bas avec une rangée de cases nulles. On complète la grille en calculant (avec CO) les diagonales $r, r-1, r-2, \ldots, 1$. Si $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{r+1}$ sont les valeurs du début de chacune des rangées de la grille complétée, alors

$$f(m,n) = b_1Y_1(m,n) + b_2Y_2(m,n) + b_3Y_3(m,n) + \ldots + b_rY_r(m,n) + b_rY_{r+1}(m,n).$$

Noter que Y_r et Y_{r+1} ont le même coefficient b_r.
Les sommes partielles sont obtenues en remplaçant n par $r + 2$.

Remarque Une variante du procédé permet de simplifier grandement le travail en évitant tout le calcul des diagonales. On calcule comme précédemment les lignes de différence de deux termes

jusqu'à la ligne des constantes. Si $b_1, b_2, \ldots, b_{r+1}$ sont les valeurs du début de chacune des lignes, alors les sommes partielles sont données par

$$\begin{aligned} s_m &= b_1 \binom{m}{r+1} + b_2 \binom{m}{r} + b_3 \binom{m}{r-1} + \cdots + b_{r+1} \binom{m}{1} \\ &= b_1 \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r)}{(r+1)!} + b_2 \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r-1)}{(r)!} + \ldots + b_{r+1} m. \end{aligned}$$

Dans l'exemple ci-dessus, pour le polynôme x^3, les valeurs de b_1, b_2, b_3, b_4 sont 6, 12, 7, 1.

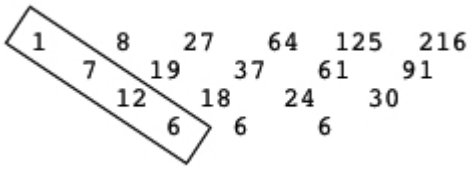


Figure 32. Calcul des b_i

$$\begin{aligned} s_m &= 6\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{(4)!} + 12\frac{m(m-1)(m-2)}{(3)!} + 7\frac{m(m-1)}{(2)!} + 1m \\ &= \Big(\frac{m(m+1)}{2}\Big)^2. \end{aligned}$$

11 Conclusion

L'étude de fonctions di-récursives est grandement simplifiée par la décomposition de ces fonctions en fonctions élémentaires X_k et Y_l. Les bases X et Y qui caractérisent une FDR déterminent ainsi l'identité de la fonction. L'examen sous forme de grille d'une fonction et les outils graphiques développés permettent une approche plus intuitive de cette classe de fonctions. La multiplication définie pour les fonctions confère à la classe une structure d'anneau apportant une vision plus globale des FDR. Les constructions de fonctions di-récursives présentées en exemple illustrent la richesse et la complexité de cette classe.

Remerciements à Robert Bradley, Ph. D. pour son inestimable travail de correction et ses précieux conseils sur la rédaction de ce document.

Références

[1] Atiyah, M. F., MacDonald, I. G. (1969). *Introduction to Commutative Algebra*, Boston, Massachusetts, Addison-Wesley, 128pp.

[2] Clark, P. L. *Commutative Algebra*, `http://math.uga.edu/~pete/integral.pdf`

[3] Kaplansky, I. (1970). *Commutative Rings*, Boston, Massachusetts, Allyn and Bacon inc., 180 pp.

[4] Wikipedia, *Zorn's Lemma*, `http://en.wikipedia.org/wiki/Zorn\_Lemma`