Association
mathématique
du Québec

AMQ en action, suite

Note de la rédaction

Exceptionnellement cette année, nous publions les solutions des concours dans le même numéro que les questionnaires. Toutefois, nous les publions séparément de manière à ce que ceux qui souhaitent travailler sur les questions sans avoir les solutions sous les yeux puissent le faire. Les questions figurent donc aux pages 13 à 16 et les solutions aux pages 69 à 77. La liste des élèves ayant eu les meilleurs résultats paraîtra dans un numéro ultérieur.

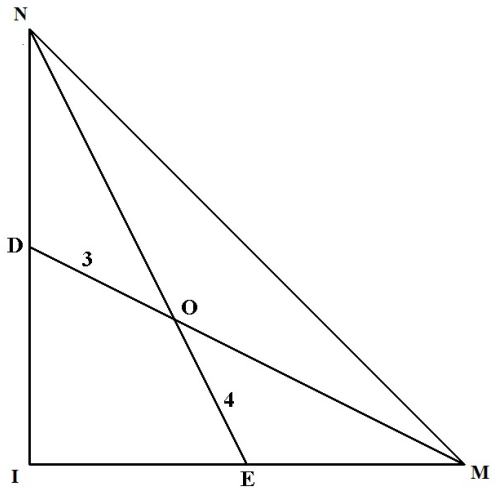
Solutions du concours de l'AMQ 2013, ordre collégial

***Note** : L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

1. Le triangle ennemi

Jacqueline se casse la tête avec un triangle NMI, rectangle en I, dont elle doit calculer l'aire. Sa seule information est que les médianes MD et NE se croisent en O de telle sorte que la longueur de OD est de 3 et celle de OE est de 4. Aidez-la à trouver l'aire de ce triangle.

Solution :



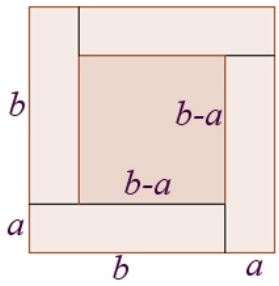
Le point de rencontre des médianes d'un triangle se situe au tiers de celles-ci, à partir du point milieu d'un côté. On sait donc que $\overline{OM}$ mesure 6 et que $\overline{ON}$ mesure 8.

À partir du triangle NIE, on obtient : $m\overline{NI}^2 + m\overline{IE}^2 = 12^2$ (1).
De même, à partir du triangle MID, on a : $m\overline{ID}^2 + m\overline{IM}^2 = 9^2$
$\Rightarrow (\frac{1}{2}m\overline{NI})^2 + (2m\overline{IE})^2 = 9^2$ (2).
À partir des équations (1) et (2), on obtient facilement $m\overline{NI} = 2\sqrt{33}$ et $m\overline{IE} = 2\sqrt{3}$.
Il suit que : $Aire = \frac{b\times h}{2} = \frac{2m\overline{IE}\times m\overline{NI}}{2} = 12\sqrt{11}$.

2. Le résultat mystère

Simon vous propose un jeu où vous choisissez au hasard deux nombres réels positifs. Il vous demande ensuite de calculer le carré de la somme des deux nombres et de diviser le tout par le produit des deux nombres. Il affirme alors que le résultat mystère que vous avez obtenu est plus grand ou égal à quatre. Montrer que Simon ne se trompera jamais avec cette affirmation.

Solution 1 :



On peut supposer, sans perte de généralité, que $b > a$.
Selon le dessin : $(a+b)^2 = 4ab + (b-a)^2$.
En divisant par ab : $\frac{(a+b)^2}{ab} = 4 + \frac{(b-a)^2}{ab}$.
Alors, comme le dernier terme est positif : $\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4$.

Solution 2 :

Tout nombre carré étant positif : $(a-b)^2 \geq 0$.
En développant : $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$.
En additionnant : $4ab$: $a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$.
En factorisant : $(a+b)^2 \geq 4ab$.
En divisant par ab : $\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4$.

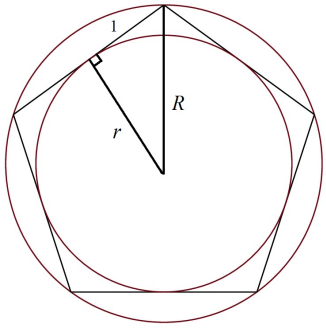
Remarque : Il est aussi possible de démontrer le résultat en utilisant la dérivée.

3. Un π coincé

Montrer que pour tous les polygones réguliers dont l'arête mesure 2 unités, l'aire de l'anneau délimité par le cercle circonscrit au polygone et le cercle inscrit dans le polygone sera toujours égale à π.

Solution :

Peu importe le nombre de côtés de la figure régulière, on peut toujours construire le triangle rectangle suivant où r est le rayon du cercle inscrit et R celui du cercle circonscrit (le petit côté du triangle étant la demi-longueur d'un côté du polygone).



On a donc que $R^2 = r^2 + 1 \Rightarrow R^2 - r^2 = 1$.

On cherche l'aire de l'anneau compris entre les deux cercles soit :

$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi * 1 = \pi$.

4. Deux dragons qui font boom !

Dans un jeu vidéo, deux dragons magiques volent dans un espace en trois dimensions. $P_1(t)$ et $P_2(t)$ donnent les positions (x, y, z) des dragons au moment t, où t est en secondes.

$P_1(t) = \left(t8^t, 2\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right), \left\lfloor t^3 - 4t^2 + 5t \right\rfloor\right)$ et $P_2(t) = \left(301 - t, \frac{17}{6} - t, t - \frac{1}{3}\right)$.

Est-ce que les deux dragons entreront en collision ? Si oui, donner le nombre total de collisions et le moment t correspondant à chacune des collisions.

Remarque : $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Solution :

Soit (x, y, z) la position de la collision au temps t.

Selon la coordonnée en y, il faut que $2\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) = \frac{17}{6} - t$.

Or, l'image de la fonction $\sin(x)$ étant entre -1 et 1, l'image de la fonction $2\sin^2(x)$ sera entre 0 et 2. Cela signifie que $\frac{17}{6} - t$ se situe entre 0 et 2 et ainsi toutes les valeurs possibles de t se retrouvent dans l'intervalle $\left[\frac{5}{6}, \frac{17}{6}\right]$.

Selon la coordonnée en z, il faut que $t - \frac{1}{3}$ soit entier à cause de la partie entière dans P_2. Donc t est de la forme $\frac{3n+1}{3}$ pour un certain entier n.

Selon y et z, les seules valeurs de t possibles de la forme $\frac{3n+1}{3}$ dans l'intervalle $\left[\frac{5}{6}, \frac{17}{6}\right]$ sont $\frac{4}{3}$ et $\frac{7}{3}$.

Calculons donc les positions pour ces deux temps possibles :

$$\begin{aligned} P_1\left(\tfrac{7}{3}\right) &= \left(\left(\tfrac{7}{3}\right) 8^{\left(\frac{7}{3}\right)}, 2\sin^2\left(\frac{\pi\left(\frac{7}{3}\right)}{2}\right), \left\lfloor \left(\tfrac{7}{3}\right)^3 - 4\left(\tfrac{7}{3}\right)^2 + 5\left(\tfrac{7}{3}\right) \right\rfloor\right) \\ &= \left(\left(\tfrac{7}{3}\right) 2^7, 2\left(\frac{-1}{2}\right)^2, \left\lfloor \frac{343}{27} - \frac{196}{9} + \frac{35}{3} \right\rfloor\right) \\ &= \left(\frac{896}{3}, \frac{1}{2}, 2\right). \end{aligned}$$

$$P_2\left(\tfrac{7}{3}\right) = \left(301 - \left(\tfrac{7}{3}\right), \tfrac{17}{6} - \left(\tfrac{7}{3}\right), \left(\tfrac{7}{3}\right) - \tfrac{1}{3}\right) = \left(\tfrac{896}{3}, \tfrac{1}{2}, 2\right).$$

Donc y a une collision au moment $t = \frac{7}{3}$ secondes.

$$\begin{aligned} P_1\left(\tfrac{4}{3}\right) &= \left(\left(\tfrac{4}{3}\right) 8^{\left(\frac{4}{3}\right)}, 2\sin^2\left(\frac{\pi\left(\frac{4}{3}\right)}{2}\right), \left\lfloor \left(\tfrac{4}{3}\right)^3 - 4\left(\tfrac{4}{3}\right)^2 + 5\left(\tfrac{4}{3}\right) \right\rfloor\right) \\ &= \left(\left(\tfrac{4}{3}\right) 2^4, 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2, \left\lfloor \frac{64}{27} - \frac{64}{9} + \frac{20}{3} \right\rfloor\right) \\ &= \left(\frac{64}{3}, \frac{3}{2}, 1\right). \end{aligned}$$

$$P_2\left(\tfrac{4}{3}\right) = \left(301 - \left(\tfrac{4}{3}\right), \tfrac{17}{6} - \left(\tfrac{4}{3}\right), \left(\tfrac{4}{3}\right) - \tfrac{1}{3}\right) = \left(\tfrac{899}{3}, \tfrac{3}{2}, 1\right).$$

Donc il n'y a pas de collision au moment $t = \frac{4}{3}$ secondes. En conclusion, il n'y a qu'une seule collision et elle a lieu au moment $t = \frac{7}{3}$ secondes.

5. Remonter à la racine du symbole

Vous devez déchiffrer un code vous donnant la valeur du nombre Ξ vérifiant l'égalité :

$$\Xi = \left|\sqrt{\Lambda} - \tfrac{1}{\sqrt{\Lambda}}\right|.$$

Les informations que vous avez pu accumuler vous ont permis de savoir que :

$$\sqrt[3]{\Lambda} + \tfrac{1}{\sqrt[3]{\Lambda}} = 3.$$

Quelle est donc la valeur du nombre Ξ ?

Solution :

Posons $a = \sqrt[3]{\Lambda}$. On sait alors que $a + \frac{1}{a} = 3 \Rightarrow \frac{a^2+1}{a} = 3 \Rightarrow a^2 + 1 = 3a$.

$\sqrt{\Lambda} = \left(\Lambda^{1/3}\right)^{3/2} = a^{3/2}$, donc

$\left(\sqrt{\Lambda} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 = \left(a^{3/2} - \frac{1}{a^{3/2}}\right)^2 = \left(\frac{a^3-1}{a^{3/2}}\right)^2 = \frac{\left((a-1)\left(a^2+a+1\right)\right)^2}{a^3} = \frac{((a-1)(3a+a))^2}{a^3} = \frac{(a-1)^2 16a^2}{a^3}$

$= \frac{16\left(a^2-2a+1\right)}{a} = \frac{16(3a-2a)}{a} = 16.$

Donc $\left(\sqrt{\Lambda} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Lambda} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = \pm 4$ et, finalement, $\Xi = \left|\sqrt{\Lambda} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\right| = 4.$

6. Les polynômes de l'année

Un polynôme de l'année est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2013, dont le coefficient du terme avec le plus haut degré est 1 et dont tous les zéros sont entiers. Combien y a-t-il de polynômes de l'année dont le produit des zéros (distincts ou non) est 2013 ?

Solution :

La décomposition en facteurs premiers de 2013 est $3 * 11 * 61$. Un polynôme de degré $n \geq 3$ ayant 2013 comme produit des zéros sera donc de l'une des formes suivantes :

$p_1(x) = (x \pm 1)^{n-3}(x \pm 3)(x \pm 11)(x \pm 61)$,
$p_2(x) = (x \pm 1)^{n-2}(x \pm 3 * 11)(x \pm 61)$,
$p_3(x) = (x \pm 1)^{n-2}(x \pm 3 * 61)(x \pm 11)$,
$p_4(x) = (x \pm 1)^{n-2}(x \pm 11 * 61)(x \pm 3)$,
$p_5(x) = (x \pm 1)^{n-1}(x \pm 2013)$.

Lorsqu'un polynôme contient m fois le terme $(x \pm 1)$, on peut choisir entre 0 et m termes comme étant $(x+1)$, les autres étant $(x-1)$, ce qui nous donne $(m+1)$ possibilités. Les termes suivants mènent chacun à 2 possibilités, $(x+r)$ et $(x-r)$, à l'exception du dernier dont le signe est fixé de façon à obtenir un produit positif des zéros.

On a donc :

Pour $p_1(x)$: $(n-3+1) * 2 * 2 * 1 = 4n - 8$ possibilités.
Pour $p_2(x)$, $p_3(x)$ et $p_4(x)$: $(n-2+1) * 2 * 1 = 2n - 2$ possibilités.
Pour $p_5(x)$: $(n-1+1) * 1 = n$ possibilités.

Au total, pour les polynômes de degré $n \leq 3$, on a donc :
$(4n-8) + 3 * (2n-2) + n = 11n - 14$ possibilités.

Pour les polynômes de degré 1, seule la forme $p_5(x)$ est valable, menant à la seule possibilité $(x - 2013)$.

Pour les polynômes de degré 2, toutes les formes sauf $p_1(x)$ sont valides, menant à :
$3 * (2n-2) + n = 7n - 6 = 7 * 2 - 6 = 8$ possibilités.

Le nombre de possibilités total, t, est donc :

$t = 1 + 8 + \sum_{n=3}^{2013}(11n - 14) = 9 + 11\sum_{n=3}^{2013} n - 14\sum_{n=3}^{2013} 1$
$= 9 + 11 * (\sum_{n=1}^{2013} n - \sum_{n=1}^{2} n) - 14 * 2011$
$= 9 + 11 * (\frac{2013*2014}{2} - \frac{2*3}{2}) - 14 * 2011$
$= 22269823.$

Solutions du concours de l'AMQ 2013, ordre secondaire

***Note** : L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

Question 1 : Le temps qui passe 20 %

Cette question concerne un rameur dans un canoë sur une rivière. La vitesse du courant de la rivière est constante et on l'évalue à 10 km/h. Le vitesse du canoë en eau calme est aussi constante. Toutefois, en présence de courant, cette dernière est influencée selon que le rameur avance à contre-courant (ce qui le ralentit) ou avec le courant (ce qui l'accélère).

Les questions (1) et (2) ci-dessous sont indépendantes l'une de l'autre.

1. Il faut au rameur une heure de plus pour parcourir 2,2 km en remontant le courant que pour parcourir la même distance en le descendant. Quelle est la vitesse du canoë en eau calme ?
   Solution :
   La vitesse est la distance divisée par le temps. Le temps est donc égal à la distance divisée par la vitesse. Soit x la vitesse du canoë en eau calme (en km/h).

$$\frac{2,2}{x-10} = \frac{2,2}{x+10} + 1$$
$$\Longrightarrow \frac{2,2(x+10)}{(x-10)(x+10)} = \frac{2,2(x-10)}{(x-10)(x+10)} + \frac{(x-10)(x+10)}{(x-10)(x+10)}$$
$$\Longrightarrow 2,2x + 22 = 2,2x - 22 + x^2 - 100$$
$$\Longrightarrow x^2 = 144$$
$$\Longrightarrow x = 12.$$

   La vitesse du canoë en eau calme est de 12 km/h.

2. Il faut au rameur deux fois plus de temps pour parcourir 2,2 km en remontrant le courant que pour parcourir la même distance en le descendant. Quelle est la vitesse du canoë en eau calme ?
   Solution :

$$\frac{2,2}{x-10} = 2 * \frac{2,2}{x+10}$$
$$\Longrightarrow 2,2(x+10) = 4,4(x-10)$$
$$\Longrightarrow 2,2x + 22 = 4,4x - 44$$
$$\Longrightarrow 2,2x = 66$$
$$\Longrightarrow x = 30.$$

   La vitesse du canoë en eau calme est de 30 km / h.

Question 2 : L'ainé des nôtres 10 %

Définition de *Algorithme* : Ensemble de règles opératoires propres à un calcul.
Voici, sous sa forme la plus simple, un algorithme proposé par Euclide :

1. On prend deux nombres entiers non-nuls a et b avec $a > b$.
2. On soustrait le plus petit nombre du plus grand. On obtient le nombre c.
3. Si $c = b$, l'algorithme est terminé et son résultat est c . Sinon, on renomme les nombres b et c de la façon suivante : le plus grand des deux devient a et le plus petit des deux devient b. On retourne ensuite à la première étape de l'algorithme (autant de fois que nécessaire ; l'algorithme finira par finir !).

Que donne le résultat de cet algorithme lorsque $a = 323$ et $b = 119$, et quel nom donne-t-on, en général, à ce résultat ?

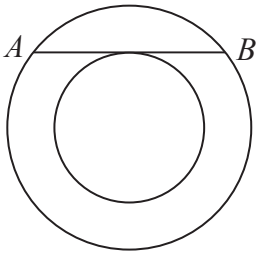
Solution :

Soit $a = 323$ et $b = 119$. Alors $c = 323 - 119 = 204$. On recommence avec $a = 204$ et $b = 119$. Alors $c = 204 - 119 = 85$. On recommence avec $a = 119$ et $b = 85$. Alors $c = 119 - 85 = 34$. On recommence avec $a = 85$ et $b = 34$. Alors $c = 85 - 34 = 51$. On recommence avec $a = 51$ et $b = 34$. Alors $c = 51 - 34 = 17$. On recommence avec $a = 34$ et $b = 17$. Alors $c = 34 - 17 = 17$. Puisque $c = b$, l'algorithme se termine et son résultat est 17.
C'est le plus grand commun diviseur des deux nombres initiaux. Donc 17 est le PGCD de 323 et 119. Cet algorithme permet de déterminer le PGCD de deux nombres entiers positifs.

Question 3 : Il y a une différence entre nous, mon cher Pythagore 10 %

Définition de *Concentrique* : Qui a un même centre.

La tangente à un cercle coupe un deuxième cercle, concentrique au premier, en A et B. La longueur du segment AB est égale à 10 cm. Quelle est l'aire de l'anneau (région comprise entre les deux cercles) ?



Solution :

Soit R un rayon du plus grand cercle allant du centre du cercle O jusqu'au point B.

Soit r un rayon du plus petit cercle allant du centre du cercle O jusqu'à la rencontre du plus petit cercle et du segment de droite.

L'aire de l'anneau est la différence entre les aires des deux cercles. On cherche donc $\pi R^2 - \pi r^2$.

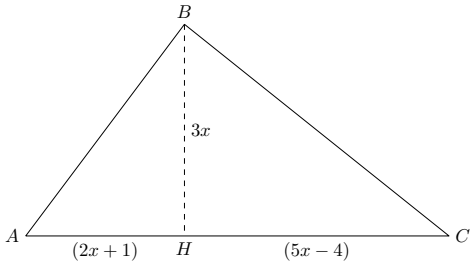
Selon Pythagore, on obtient l'égalité suivante : $R^2 = r^2 + 5^2$ (puisque 5 est la demie du segment de droite). On a donc que $R^2 - r^2 = 25$. Et l'aire cherchée est donc égale à 25π.

Question 4 : Nous sommes tellement pareils toi et moi 20 %

Dans le triangle rectangle ci-dessous, $\overline{BH}$ est une hauteur. On connaît les faits suivants :

1. $m\,\overline{AH} = (2x + 1)$ cm,
2. $m\,\overline{HC} = (5x - 4)$ cm,
3. $m\,\overline{BH} = 3x$ cm.

Déterminez la valeur numérique du périmètre du triangle ABC (en cm).



Solution :

La hauteur $\overline{BH}$ coupe le triangle initial en deux triangles semblables. Les proportions des deux triangles sont donc équivalentes. On a donc l'égalité suivante :

$$\frac{3x}{2x+1} = \frac{5x-4}{3x}$$

$$\Longrightarrow 9x^2 = 10x^2 - 3x - 4 \Longrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 4.$$

On trouve donc que $\overline{AH} = 9$ cm, $\overline{HC} = 16$ cm, $\overline{BH} = 12$ cm, ce qui permet d'utiliser la règle du triangle de Pythagore afin d'obtenir $\overline{AB} = 15$ cm et $\overline{BC} = 20$ cm, ce qui donne un périmètre de 60 cm.

Question 5 : Nous sommes sûrement plus grands que moi 20 %

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, quelle est la valeur minimale de $C = x^4 + 5x^2 + 4 - 2xy + y^2$?
Comme toujours, vous devez justifier votre réponse.
Solution :

On peut réécrire C de la façon suivante :
$C = (x^4 + 4x^2 + 4) + (x^2 - 2xy + y^2) = (x^2 + 2)^2 + (x - y)^2 \geq (x^2 + 2)^2$.

On dit que $(x^2 + 2)^2$ est un minorant de C (C ne peut être inférieur au minorant). On note aussi que si $x = y$, alors $(x - y)^2 = 0$. Dans ce cas, C est égal au minorant. Il ne reste qu'à déterminer pour quelle valeur de x ce minorant est minimal. Bien sûr que $x = 0$ (et donc $y = 0$), ce qui donne une valeur minimale de $C = 4$.

Question 6 : C'est bientôt terminé puisqu'ils s'en vont presque tous ! 20 %

Pour $n \in \{2, 3, \ldots, 2013\}$, on considère les nombres de la forme $\left(1 - 1/n^2\right)$.
Solution :

Simplifier leur produit revient donc à simplifier le produit suivant :

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \ \ldots \ \cdot \left(1 - \frac{1}{2012^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2013^2}\right).$$

Effectuez cette simplification.
On peut réécrire chaque terme de forme $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ de la façon suivante :

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{(n^2 - 1)}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}.$$

On obtient donc le produit suivant :

$$\frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2009 \cdot 2011}{2010^2} \cdot \frac{2010 \cdot 2012}{2011^2} \cdot \frac{2011 \cdot 2013}{2012^2} \cdot \frac{2012 \cdot 2014}{2013^2}.$$

On voit que presque tous les nombres « disparaissent » sauf $\frac{2014}{2 \cdot 2013}$. La réponse est donc $\frac{2014}{4026}$.