Association
mathématique
du Québec

Article

Les niveaux de pensée en géométrie de van Hiele : de la théorie à l'épreuve de la classe

Annette Braconne-Michoux, département de didactique,
Université de Montréal
annette.braconne-michoux@umontreal.ca

Résumé

Dans cet article, nous présentons la théorie des niveaux de pensée en géométrie, telle que proposée par le couple P.M. van Hiele et D. van Hiele-Geldof, accompagnée des nuances que l'on peut faire par rapport à l'interprétation qui en est donnée dans certains manuels du primaire ou du secondaire. Cette théorie étant très large, elle se révèle plus adaptée au programme du secondaire. Pour autant, elle est un très bon outil d'analyse de tâches aux deux niveaux de scolarité. Dans un second temps, nous analyserons quelques activités proposées dans ces mêmes manuels, en lien avec les exigences des programmes de formation de l'école québécoise. Nous verrons qu'il est souvent difficile de respecter à la fois les attentes liées aux programmes et les suggestions de programmation issues de la théorie.

1 Introduction

Le but de ce texte est d'initier le lecteur, didacticien ou non, aux travaux de P. M. van Hiele et D. van Hiele-Geldof , et à la façon, toute didactique, dont ces travaux peuvent être utilisés pour analyser des exercices et des problèmes, et par la bande le cheminement proposé aux élèves dans des manuels scolaires. Nous souhaitons montrer ici véritablement la didactique en train de « fonctionner ».

À notre connaissance, certains auteurs de manuels ou d'ouvrages destinés aux enseignants [1] font référence à la théorie des niveaux de pensée en géométrie de P.M. van Hiele, sans en préciser les

1. À notre connaissance, les seuls ouvrages destinés aux enseignants faisant explicitement référence à la théorie des niveaux de pensée en géométrie de P. M. Van Hiele sont *L'enseignement des mathématiques : l'élève au coeur de son apprentissage* (Van de Walle et Lovin, 2008, [16]), la collection *Clicmath* (Guay et coll. , 2003, [8, 9]) pour le primaire et la collection *Perspective* (Guay et coll. , 2005, [10]) pour le secondaire.
Dans ces deux derniers cas, le manuel de l'enseignant est fourni avec celui de l'élève et n'a pas de référence propre.

 © Association mathématique du Québec

finalités : s'agit-il d'un outil pour analyser des tâches ? En construire ? En planifier ? Un outil pour construire une évaluation ? Dans la mesure où cette théorie peut répondre en partie à ces questions, il nous paraît important, dans notre présentation, de préciser à la fois le contexte dans lequel elle a été élaborée et les objectifs qu'elle se donne. Il devient alors intéressant d'observer l'application et l'interprétation qui en est faite dans les manuels, dans le contexte des programmes de formation de l'école québécoise [7]. De plus, on verra que cette théorie des niveaux de pensée en géométrie étant très large, elle intéressera davantage les enseignants au secondaire, mais elle se révèlera aussi un très bon outil d'analyse de tâches pour les enseignants du primaire.

2 Présentation de la théorie des niveaux de pensée en géométrie

P. M. van Hiele et D. van Hiele – Geldof ont présenté cette théorie dans leurs thèses de doctorat aux Pays-Bas en 1957, sous la direction de Hans Freudenthal. Elle a donc été développée dans le contexte européen de l'enseignement de la géométrie il y a maintenant plus de 50 ans, et à l'époque il était admis « comme un but de notre enseignement que l'élève sache prouver des théorèmes » (van Hiele ; 1959, p. 199, [15]). Les objectifs étaient d'expliquer comment un élève peut passer d'une observation très globale des objets géométriques à leur organisation théorique dans l'exercice de la démonstration ou dans la construction d'un raisonnement hypothético-déductif, et de décrire les conditions d'enseignement qui favoriseraient ce passage pour l'élève. On peut donc considérer que le contexte dans lequel cette théorie a été développée est très différent du contexte actuel : les programmes ont changé, les conditions d'enseignement ont changé, etc. Pour autant, diverses études depuis les années 1980 s'y sont référées tant pour l'apprentissage de la démonstration que pour la pensée géométrique en général.

Dans la conférence qu'il a donnée à Paris en 1958 et qui a été publiée dans le *Bulletin Vert* de l'APMEP en 1959, [15], P.M. van Hiele a présenté les grandes lignes de cette théorie. Nous les reprenons ici, accompagnées des précisions qui ont été apportées par P.M. van Hiele lui-même ou par d'autres didacticiens qui ont travaillé sur la théorie, comme Uziskin (1982)[13], Burger et Shaughnessy (1986)[4] ainsi que Gutiérrez, A., Jaime, A., Shaughnessy, J. M., Burger, W. F. (1991)[11].

2.1 Organisation de la théorie

Cette théorie comprend a priori cinq niveaux par lesquels un élève passe dans son apprentissage de la démonstration en géométrie. L'un des principes fondamentaux est que ces niveaux sont

hiérarchisés [2] et que tout élève doit franchir successivement chacun d'entre eux. Ainsi, on ne saurait faire travailler un élève à un niveau donné sans qu'il maîtrise les niveaux inférieurs.

Chaque niveau de pensée a son langage, les mêmes mots ayant alors des sens différents pour deux personnes fonctionnant dans des niveaux différents. En particulier, si l'enseignant maîtrise un niveau de pensée supérieur à celui de ses élèves, il pourrait utiliser un vocabulaire auquel les élèves donneraient un sens différent ; l'enseignant serait alors mal compris par ses élèves. Par exemple, le mot « carré » ne véhicule pas les mêmes informations pour un élève de maternelle qui le découvre à l'issue d'une activité de tri de formes en carton ou pour un élève de 3^e secondaire qui s'intéresse au calcul de la longueur de sa diagonale.

Les objets de la géométrie qui sont implicites à un niveau de pensée deviennent explicites au niveau supérieur. Ainsi la notion même de propriétés d'une figure, et ensuite l'organisation de ces mêmes propriétés en termes de dépendance les unes des autres : tout d'abord implicites, c'est-à-dire évoquées ou mentionnées à un niveau, elles seront ensuite explicitées, donc organisées ou étudiées pour elles-mêmes, au niveau supérieur. Par exemple, l'élève qui reconnaît à l'œil un triangle isocèle parce qu'il ressemble à un chapeau de fée devra réussir à verbaliser cette caractéristique en disant que deux côtés du triangle, au moins, sont de même longueur.

Toutefois, les recherches (Burger et Shaughnessy, 1986 [4]) ont montré qu'un même élève ne pouvait être « caractérisé » par un niveau de pensée en géométrie. En effet, d'un objet géométrique à un autre, selon les curricula ou les activités proposées, un élève pourra maîtriser des niveaux de pensée différents. Par exemple, il est facile d'imaginer qu'un élève de 1^e secondaire qui découvre la rotation, ne maîtrise pas le même niveau de pensée à ce sujet qu'à propos de la symétrie ou de la translation qu'il a étudiées à l'école primaire.

P. M. van Hiele considère que, pour un élève, le processus selon lequel un élève passe d'un niveau de pensée au niveau immédiatement supérieur se déroule en plusieurs phases. Faute d'espace, nous résumons ici ces cinq phases :

- l'information : l'élève reçoit un nouvel objet d'étude et il en découvre la structure ;
- l'orientation dirigée : la structure qui vient d'être découverte est explorée ;
- l'explication : les propriétés ou structures découvertes et explorées sont organisées les unes par rapport aux autres (P. M. van Hiele parle de « réseau de relations ») et un vocabulaire précis est mis en place ; le rôle de l'enseignant est particulièrement important dans cette phase. Dans le vocabulaire de la didactique d'aujourd'hui, on pourrait rapprocher cette phase de l'institutionnalisation telle que décrite par Brousseau (1984)[3] ;
- l'orientation libre : dans cette phase, l'élève exécute différentes tâches qui mettent en œuvre les propriétés organisées et structurées au cours de la phase précédente ;
- l'intégration est à comprendre dans le sens qu'on lui donne aujourd'hui : l'élève organise seul son travail en réinvestissant les connaissances qu'il vient d'acquérir. De cette dernière phase,

2. On peut considérer que les van Hiele ont certainement repris l'idée des « stades » de Piaget dont ils connaissaient les travaux et ce, d'autant plus que leurs premiers sujets ont été leurs propres filles.

P.M. van Hiele écrit : « le professeur peut favoriser le travail en donnant des aperçus globaux. Il importe que ces aperçus n'apportent rien de nouveau à l'élève : ils doivent être uniquement un résumé de ce que l'élève sait déjà » (p. 202)[15].

D'après P.M. van Hiele, cette cinquième phase étant atteinte, l'élève maîtrise complètement un nouveau niveau de pensée ; il a établi un nouveau réseau de relations entre des objets qu'il connaissait déjà. Cette description de l'organisation de l'enseignement en différentes phases suggère qu'elle s'applique à chaque objet d'enseignement de la géométrie. En conséquence de quoi, un même élève pourra avoir atteint des niveaux de pensée différents selon les apprentissages réalisés et il ne pourra pas être « caractérisé » par la maîtrise d'un niveau de van Hiele sur l'ensemble de ses connaissances en géométrie.

Venons-en maintenant à la description des cinq niveaux de pensée en géométrie.

2.2 Les cinq niveaux de pensée en géométrie.

Cette description est inspirée des écrits de P.M. Hiele lui-même (1958) [14], d'Uziskin (1982) [13], de Burger et Shaughnessy (1986) [4], Braconne (1988) [1] et Braconne-Michoux (2008) [2].

Le premier niveau étant qualifié par P.M. van Hiele de « niveau de base », les niveaux suivants sont numérotés de 1 à 4. Or l'expérience ayant montré que certains élèves ne maîtrisent pas le niveau de base, il est judicieux de numéroter les niveaux de 1 à 5 et de considérer qu'il y a un niveau 0 avant eux (Uziskin (1982) [13]). Ce qui donne :

2.2.1 Niveau 1 : identification-visualisation

À ce niveau l'élève reconnaît les figures à **leur aspect global** ; il est dans un mode de validation perceptive. Un élève à ce niveau pourra justifier qu'une figure est un rectangle parce qu'elle ressemble à une porte, qu'une autre est un carré parce que ça se voit ou parce que c'est comme une dalle du plancher. Mais si on lui propose un carré « posé sur la pointe », il pourra dire que c'est un losange, s'appuyant sur la connaissance qu'il a de cette figure en position prototypique [3] . Pour un élève à ce niveau de pensée, les figures se classent de façon exclusive les unes par rapport aux autres : un losange et un parallélogramme sont deux quadrilatères distincts. Les élèves entrant à l'école primaire ne sont pas tous à ce niveau de maîtrise dans la mesure où certains concepts peuvent faire défaut, comme la confusion entre cube et carré et où certains

3. On appelle figure en position prototypique toute figure présentée dans sa position la plus courante, celle à laquelle on se réfère traditionnellement : un triangle isocèle est « posé » sur sa base qui est elle-même « horizontale », c'est-à-dire parallèle à la largeur de la feuille ; un rectangle est dessiné de façon à ce que ses deux dimensions soient parallèles aux bords de la feuille ; un losange se reconnaît à ses axes de symétrie qui sont parallèles aux bords de la feuilles ; etc.

mots comme rectangle ou losange ne font pas encore partie de leur vocabulaire. Ces élèves sont alors au niveau 0 de van Hiele.

L'usage des instruments de mesure n'est pas en tant que tel un objet d'étude de la théorie de van Hiele. En revanche, l'exploitation qui est faite des mesures témoigne de la maîtrise d'un niveau de van Hiele ou d'un autre. En effet, la précision de la mesure est une source complémentaire de validation au niveau 1 d'identification-visualisation où l'objet d'étude n'est pas un objet théorique, mais un objet graphique auquel l'élève associe certaines caractéristiques. La mesure perdra donc de son importance aux niveaux suivants où les propriétés théoriques des figures s'installeront aux dépens de la précision du dessin.

2.2.2 Niveau 2 : analyse

À ce niveau l'élève connaît **la liste des propriétés des figures**, comme s'il s'agissait d'un inventaire. Ces propriétés peuvent être récitées ou évoquées comme caractéristiques visuelles, mais ne seront pas utilisées dans l'organisation d'un raisonnement hypothético-déductif. Ce sont des énoncés qui ont un caractère descriptif et n'ont pas de « statut opératoire », au sens de Duval et Egret (1993)[5]. Pour reprendre l'exemple de P. M. van Hiele (1958, p. 201, [14]), dire

> [...] qu'une figure est un rectangle, signifie qu'elle a quatre angles droits, que les diagonales sont égales et se coupent en leurs milieux, que les côtés opposés sont égaux.

Les élèves qui maîtrisent ce niveau ne font pas la distinction entre une définition (au sens mathématique du terme) et une liste de propriétés (liste qui pourra être assimilée à une définition et qui pourra devenir redondante quand l'élève maîtrisera un niveau supérieur). Cette liste de propriétés n'est pas exploitée dans l'organisation d'un raisonnement hypothético-déductif. L'élève à ce niveau de van Hiele (niveau d'analyse – niveau 2) n'est pas encore sensible au fait qu'une définition en mathématique est une description nécessaire et suffisante d'un objet, et qu'elle doit avoir un caractère « minimaliste ».

Une autre caractéristique du niveau d'analyse précisée par P.M. van Hiele (1958) est que l'élève peut identifier une figure à partir de codages. L'exemple qu'il donne est le suivant : « Si l'on nous dit que la figure tracée au tableau possède **quatre angles droits**[4], c'est un rectangle, même si la figure n'est pas tracée avec soin » (p. 201, [14]). Dans le contexte de l'époque, P.M. van Hiele fait allusion au dessin à main levée où les informations sont codées. Cela signifie que, dès qu'il a identifié une figure à l'aide du codage du dessin, l'élève, au niveau d'analyse, est alors capable de réciter la liste des propriétés de cette figure. Au Québec, aujourd'hui, la situation est un peu différente dans la mesure où les figures proposées dans les manuels sont presque toujours dessinées avec des traits « droits », voire en vraie grandeur, quand bien même elles sont codées comme le seraient des dessins faits à main levée. On peut alors se poser la

4. La mise en caractères gras est de nous.

question de savoir en quoi l'activité de l'élève change selon que le dessin qu'il a sous les yeux est « fiable » (le dessin est semblable à l'objet théorique décrit) ou non. En effet, si l'élève a sous les yeux un dessin codé qui ressemble beaucoup à l'objet théorique, comment peut-il faire la distinction entre les propriétés annoncées (informations) et celles qu'il connaît de la figure (qui deviendront des conséquences des précédentes) dans la mesure où toutes sont perceptibles ? C'est pourquoi ce niveau d'analyse (niveau 2) sera particulièrement examiné dans l'étude des manuels (pour les tâches qui y sont proposées) et dans les guides pour l'enseignant (pour les réponses et commentaires qui y sont apportés).

2.2.3 Niveau 3 : déduction informelle

À ce niveau de pensée, l'élève est capable **d'organiser** de façon hypothético-déductive **les propriétés** qu'il a listées au niveau précédent. C'est à ce niveau que les élèves argumentent en disant : « mais puisque l'on a . . ., alors FORCÉMENT (obligatoirement, toujours,...), on a .... », espérant ainsi emporter la conviction d'autrui. P.M. van Hiele (1958) dit qu'« à ce niveau, les propriétés s'ordonnent » (p. 201, [14]). L'une des conséquences de cette nouvelle organisation dans les propriétés des figures est que leur classification inclusive prend son sens pour l'élève : un carré devient un rectangle particulier, ce qui n'était pas le cas au niveau précédent d'analyse. Cependant, si les propriétés ont maintenant un caractère plus « dynamique » les unes par rapport aux autres, l'élève à ce niveau ne fait pas encore la distinction entre une définition, un axiome, la réciproque d'une propriété, autant d'éléments qui caractérisent un système axiomatique de déduction.

2.2.4 Niveau 4 : déduction formelle

C'est à ce niveau de pensée que l'élève maîtrise **la distinction entre les définitions**, les conditions nécessaires et suffisantes, les réciproques, la nécessité d'axiomes. Ici, la seule preuve acceptable est la démonstration formelle, peu importe son format. Le système axiomatique dans lequel l'élève fonctionne est alors celui de la géométrie euclidienne.

2.2.5 Niveau 5 : Rigueur

Sans doute dans un souci de complétude de cette théorie, P.M. van Hiele et Dina van Hiele-Geldof avaient imaginé un cinquième niveau de pensée où l'étudiant se préoccupait de la nature même du système axiomatique utilisé au niveau précédent et pouvait imaginer d'autres systèmes axiomatiques pour développer d'autres géométries. P.M. van Hiele (1958) a tout d'abord considéré qu'un tel niveau était de « **moindre importance** pour comprendre ce qu'est un niveau de pensée » (p. 201, [14]) et ensuite que ce même niveau n'existait peut-être même

pas. Quoi qu'il en soit, une telle préoccupation dépasse largement les objets d'enseignement de géométrie au primaire et au secondaire. Nous nous concentrerons donc sur les quatre premiers niveaux.

2.3 La théorie dans les classes

D'après la théorie de van Hiele, les élèves à l'école primaire devraient être amenés à maîtriser successivement les niveaux inférieurs comme identification-visualisation ou analyse et au secondaire, ils devraient commencer à aborder la déduction informelle voire la déduction formelle. Si l'on considère, par exemple, l'étude des quadrilatères, on constate que leur nom (leur identification) est une finalité du 1^{er} cycle du primaire ; c'est bien une activité qui relève du niveau 1 de van Hiele. Les caractéristiques des quadrilatères (les côtés et les angles) doivent être maîtrisées à la fin du 2^e cycle. Si l'on se limite à demander la liste de ces caractéristiques, l'élève travaille au niveau d'analyse de la théorie. Mais, en fin de 2^e cycle, le programme [7] précise que l'élève « **décrit et classifie des objets géométriques selon leurs attributs** » (p. 129). Selon que la classification sera interprétée sur une base perceptive ou déductive, on demandera à l'élève de travailler à des niveaux de pensée géométrique différents, tels que l'identification-visualisation, l'analyse ou la déduction informelle. La même situation se reproduit au 1^{er} cycle du secondaire où les propriétés des diagonales sont abordées. La tâche devient donc complexe pour l'enseignant dans sa classe : dans l'intérêt de l'élève, à quel niveau de van Hiele doit-il situer les activités qu'il propose, tout en respectant le programme et le fait que l'élève ne peut donner une réponse se situant à un niveau de pensée supérieur à celui qu'il maîtrise ? Quels sont donc les critères qui permettent d'identifier le niveau de pensée maîtrisé par l'élève ? Ou encore selon les réponses de l'élève, quelles indications sur la maîtrise des niveaux de van Hiele nous donnent-elles ? Comment identifier les activités qui relèvent du même niveau de van Hiele ? Comment modifier une activité pour aider un élève à passer au niveau supérieur de pensée, si nécessaire ?

Nous allons maintenant essayer de répondre à ces questions en analysant quelques propositions extraites de manuels, où les auteurs font explicitement référence à la théorie des niveaux de pensée de van Hiele dans les guides pour l'enseignant.

3 Activités dans les manuels du primaire

Dans un premier temps, nous étudierons un extrait d'une leçon de *Clicmaths*, 6^e année (éditions HRW, 2003, [9]), dont l'objet d'étude est l'exploration des attributs des polygones réguliers (situation 3 de l'étape 5) et plus particulièrement, les pages 26 et 27 du manuel de l'élève (manuel B ; volume 1) reproduites à l'annexe A (page 46). Ces deux pages sont les deux premières de la rubrique « Je m'entraîne », qui en comprend quatre. Nous les avons retenues parce qu'elles

contiennent quatre des cinq activités jugées essentielles par les auteurs (activités identifiées par un engrenage) dans cette rubrique.

L'exercice 1 (voir Figure 1) relève du niveau d'identification-visualisation puisque l'élève n'a pas à justifier ses choix de réponses ; une validation perceptive est acceptée. Cependant, les deux questions se situent dans des contextes différents.

FIGURE 1 – *Clicmaths* 6^e année, Vol. B1 ; p. 26

Dans la 1^e question de l'exercice 1 (p. 26), l'élève doit nommer des « objet(s) ayant la forme de ... ». Pour répondre, il doit associer des objets de son environnement, soit des objets réels (en 3D), à des objets géométriques (en 2D). Il y a alors un glissement de l'espace (3D) vers le plan (2D) : une telle activité, reposant sur la perception des objets réels ou représentés, relève bien du niveau 1 d'identification-visualisation. En revanche, la 2^e question se situe en géométrie plane (identification d'un polygone régulier) sans que la procédure de validation soit précisée. L'élève peut continuer de travailler au niveau d'identification-visualisation (niveau 1). La difficulté de la 2^e question par rapport à la 1^e tient au fait que les élèves ne sont pas aussi familiers avec les polygones réguliers qu'avec les triangles isocèles ou équilatéraux, mais la référence à l'objet réel (1^e question) ou à l'une de ses faces (2^e question) ne change pas le niveau de van Hiele investi.

Dans la 1^e question de l'exercice 2 (voir Figure 2, (2)), l'élève doit mesurer, à l'aide de son rapporteur d'angles, tous les angles de six polygones déjà classés sous deux rubriques : triangles isocèles et parallélogrammes. On peut remarquer que cette mesure risque de ne pas être très précise compte tenu de la taille des dessins et des dimensions des rapporteurs d'angles du commerce.

À ce propos, la 2^e question est révélatrice du rôle accordé à la précision de la mesure en fonction du niveau de van Hiele. On demande aux élèves de nommer un attribut commun aux angles de chaque type de polygone. À la fois, la réponse des élèves va dépendre de la précision de la mesure, mais aussi du contrat didactique. En effet, les mesures obtenues par les élèves seront variées et il est peu probable que les « angles égaux » aient la même mesure chez tous les élèves. Mais, par contrat didactique, peuvent-ils répondre autre chose que « les angles sont égaux »

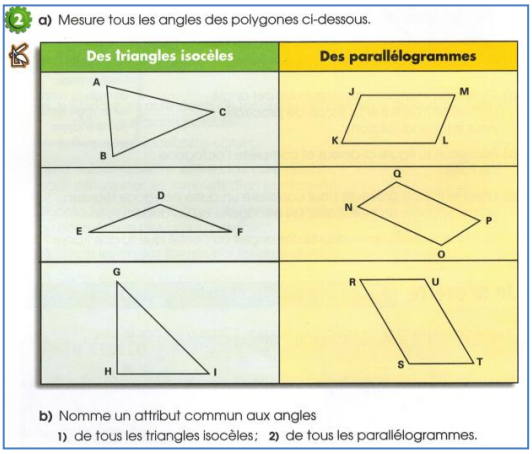


FIGURE 2 – *Clicmaths* 6^{e} année, Vol. B1 ; p. 26

et, ce faisant, donner moins d'importance à la précision de leurs propres mesures ? C'est la seule remarque qu'ils connaissent à propos des angles, et cette réponse devient indépendante du mesurage effectué juste avant. Les élèves qui donnent une telle réponse fonctionnent de manière visuelle : ils travaillent au niveau d'identification-visualisation de la théorie. Mais est-ce l'intention des auteurs ? On peut en douter puisque la question porte, non pas sur les trois triangles proposés, mais sur **tous** les triangles isocèles ; il y a donc une généralisation qui est demandée à l'élève. Pour cette raison, on peut dire que, si les auteurs visent l'acquisition du niveau d'analyse chez les élèves, l'activité proposée est trop restreinte pour être signifiante. Il serait sans doute plus intéressant de proposer un plus grand nombre de triangles (de toutes natures, de différentes tailles et dans des positions variées) et de demander aux élèves non seulement de mesurer les angles, mais aussi les côtés, pour que l'association entre les deux propriétés soit mise en place. Pour contourner le fait que le mesurage sur papier entraîne une certaine imprécision dans les résultats, on pourrait proposer cette activité sur une feuille de travail avec un logiciel de géométrie dynamique. En procédant de cette manière, les élèves se constitueraient une « banque » de propriétés (ou d'attributs) associées à chaque figure géométrique : c'est le niveau d'analyse de la théorie de van Hiele.

La réponse à cette question dans le manuel de l'enseignant est la suivante : « Dans tous les triangles isocèles, deux des trois angles sont isométriques ». Une telle phrase relève du niveau d'analyse dans la mesure où elle donne un caractère général à une propriété sans que l'on sache s'il s'agit d'une propriété caractéristique ou non des triangles isocèles. Il est tout à fait remarquable que, parmi les triangles proposés, il n'y ait pas de triangle équilatéral. La classification inclusive des figures n'est donc pas interrogée dans cet exercice.

La même situation se reproduit à propos du parallélogramme, où l'élève sera amené à généraliser

la propriété d'isométrie des angles opposés à partir de mesures faites sur des figures de petite taille.

Il nous paraît intéressant de noter que, dans le guide, on suggère à l'enseignant de ne pas donner cet exercice s'il manque de temps. Cet exercice ne serait-il pas aussi essentiel qu'annoncé ? Il est vrai qu'il ne permet pas de travailler les propriétés des polygones réguliers, objets de la leçon.

Les activités proposées à la page suivante confirment que les activités qui visent le niveau d'analyse de la théorie de van Hiele sont peu compatibles avec les libellés [5] de la progression des apprentissages associée au programme [7].

Les deux activités de la page suivante se situent au moins au niveau de l'analyse si l'on s'appuie sur les critères définis par P.M. van Hiele. Mais on pourrait presque dire qu'elles se situent à différents stades dans l'évolution d'un élève à l'intérieur du niveau d'analyse.

Il est intéressant de remarquer que dans l'activité 3 (voir Figure 3), l'élève doit tracer un triangle équilatéral puis répondre à une question concernant les angles de ce triangle alors que, dans le manuel de l'enseignant (p. 22B), l'une des questions que l'enseignant peut poser en prétest de réactivation des connaissances est la suivante : « Connais-tu le nom de triangles ou de quadrilatères dont tous les côtés et tous les angles sont isométriques ? Si oui, nomme-les. »

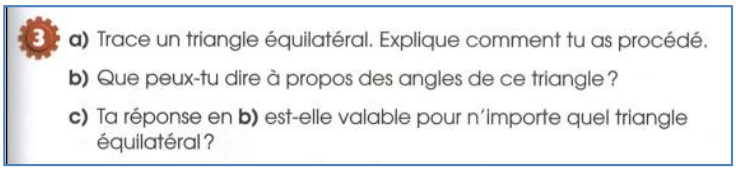


FIGURE 3 – *Clicmaths* 6^e année, Vol. B1 ; p. 27

Comment peut procéder l'élève qui doit faire cet exercice ? La longueur du côté du triangle n'est pas donnée ; ce qui est tout à fait inhabituel et peut déstabiliser l'élève. En revanche, s'il réussit, il est vraisemblable qu'il maîtrise au moins une caractéristique du triangle équilatéral : ses trois côtés isométriques. Et c'est à cet unique critère qu'il le reconnaît. Mais selon les cas, l'élève peut avoir l'habitude de construire un triangle équilatéral sur du papier pointé (en triangles équilatéraux), du papier quadrillé ou du papier blanc. Dans le premier cas, il peut réussir son tracé en repérant des points sur le papier pour aboutir à un triangle équilatéral conforme à l'image mentale qu'il en a (figure en position prototypique) : l'élève est au niveau d'identification-visualisation. S'il utilise du papier quadrillé et trace l'un des côtés en suivant le

5. En effet, les compétences visées à propos des quadrilatères et des triangles sont : « décrire » et « classifier ». Il est sans doute intéressant de rapporter ici que les mots « compas » et « équerre » n'apparaissent jamais dans le programme ni dans la progression des apprentissages.

quadrillage[6], il peut utiliser simultanément et de façon implicite les propriétés de symétrie du triangle équilatéral et la définition, pour terminer sa construction. Une telle démarche relève du niveau d'analyse et non pas du niveau d'identification-visualisation, dans la mesure où le 3^e sommet du triangle ne se trouve pas sur un croisement du quadrillage. Si l'élève trace le triangle équilatéral sur du papier blanc à l'aide d'un compas en reportant deux fois la longueur du côté qu'il a dessiné, il met en œuvre les propriétés (au moins une !) qu'il connaît du triangle équilatéral. Un tel élève est peut-être au niveau d'analyse. Toutefois, on peut s'interroger sur la probabilité que les élèves utilisent la méthode proposée dans le manuel de l'enseignant, à savoir utiliser le fait que le triangle équilatéral est un polygone régulier[7] et qu'il peut être construit sur un cercle à partir de trois angles au centre de 120°. Pour qu'une telle démarche relève du niveau d'analyse, il faudrait que cette caractéristique ait été constatée plusieurs fois, sur plusieurs triangles équilatéraux, et d'autres qui ne le sont pas. Or, l'élève a pu constater de manière perceptive à la page précédente de son manuel qu'il existait un triangle (figure de 1,8 cm de côté) qui a les caractéristiques d'un polygone régulier, mais il n'est pas identifié comme étant équilatéral. Donc, la démarche proposée par le manuel de l'enseignant relève du niveau de déduction informelle et se situe bien dans la continuité du travail sur les polygones réguliers qui est proposé page 25.

On peut ensuite s'étonner des deux questions qui sont posées à l'élève en b) et c), quand on sait qu'elles ont été évoquées au tout début de la leçon. Il semble que les intentions des auteurs soient d'assurer un lien unique entre la propriété des angles de 60° d'un triangle et le caractère équilatéral de celui-ci, et participer ainsi à la consolidation du niveau d'analyse à propos des triangles. Mais la démarche nous semble plutôt maladroite. Pour qu'une généralisation prenne son sens, il faudrait, par exemple, que les mesures soient faites sur un grand nombre de triangles, qu'ils soient équilatéraux ou non. Donc, soit l'élève doit en construire plusieurs, de tailles très différentes, et fait toutes les mesures de longueurs de côtés et d'angles ; soit on met en commun toutes les mesures faites par tous les élèves de la classe. On peut alors espérer que, dans la majorité des cas, les angles mesurés sur les triangles équilatéraux seront de 60° ! Mais cette exploitation de la situation n'est pas envisagée si l'on se réfère au manuel de l'enseignant. On peut donc conclure que l'élève est amené à travailler au niveau d'analyse à marche forcée.

Le tableau de l'exercice 4 (voir Figure 4, (4)) pourrait être complété de la même façon par deux élèves se situant, l'un au niveau d'identification-visualisation, l'autre au niveau d'analyse.

En effet, les figures sont présentées en position prototypique et l'élève peut répondre, s'il connaît le vocabulaire, de façon perceptive et sans référence aucune aux propriétés théoriques qui auraient été établies auparavant. La difficulté réside dans le respect des contraintes simultanées qui permettent de donner du sens aux cases du tableau. Dans le guide, on invite l'enseignant à préciser aux élèves que tous les quadrilatères doivent être placés dans une case et une seule. Une

6. L'activité est proposée en ces termes dans *Presto* 5^e année (éditions CEC).
7. L'expression « polygone régulier » n'apparaît jamais telle quelle dans le programme [7].

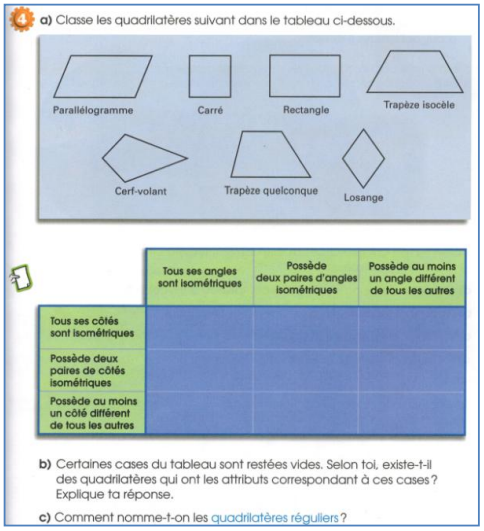


FIGURE 4 – *Clicmaths* 6^e année, Vol. B1 ; p. 27

telle activité renforce le classement exclusif des figures. La deuxième question à propos des cases restées vides ne relève pas du niveau d'analyse puisque l'élève doit expliquer quels attributs aurait un quadrilatère qui s'y trouverait. Comment l'élève peut-il expliquer qu'il n'existe pas de quadrilatère dont tous les côtés sont isométriques et qui possède au moins un angle différent de tous les autres ? À notre avis, la seule réponse qu'il puisse faire est de dire qu'il n'en a jamais rencontré : il ne connaît que le losange et le carré. Sa réponse s'appuie sur l'expérience qu'il a de la géométrie au niveau d'identification-visualisation, voire au niveau d'analyse, mais certainement pas au niveau de déduction informelle telle que la question le laisse entendre. La réponse donnée dans le manuel de l'enseignant s'appuie partiellement sur des considérations théoriques (la somme des angles d'un quadrilatère est égale à 360°) non explicitées ; elle n'est donc pas plus convaincante que la réponse de l'élève que nous venons d'évoquer. La dernière question de cet exercice est assez étonnante puisqu'elle est posée en utilisant le pluriel alors que le seul quadrilatère qui soit un polygone régulier est le carré ! Soit l'élève connaît la réponse et il n'accorde pas d'importance au pluriel ; soit il ne la connaît pas et il peut la donner en s'appuyant sur une comparaison des quadrilatères menée de façon perceptive (le carré est la figure qui est la plus régulière !) sans que l'enseignant sache quel niveau de van Hiele l'élève maîtrise.

En conclusion, si les activités de niveau identification-visualisation sont présentes et nécessaires dans les apprentissages, il en va tout autrement pour les activités de niveau d'analyse : les propriétés qui vont acquérir un statut théorique sont établies à partir de généralisations qui s'appuient sur un nombre très limité d'exemples, voire sur un seul. On peut donc douter de

la solidité de la maîtrise de ce niveau ; d'autant plus que les élèves font peu de constructions et sont donc rarement amenés à mettre à l'épreuve les connaissances théoriques qu'ils doivent acquérir. Ils n'ont donc pas à les organiser pour construire une figure, et n'ont ainsi que peu d'occasions d'approcher le niveau de déduction informelle.

4 Activités dans les manuels du secondaire

Le manuel *Perspective mathématique secondaire 1* (éditions HRW, 2005, [10]) est écrit par les mêmes auteurs que *Clicmaths* (voir Annexe B (page 47)). On peut donc s'attendre à une progression dans l'organisation des apprentissages, visant le niveau de déduction informelle (niveau 3) pour les objets déjà étudiés à l'école primaire et les niveaux d'identification-visualisation (niveau 1) et d'analyse (niveau 2) pour les nouveaux objets.

Nous avons fait le choix des activités extraites du volume A1 sur les quadrilatères (p. 89-92) qui sont les premières activités de géométrie au secondaire. D'ailleurs, dans le manuel de l'enseignant on peut lire :

> Voici de quelle façon pourrait se faire le passage du primaire au secondaire. La première étape consiste à dissocier l'identification des figures géométriques de leur apparence, c'est-à-dire à les définir tout simplement à l'aide de mots plutôt que d'images. Dans tous les cas, une définition a les caractéristiques présentées dans le tableau ci-dessous.

On voit bien dans cette présentation l'intention de passer du niveau d'identification-visualisation (niveau 1) au niveau de déduction informelle, où les figures sont classées inclusivement (niveau 3) et où le raisonnement hypothético-déductif commence à s'organiser. En effet dans la dernière ligne du tableau, toute figure qui a au moins les mêmes « attributs » que le parallélogramme sera encore un parallélogramme. Pour autant, la présentation qui est faite de la « définition » d'une figure géométrique est partielle, et peut mener à certaines fausses conceptions : elle se limite à rappeler qu'une « définition » ne contient qu'un nombre « minimal » d'attributs, sans préciser que ce nombre minimal, que l'on peut comprendre comme nécessaire, doit aussi être suffisant, et que ces attributs ne doivent pas être redondants les uns par rapport aux autres. En effet, rien n'est dit sur le fait qu'en mathématiques, de tous les attributs nécessaires, on en retient UN, qui est suffisant (ou plusieurs dont la conjonction est suffisante), dont on fait la définition de l'objet. Il manque donc deux éléments essentiels dans la caractérisation de la « définition » donnée par les auteurs de *Perspective* : les attributs doivent être en nombre **suffisant** et ils ne doivent **pas être redondants** ; ils doivent être réduits à un noyau minimal de conditions nécessaires et suffisantes. C'est bien dans la distinction entre une définition qui n'est pas forcément réduite à un noyau minimal et la définition mathématique que l'élève passe du niveau 2 d'analyse au niveau 3 de déduction informelle (voir Tanguay, D. et Geeraerts, L.

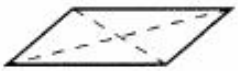
CARACTÉRISTIQUES	EXEMPLES
Une définition fait référence à un certain nombre d'attributs que possède la figure définie. Dans l'exemple ci-contre, il y a trois attributs.	Un rectangle est un *quadrilatère* ayant des *diagonales isométriques* qui *se croisent en leur milieu.*
Ce nombre d'attributs est minimal, c'est-à-dire qu'une figure qui ne possède pas tous ces attributs ne peut pas porter le nom de la figure définie.	Un quadrilatère ayant des diagonales qui se coupent en leur milieu, mais qui ne sont pas isométriques.  Cette figure n'est donc pas un rectangle.
Toutes les figures qui possèdent les attributs qui font partie de la définition peuvent porter le nom de la figure définie.	Puisqu'un carré possède tous les attributs qui font partie de la définition du rectangle, on peut affirmer qu'un carré est une sorte de rectangle.

FIGURE 5 – *Perspective, Manuel de l'enseignant* ; *Secondaire 1*, Vol. A1 ; p. 85C.

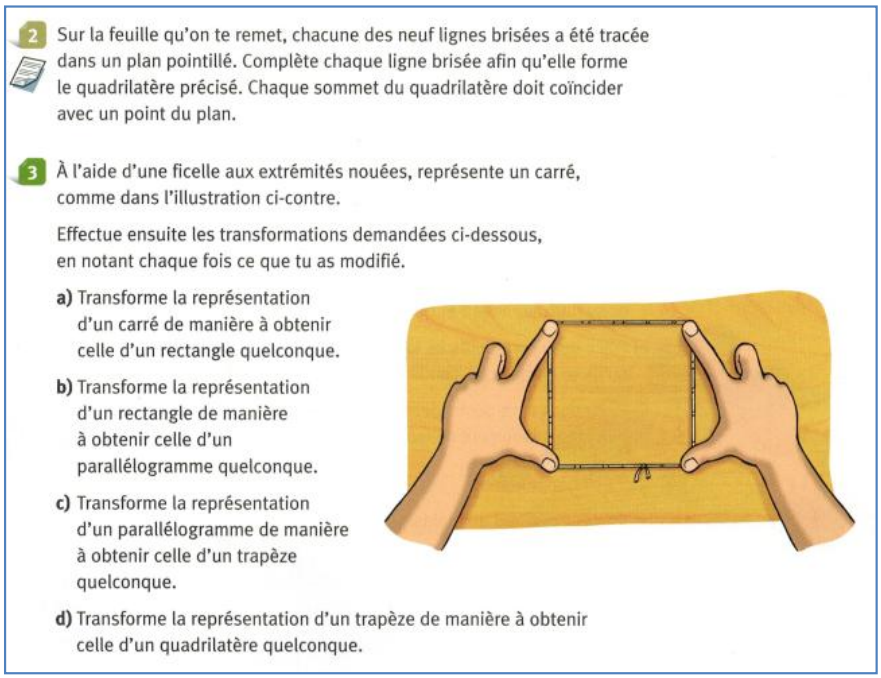
(2012), [12]). Ainsi le concept de définition qui est affiché dans le guide pour enseignant, relève davantage du niveau d'analyse (niveau 2) que du niveau de déduction informelle (niveau 3). Si les situations de départ et d'arrivée sont facilement repérables à l'intérieur de la théorie des niveaux de pensée en géométrie, en revanche rien n'est dit sur le passage par le niveau d'analyse !

Pour autant, on peut dire que l'activité n° 1 p. 89 (voir Figure 6) relève du niveau d'analyse : l'élève doit connaître les propriétés géométriques des quadrilatères et les prendre en compte simultanément pour réussir les constructions demandées.

FIGURE 6 – *Perspective Secondaire 1*, Vol. A1 ; p. 89.

Sans nier la pertinence de cette activité en début de leçon, il nous semble important de remarquer que, dans le manuel de l'enseignant, il n'est nullement mentionné que les quadrilatères obtenus dans les questions d) à f) sont des quadrilatères particuliers. Au contraire, il est précisé que dans cet exercice, les élèves affinent la maîtrise des instruments de géométrie. C'est, de notre point de vue, restreindre l'intérêt de l'activité et du même coup, manquer une bonne occasion d'aborder une classification inclusive des quadrilatères, donc, d'approcher le niveau de déduction informelle.

Dans l'exercice 2 (voir Figure 7), l'élève doit terminer, sur une feuille de papier pointé quadrillé, le dessin de quadrilatères particuliers dont on donne deux côtés. Il lui suffit d'être au niveau d'identification-visualisation pour réussir : il valide ses tracés seulement avec la perception qu'il en a.



2 Sur la feuille qu'on te remet, chacune des neuf lignes brisées a été tracée dans un plan pointillé. Complète chaque ligne brisée afin qu'elle forme le quadrilatère précisé. Chaque sommet du quadrilatère doit coïncider avec un point du plan.

3 À l'aide d'une ficelle aux extrémités nouées, représente un carré, comme dans l'illustration ci-contre.

Effectue ensuite les transformations demandées ci-dessous, en notant chaque fois ce que tu as modifié.

a) Transforme la représentation d'un carré de manière à obtenir celle d'un rectangle quelconque.

b) Transforme la représentation d'un rectangle de manière à obtenir celle d'un parallélogramme quelconque.

c) Transforme la représentation d'un parallélogramme de manière à obtenir celle d'un trapèze quelconque.

d) Transforme la représentation d'un trapèze de manière à obtenir celle d'un quadrilatère quelconque.

FIGURE 7 – *Perspective Secondaire 1*, Vol. A1 ; p. 89.

Ceci sera renforcé dans l'exercice 3 (voir Figure 7) où l'élève, partant d'un carré en ficelle, va le déformer pour arriver à un quadrilatère quelconque. On est bien ici au niveau d'identification-visualisation : l'élève n'a aucun moyen de vérifier que ce qu'il « construit » possède toutes les caractéristiques géométriques attendues. Au mieux, « ça ressemble à . . . ». De plus, nous voyons un risque associé à la construction des questions et à leur enchaînement. En effet, la

transformation de la représentation d'une figure (carré) à celle d'une autre (rectangle quelconque) ne permet pas à l'élève de savoir laquelle des deux figures est la plus particulière ou la plus générale des deux. Autrement dit, même si on est dans un manuel de secondaire, cette activité ne permet pas à l'élève d'avancer dans son apprentissage de la classification inclusive des quadrilatères.

Dans les pages suivantes du manuel, on peut dire que les activités proposées aux élèves ne leur permettent pas d'évoluer dans les niveaux de pensée en géométrie : ils doivent nommer des quadrilatères à partir de leurs diagonales formées à l'aide de cure-dents, ou composer des quadrilatères en assemblant des triangles rectangles qu'ils ont découpés.

La situation est tout autre dans l'exercice 9 p. 92 (voir Figure 8), où l'élève va être amené à constater le théorème de Varignon [8] dans différents contextes : un parallélogramme, un carré, un rectangle et un losange.

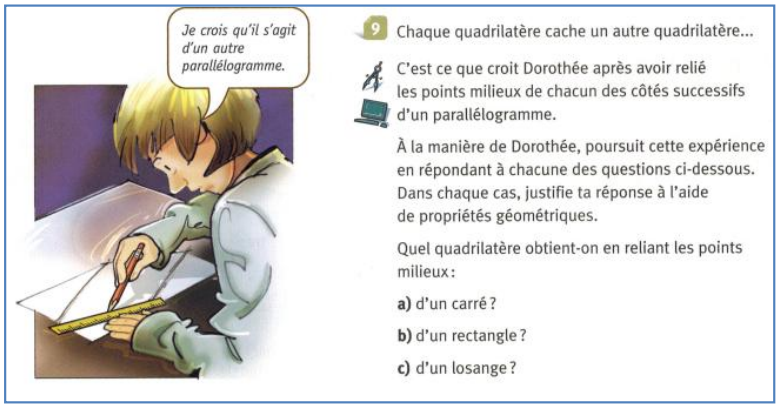


FIGURE 8 – *Perspective Secondaire 1*, Vol. A1 ; p. 92.

En effet, on lui demande de justifier sa réponse à l'aide de propriétés géométriques, donc la réponse attendue se situe au niveau de déduction informelle (niveau 3) de la théorie de van Hiele. Or en 1^e secondaire, le théorème des milieux dans un triangle n'est pas au programme [7]. Que peut faire l'élève ? Des constats sur sa figure, constats qu'il va désigner par « propriétés géométriques » qui ne seront pas sériées en propositions participant à l'élaboration d'un raisonnement hypothético-déductif (voit Tanguay et Geeraerts (2012)[12]). Le souci est alors de savoir si l'enseignant acceptera une litanie de propriétés observées sur le dessin en guise de justification. En se reportant au manuel de l'enseignant, la justification attendue (ou proposée) relève du constat sur les positions et longueurs des diagonales du quadrilatère initial, dessiné en position prototypique. Par exemple, la réponse à la question a) est la suivante :

8. La figure obtenue en joignant les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque est un parallélogramme.

> On obtient un autre carré. En effet, les axes de symétrie horizontal et vertical indiquent que les diagonales du quadrilatère tracé sont perpendiculaires, isométriques et qu'elles se coupent en leur milieu.

On peut alors se poser la question de l'intérêt de la justification demandée à l'élève en termes de propriétés géométriques et surtout à quel niveau de pensée en géométrie une telle réponse fait référence. Peut-on parler d'axe de symétrie horizontal et vertical quand on demande de faire usage des propriétés des figures géométriques ? Les raisons qui sont avancées ici deviendront inacceptables les années suivantes, dans le cadre d'un raisonnement hypothético-déductif complet. D'ailleurs dans ce même manuel de l'enseignant, page 92, on peut lire : « La justification à l'aide de propriétés sera un grand défi pour les élèves. »

En revanche, l'activité d'analyse et de construction demandée au n^{o} 10 (voir Figure 9) est très pertinente en 1^{e} secondaire du point de vue de la théorie de van Hiele.

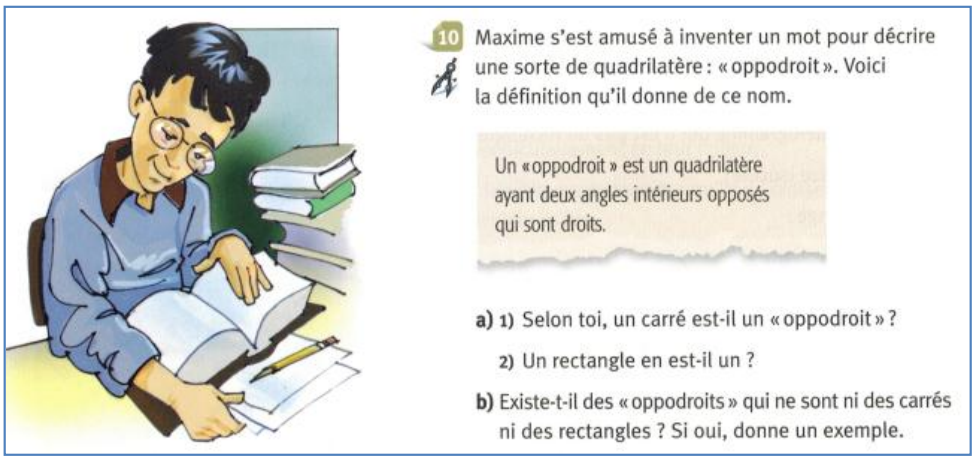


FIGURE 9 – *Perspective Secondaire 1*, Vol. A1 ; p. 92.

Dans un premier temps, l'élève est amené à réfléchir sur le rôle d'une définition ou plus précisément, sur une caractéristique que le carré et le rectangle peuvent avoir. L'énoncé de la question b) laisse entendre à l'élève qu'un tel quadrilatère existe. Il doit donc éliminer le carré et le rectangle évoqués à la question précédente et envisager une nouvelle figure. Il doit pour cela analyser et organiser les informations qui lui sont données en prenant soin de ne pas reproduire les figures qu'il connaît déjà. La gestion simultanée de ces contraintes ne demande pas l'élaboration d'un raisonnement hypothético-déductif, mais la prise en compte de propriétés géométriques théoriques. L'activité demandée à l'élève est ici un vrai défi qu'il peut mener dans un premier temps au niveau de van Hiele d'identification-visualisation en manipulant des

équerres, ou, comme le suggère le manuel de l'enseignant, en utilisant un logiciel de géométrie dynamique. La réussite ici témoigne d'une certaine maîtrise du niveau d'analyse.

En conclusion, ici, nous pouvons dire qu'il est encore fréquent de trouver au secondaire des activités qui se situent au niveau d'identification-visualisation comme à l'école primaire, que les activités relevant du niveau d'analyse sont rares et que certaines occasions d'approche du niveau de déduction informelle sont manquées.

5 Le cas du losange

Pour bien montrer que l'application de la théorie des niveaux de pensée de van Hiele est délicate à mettre en œuvre, nous donnons deux exemples, extraits des manuels de 5^e année et de 1^e secondaire des mêmes collections rédigés par les mêmes auteurs. Dans les deux cas, il s'agit de prouver que le quadrilatère formé par les rayons de deux cercles de même rayon est un losange.

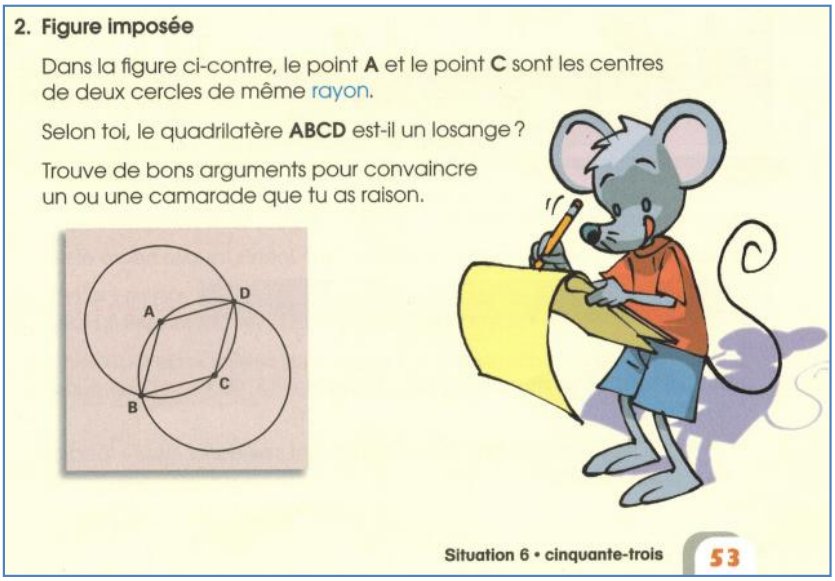


FIGURE 10 – *Clicmaths* 5^e année Vol. A1 ; p. 53.

Dans le manuel de primaire, l'exercice se situe dans la partie « Je résous » qui clôt le chapitre sur le cercle ; c'est l'une des deux activités de réinvestissement des connaissances proposées dans cette leçon. Dans le manuel du secondaire, cet exercice est le troisième de la partie consacrée aux applications directes du cours, ici aussi le cercle.

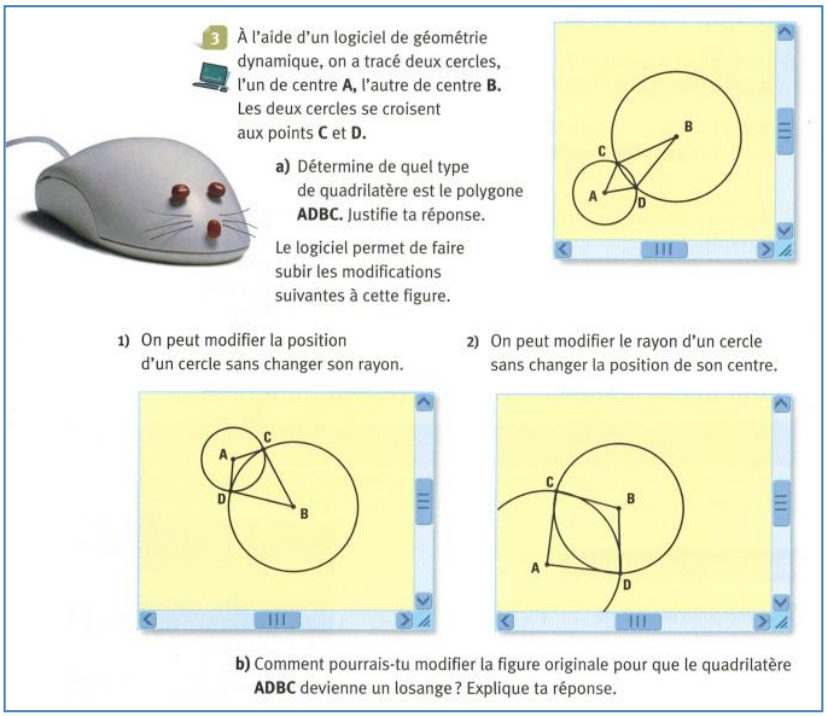


FIGURE 11 – *Perspective Secondaire 1*, Vol. A1 ; p. 96.

Néanmoins dans le manuel du primaire, l'élève ou l'équipe d'élèves est face à la figure déjà réalisée et la consigne est de trouver « de bons arguments pour convaincre un ou une camarade que tu as raison ». L'élève est donc invité à analyser les propriétés de la figure avec les moyens dont il dispose : il peut mesurer les longueurs des segments ou utiliser la définition du cercle pour arriver à la conclusion que les quatre côtés sont isométriques. Mais l'élève (et l'expérience nous l'a prouvé) peut utiliser des propriétés qu'il lit ou repère sur la figure comme autant d'arguments supplémentaires et nécessaires pour emporter la conviction d'autrui : les côtés sont parallèles, les angles opposés sont égaux, les diagonales sont perpendiculaires, etc. Une telle démarche confirme que les élèves maîtrisent le niveau d'analyse de van Hiele : ils connaissent toutes les propriétés géométriques des figures sans être en mesure de les organiser dans un raisonnement hypothético-déductif structuré. Ils ne font pas de sériations des propositions au sens de Tanguay et Geeraerts (2012)[12].

Dans le manuel du secondaire, le contexte d'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet de poser plusieurs questions exploitant la définition du cercle, en particulier dans la question a) où l'élève doit justifier la nature du quadrilatère ABCD (cerf-volant). Mais

pour ce faire, l'observation de la figure et la définition du cerf-volant permettent de donner la réponse attendue. Il n'y a pas d'argumentation à organiser : on reste au niveau d'analyse, voire d'identification-visualisation. Dans la question b), l'élève est amené à imaginer comment « modifier la figure pour que le quadrilatère ABCD devienne un losange ». Là encore, compte tenu des illustrations proposées et des commentaires qui les accompagnent (références au rayon du cercle), la réponse est « guidée » : l'élève n'a pas vraiment d'autre option que de proposer l'égalité des rayons des deux cercles. Ce faisant, peut-on considérer que l'élève a raisonné ? Il a appliqué la définition du losange qu'il connaît ; l'image proposée dans la figure 2 est à cet égard très suggestive. Et on ne peut pas savoir si, en donnant cette réponse, l'élève réalise que chaque cercle passe par le centre de l'autre. Pour cela, il faudrait lui demander de faire la construction. Un élève qui ne maîtrise que le niveau d'analyse peut parfaitement répondre à la question.

En résumé, on peut dire que la même situation géométrique est proposée aux élèves en 5^e année primaire et en 1^e secondaire, mais dans des conditions telles qu'elle est plus facile pour les élèves du secondaire que pour ceux du primaire. Et on peut faire la même remarque à propos des réponses données dans les guides respectifs de l'enseignant. Au primaire, la réponse est la démonstration formelle rédigée de façon hypothético-déductive. Elle se situe donc au niveau de déduction informelle (niveau 3) tel que défini par P.M. van Hiele, mais il est peu vraisemblable qu'un élève y réussisse. Dans le manuel de l'enseignant au secondaire, les réponses ressemblent plus à celles que donneront les élèves. Par exemple, en réponse à la question b), on peut lire p. 96 du guide de l'enseignant :

> Il faut modifier le rayon d'un cercle afin que les deux cercles aient un rayon isométrique. Chacun des cercles doit passer par le centre de l'autre cercle. Si les deux cercles (cercle de centre A et cercle de centre B) ont des rayons isométriques, les côtés du quadrilatère seront isométriques et le quadrilatère sera un losange.

La première phrase relève de l'évidence : si on ne modifie pas les rayons, on déplace le cerf-volant dans la page, mais sa nature ne change pas. L'image 1) est là pour le confirmer. On est donc au mieux au niveau d'analyse de van Hiele (niveau 2). La deuxième phrase est un commentaire qui ne fait pas avancer le raisonnement. La dernière phrase est la réponse complète sous forme d'une démonstration. Or, c'est une explication qui était demandée à l'élève. Les auteurs ont donc moins d'exigence dans cet exercice de 1^e secondaire qu'ils n'en avaient en 5^e année primaire, si l'on se réfère à la théorie des niveaux de pensée de van Hiele. On peut alors s'interroger sur les liens que font les auteurs de ces manuels avec la théorie qu'ils ont présentée dans les guides de l'enseignant et quel projet d'apprentissage ils ont pour les élèves tout au long de leur scolarité primaire et secondaire.

6 Conclusion

La théorie des niveaux de pensée en géométrie de van Hiele permet d'identifier le niveau de difficulté d'un exercice et d'anticiper les difficultés des élèves. On peut conclure, à l'issue de cette étude, que les activités de niveau identification-visualisation (niveau 1) sont nombreuses, y compris sur des objets d'apprentissage déjà connus ; les activités qui relèvent du niveau de déduction informelle (niveau 3) sont plus rares, ce qui n'est pas étonnant, surtout au primaire. Qu'en est-il du niveau 2 ? Braconne-Michoux (2008) [2] a montré toute l'importance des activités situées au niveau d'analyse (niveau 2) dans le passage d'une géométrie de l'observation et de la mesure (niveau 1) à une géométrie plus théorique (niveau 3). Dans la mesure où les auteurs des manuels étudiés font explicitement référence à la théorie des niveaux de pensée en géométrie de van Hiele, on peut s'étonner de ne pas avoir trouvé une activité où une réponse d'élève qui relève du niveau d'analyse (niveau 2) serait envisagée, acceptable, voire attendue. Par exemple, en donnant un dessin fait à main levée, portant des codages d'angles droits ou d'égalité de longueurs, on pourrait demander aux élèves de faire la liste des informations qui sont directement accessibles par l'observation du dessin et celles dont ils seront assurés parce qu'ils connaissent un certain nombre de propriétés de la figure. On pourrait aussi proposer aux élèves des figures qui ne répondent pas exactement aux critères de construction et leur demander d'en analyser les erreurs. L'idée étant, au travers de ces activités, de mettre en place une sériation de plus en plus opérationnelle des propriétés pour atteindre leur organisation en un raisonnement hypothético-déductif. Le lecteur trouvera en Annexe C (page 49) des exemples d'activités qui ont montré leur intérêt pour l'évolution des élèves à l'intérieur des niveaux de van Hiele. En effet, les activités de niveau d'analyse gagneraient à être développées, en particulier si les propriétés connues étaient ensuite exploitées dans des raisonnements localement hypothético-déductifs qui relèvent de la déduction informelle et qui montrent à l'élève que ses apprentissages en géométrie lui sont utiles pour garantir des propriétés d'une figure à l'issue d'un raisonnement et pas seulement pour les réciter ou en faire usage pour le calcul de l'hypoténuse du triangle rectangle.

Références

[1] Braconne A. (1988). *Compréhension de la démonstration en géométrie chez les professeurs et les élèves au secondaire*. Mémoire de maîtrise, Université Laval, Québec.

[2] Braconne-Michoux A. (2008). *Évolution des conceptions et de l'argumentation en géométrie chez les élèves : paradigmes et niveaux de van Hiele à l'articulation CM2-6^{e}*. Thèse de doctorat, Université de Paris Diderot-Paris 7.

[3] Brousseau G. (1984). Le rôle du maître et l'institutionnalisation, *Actes de la III^{e} école d'été de Didactique des mathématiques*. Olivet (France).

[4] Burger, W. F., Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 17, n° 1, pp. 31-48.

[5] Duval R., Egret M.A. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif, *Repères IREM*, n° 12. p. 114-140, Paris.

[6] Fujita, T. ; Jones, K. et al. (2011). Proofs and Refutations in Lower Secondary School Geometry, in Pytlak et al. editors *Proceedings of CERME7*, University of Rzeszów, Poland.

[7] Gouvernement du Québec (2006). *Programme de formation de l'école québécoise, éducation préscolaire – enseignement primaire*. Québec : Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

[8] Guay S., Hamel J.C., Lemay S. (2003). *Clicmath* 3^e *Cycle* 1^e *année*, Vol. A1, éditions Grand Duc-HRW, Laval, Québec.

[9] Guay S., Hamel J.C., Lemay S. (2003). *Clicmath* 3^e *Cycle* 2^e *année*, Vol. B1, éditions Grand Duc-HRW, Laval, Québec.

[10] Guay S., Hamel J.C., Lemay S. (2005-2006). *Perspective* 1^{er} *Cycle du secondaire*, Vol. A1, éditions Grand Duc-HRW, Laval, Québec.

[11] Gutiérrez, A., Jaime, A., Shaughnessy, J. M., Burger, W. F. (1991). A Comparative Analysis of Two Ways of Assessing the van Hiele Levels of Thinking, *Actes du colloque PME 15*, vol. 2 , pp. 109-116.

[12] Tanguay D., Geeraerts L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant, *Petit x*, n° 88, pp. 5-24.

[13] Uziskin, Z. (1982). *van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*, CDASSG Project, University of Chicago, ED220288.

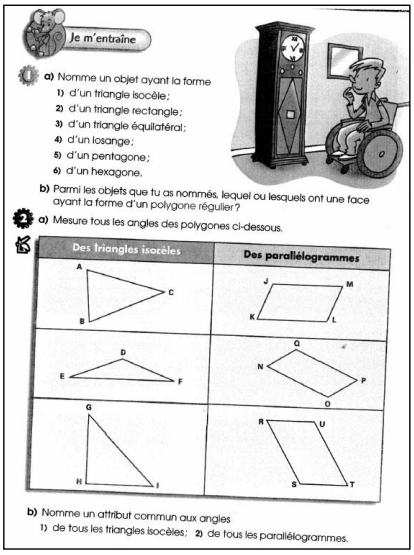
[14] Van Hiele P.M. & van Hiele – Geldof D. (1958). A Method of Initiation into Geometry, in Report on Methods of Initiation into Geometry, in Freudenthal, *Learning and Understanding in Mathematics, a Tribute to Richard Skemp*, p 27-47.

[15] Van Hiele P.M. (1959). La pensée de l'enfant et la géométrie, *Bulletin de l'APMEP*, n° 198, p. 199-205.

[16] Van de Walle, J., Lovin, L. H. (2008). *L'enseignement des mathématiques : l'élève au centre de son apprentissage*, tomes 1 à 3, éditions ERPI, Saint-Laurent (Montréal).

Annexe A

Clicmath 6^{e} année, p. 26 -27



Je m'entraîne

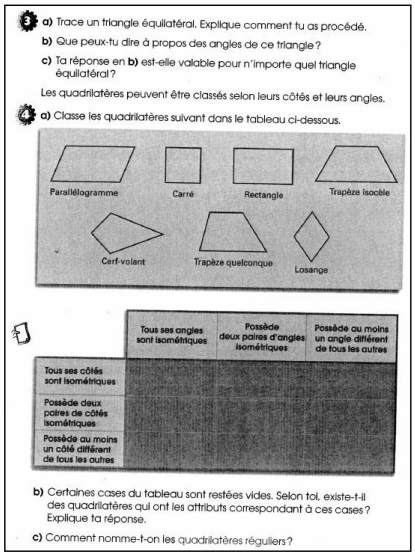
1 a) Nomme un objet ayant la forme
1) d'un triangle isocèle;
2) d'un triangle rectangle;
3) d'un triangle équilatéral;
4) d'un losange;
5) d'un pentagone;
6) d'un hexagone.

b) Parmi les objets que tu as nommés, lequel ou lesquels ont une face ayant la forme d'un polygone régulier?

2 a) Mesure tous les angles des polygones ci-dessous.

Des triangles isocèles	Des parallélogrammes
A, B, C	J, K, L, M
D, E, F	N, O, P, Q
G, H, I	R, S, T, U

b) Nomme un attribut commun aux angles
1) de tous les triangles isocèles; 2) de tous les parallélogrammes.



3 a) Trace un triangle équilatéral. Explique comment tu as procédé.
b) Que peux-tu dire à propos des angles de ce triangle?
c) Ta réponse en b) est-elle valable pour n'importe quel triangle équilatéral?

Les quadrilatères peuvent être classés selon leurs côtés et leurs angles.

4 a) Classe les quadrilatères suivant dans le tableau ci-dessous.

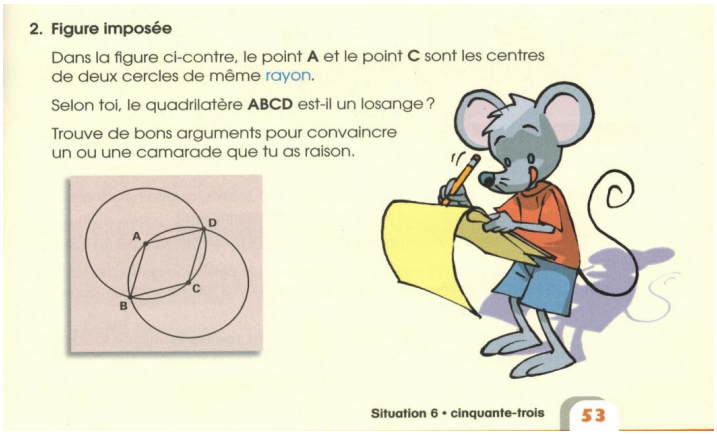
Parallélogramme, Carré, Rectangle, Trapèze isocèle, Cerf-volant, Trapèze quelconque, Losange

	Tous ses angles sont isométriques	Possède deux paires d'angles isométriques	Possède au moins un angle différent de tous les autres
Tous ses côtés sont isométriques			
Possède deux paires de côtés isométriques			
Possède au moins un côté différent de tous les autres			

b) Certaines cases du tableau sont restées vides. Selon toi, existe-t-il des quadrilatères qui ont les attributs correspondant à ces cases? Explique ta réponse.

c) Comment nomme-t-on les quadrilatères réguliers?

Clicmath 5^{e} année, p. 26 -27



2. Figure imposée

Dans la figure ci-contre, le point **A** et le point **C** sont les centres de deux cercles de même rayon.

Selon toi, le quadrilatère **ABCD** est-il un losange?

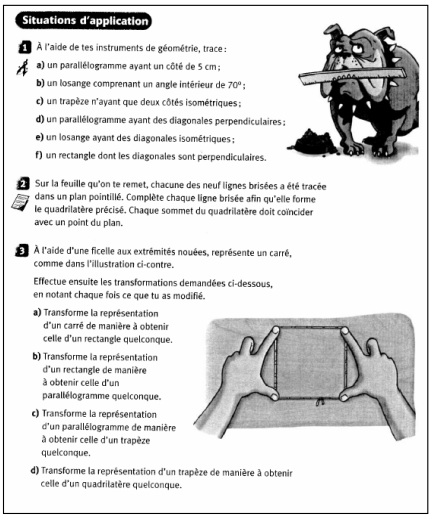
Trouve de bons arguments pour convaincre un ou une camarade que tu as raison.

A, B, C, D

Situation 6 • cinquante-trois 53

Annexe B

Perspective Secondaire 1 ; vol. A1, p. 89 -92



Situations d'application

1 À l'aide de tes instruments de géométrie, trace :

a) un parallélogramme ayant un côté de 5 cm ;

b) un losange comprenant un angle intérieur de 70° ;

c) un trapèze n'ayant que deux côtés isométriques ;

d) un parallélogramme ayant des diagonales perpendiculaires ;

e) un losange ayant des diagonales isométriques ;

f) un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires.

2 Sur la feuille qu'on te remet, chacune des neuf lignes brisées a été tracée dans un plan pointillé. Complète chaque ligne brisée afin qu'elle forme le quadrilatère précisé. Chaque sommet du quadrilatère doit coïncider avec un point du plan.

3 À l'aide d'une ficelle aux extrémités nouées, représente un carré, comme dans l'illustration ci-contre.

Effectue ensuite les transformations demandées ci-dessous, en notant chaque fois ce que tu as modifié.

a) Transforme la représentation d'un carré de manière à obtenir celle d'un rectangle quelconque.

b) Transforme la représentation d'un rectangle de manière à obtenir celle d'un parallélogramme quelconque.

c) Transforme la représentation d'un parallélogramme de manière à obtenir celle d'un trapèze quelconque.

d) Transforme la représentation d'un trapèze de manière à obtenir celle d'un quadrilatère quelconque.

4 Pour exécuter la tâche décrite ci-dessous, tu as besoin de deux cure-dents d'égale longueur et d'un troisième, plus court.

Les illustrations ci-dessous montrent comment former un quadrilatère en utilisant deux cure-dents comme diagonales.

En procédant de la même manière et en suivant les consignes ci-dessous, trace le quadrilatère formé dans chaque cas. Nomme ce quadrilatère, en justifiant ta réponse.

a) Place deux cure-dents de longueurs différentes de manière qu'ils se croisent en leur milieu.

b) Place deux cure-dents identiques de manière qu'ils se croisent en leur milieu.

c) Place deux cure-dents de longueurs différentes de manière qu'ils se croisent perpendiculairement et que l'un passe par le milieu de l'autre.

d) Place deux cure-dents identiques de manière qu'ils se croisent perpendiculairement et que l'un passe par le milieu de l'autre.

e) Place deux cure-dents de longueurs différentes de manière qu'ils se croisent perpendiculairement en leur milieu.

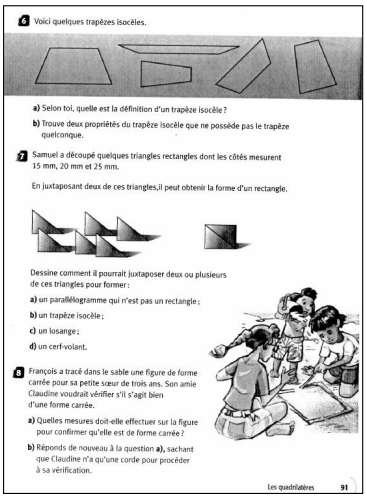
f) Place deux cure-dents identiques de manière qu'ils se croisent perpendiculairement en leur milieu.

5 Comment appelle-t-on :

a) un trapèze ayant au moins un angle droit ?

b) un parallélogramme ayant au moins un angle droit ?

c) un losange ayant au moins un angle droit ?



6 Voici quelques trapèzes isocèles.

a) Selon toi, quelle est la définition d'un trapèze isocèle ?

b) Trouve deux propriétés du trapèze isocèle que ne possède pas le trapèze quelconque.

7 Samuel a découpé quelques triangles rectangles dont les côtés mesurent 15 mm, 20 mm et 25 mm.

En juxtaposant deux de ces triangles,il peut obtenir la forme d'un rectangle.

Dessine comment il pourrait juxtaposer deux ou plusieurs de ces triangles pour former :

a) un parallélogramme qui n'est pas un rectangle ;

b) un trapèze isocèle ;

c) un losange ;

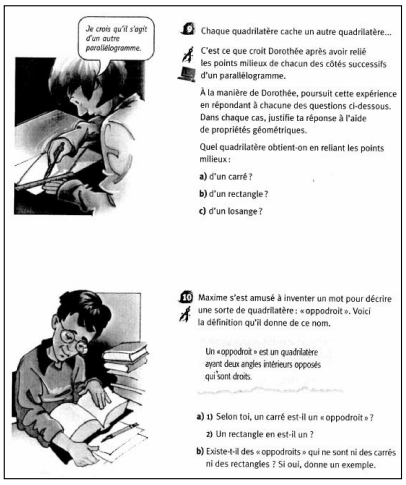
d) un cerf-volant.

8 François a tracé dans le sable une figure de forme carrée pour sa petite sœur de trois ans. Son amie Claudine voudrait vérifier s'il s'agit bien d'une forme carrée.

a) Quelles mesures doit-elle effectuer sur la figure pour confirmer qu'elle est de forme carrée ?

b) Réponds de nouveau à la question **a)**, sachant que Claudine n'a qu'une corde pour procéder à sa vérification.

Les quadrilatères 91



9 Chaque quadrilatère cache un autre quadrilatère...

C'est ce que croit Dorothée après avoir relié les points milieux de chacun des côtés successifs d'un parallélogramme.

À la manière de Dorothée, poursuit cette expérience en répondant à chacune des questions ci-dessous. Dans chaque cas, justifie ta réponse à l'aide de propriétés géométriques.

Quel quadrilatère obtient-on en reliant les points milieux :

a) d'un carré ?

b) d'un rectangle ?

c) d'un losange ?

10 Maxime s'est amusé à inventer un mot pour décrire une sorte de quadrilatère : « oppodroit ». Voici la définition qu'il donne de ce nom.

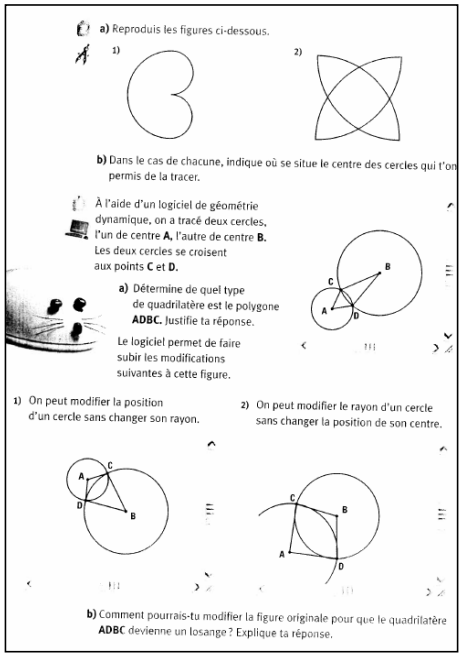
Un « oppodroit » est un quadrilatère ayant deux angles intérieurs opposés qui sont droits.

a) 1) Selon toi, un carré est-il un « oppodroit » ?

2) Un rectangle en est-il un ?

b) Existe-t-il des « oppodroits » qui ne sont ni des carrés ni des rectangles ? Si oui, donne un exemple.

Perspective Secondaire 1 ; vol. A1, p. 96 -97



a) Reproduis les figures ci-dessous.

1)

2)

b) Dans le cas de chacune, indique où se situe le centre des cercles qui t'ont permis de la tracer.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a tracé deux cercles, l'un de centre **A**, l'autre de centre **B**. Les deux cercles se croisent aux points **C** et **D**.

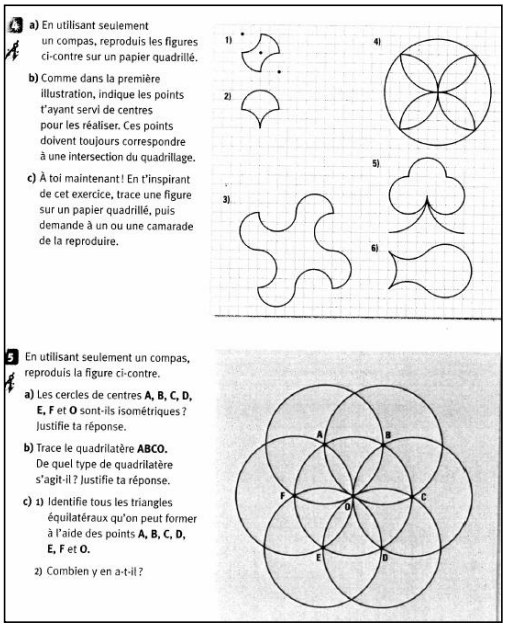
a) Détermine de quel type de quadrilatère est le polygone **ADBC.** Justifie ta réponse.

Le logiciel permet de faire subir les modifications suivantes à cette figure.

1) On peut modifier la position d'un cercle sans changer son rayon.

2) On peut modifier le rayon d'un cercle sans changer la position de son centre.

b) Comment pourrais-tu modifier la figure originale pour que le quadrilatère **ADBC** devienne un losange ? Explique ta réponse.



4 **a)** En utilisant seulement un compas, reproduis les figures ci-contre sur un papier quadrillé.

b) Comme dans la première illustration, indique les points t'ayant servi de centres pour les réaliser. Ces points doivent toujours correspondre à une intersection du quadrillage.

c) À toi maintenant ! En t'inspirant de cet exercice, trace une figure sur un papier quadrillé, puis demande à un ou une camarade de la reproduire.

5 En utilisant seulement un compas, reproduis la figure ci-contre.

a) Les cercles de centres **A, B, C, D, E, F** et **O** sont-ils isométriques ? Justifie ta réponse.

b) Trace le quadrilatère **ABCO.** De quel type de quadrilatère s'agit-il ? Justifie ta réponse.

c) 1) Identifie tous les triangles équilatéraux qu'on peut former à l'aide des points **A, B, C, D, E, F** et **O.**

2) Combien y en a-t-il ?

Annexe C

Propositions d'activités

1. La figure de Victor est-elle juste (même si elle a été réduite à la photocopie) ? [9]

Le lecteur trouvera une analyse de la mise en œuvre de ces activités dans les classes à la fin du primaire et au début du secondaire dans Braconne-Michoux (2008)[2].

Victor devait refaire en vraie grandeur la figure qu'il avait faite rapidement au brouillon. Il savait que le segment [BC] est un rayon du cercle et que sa longueur est 3 cm. Il y avait aussi un carré et un triangle équilatéral.

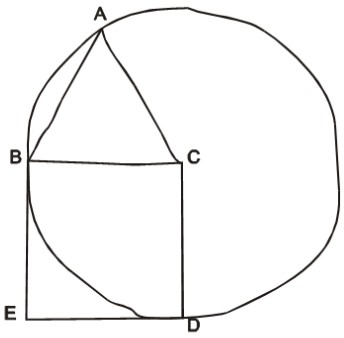
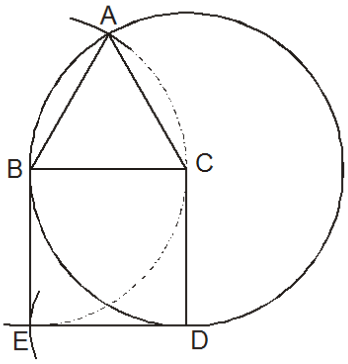


Figure de Victor :



Victor devait refaire en vraie grandeur la figure qu'il avait faite rapidement au brouillon. Il savait que le segment [BC] est un rayon du cercle et que sa longueur est 3 cm. Il y avait aussi un carré et un triangle équilatéral.

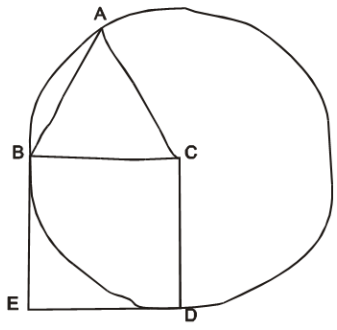
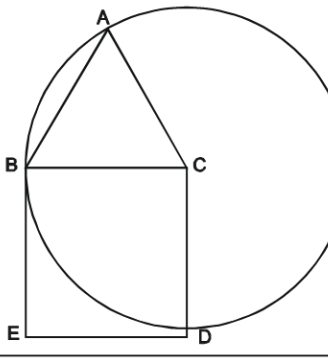


Figure de Victor :



9. Les n° 1 et 2 sont adaptés de Braconne-Michoux (2008) [2].

Victor devait refaire en vraie grandeur la figure qu'il avait faite rapidement au brouillon. Il savait que le segment [BC] est un rayon du cercle et que sa longueur est 3 cm. Il y avait aussi un carré et un triangle équilatéral.

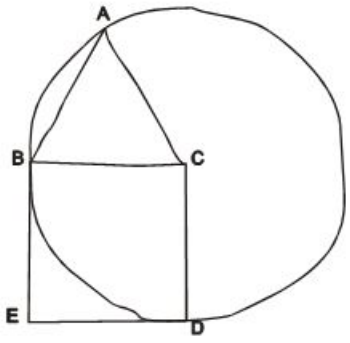
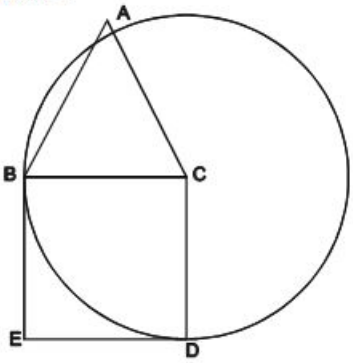
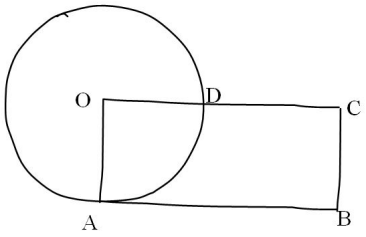


Figure de Victor :



2. Le cercle et le rectangle

Dans la situation suivante, le point O est à la fois le centre du cercle et un sommet du rectangle OABC. Le point A appartient au cercle. On sait que les longueurs CB et DC sont égales à 3 cm. Quel est le rayon du cercle ? Peut-on faire une figure en vraie grandeur ?



3. Le triangle équilatéral et le rectangle

Construire un rectangle ABCD et un triangle équilatéral ABE tel que le point E appartienne au côté CD. (On peut demander aux élèves de noter les différentes étapes de leurs constructions et les outils de validation qu'ils se sont donnés).

4. Le losange dans le cercle

Construire un losange dont trois sommets sont sur un cercle et le 4^e sommet est le centre du cercle. (Le défi est de trouver plusieurs démarches de construction, utilisant différents instruments et différentes propriétés du losange).

5. Le quadrilatère dans le cube [10]

Différents quadrilatères ont été construits à l'intérieur du cube ABCDEFGH.
Dans chaque cas, préciser la nature du quadrilatère : parallélogramme, rectangle, losange ou carré.

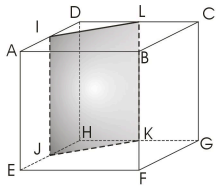
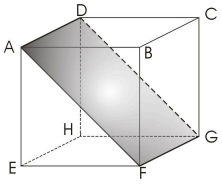
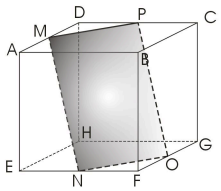
		

Figure 1	Figure 2	Figure 3
Les points I, J, K et L sont les milieux des arêtes [AD], [EH], [HG] et [DC].		Les points M, N, O et P sont les milieux des arêtes [AD], [EF], [FG] et [DC].
IJKL est un _____	ADFG est un _____	MNOP est un _____

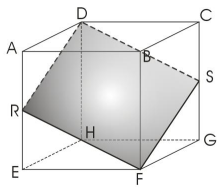
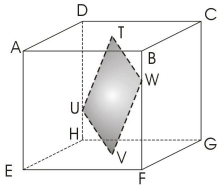
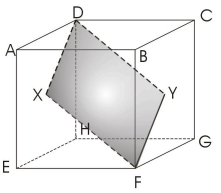
		

Figure 4	Figure 5	Figure 6
Les points R et S sont les milieux des arêtes [AE] et [CG].	Les points T, U, V et W sont les centres des faces ABCD, ABFE, EFGH et DCGH.	Les points X et Y sont les centres des faces AEHD et BCGF.
DRSF est un _____	TUVW est un _____	DXFY est un _____

10. D'après une idée de Fujita et Jones, (2011) ([6]).