Les nombres polygonaux et la généralisation

André Ross
Cégep de Lévis-Lauzon

Dans son article du Bulletin de décembre 2004, Jacques Sormany, en procédant par inférence, obtient une généralisation de la formule des nombres polygonaux. En comparant les formes générales des nombres triangulaires, carrés, pentagonaux, hexagonaux et des heptagonaux, il obtient une formulation décrivant les nombres $(k+2)$gonaux.

Nombres triangulaires : $P_{3,n} = \dfrac{n^2+n}{2}$.

Nombres carrés : $P_{4,n} = \dfrac{2n^2}{2} = n^2$.

Nombres pentagonaux : $P_{5,n} = \dfrac{3n^2-n}{2}$.

Nombres hexagonaux : $P_{6,n} = \dfrac{4n^2-2n}{2} = 2n^2-n$.

Nombres heptagonaux : $P_{7,n} = \dfrac{5n^2-3n}{2}$.

Nombres $(k+2)$gonaux : $P_{k+2,n} = \dfrac{kn^2-(k-2)n}{2}$.

Par la suite, il pose quelques problèmes :

Soit m un entier pris au hasard. De combien de façons peut-on l'exprimer comme nombre polygonal ?

Soit x un entier quelconque. Combien de nombres sont polygonaux exactement de x façons et comment peut-on les trouver ?

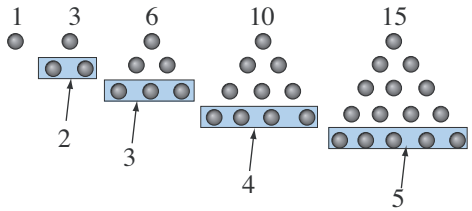
Peut-on trouver une formule générale donnant les entiers dont la forme polygonale non triviale est unique ?

L'inférence n'est pas la seule procédure permettant d'obtenir la forme générale des nombres $(k+2)$gonaux. Nous en présenterons quelques-unes dans cet article.

À la manière de Pythagore

Nombres triangulaires

Les nombre triangulaires sont ceux que l'on peut disposer de façon à former un triangle comme dans l'illustration suivante.



On obtient la suite des nombres triangulaires en ajoutant successivement une ligne au bas du triangle. Cela signifie l'ajout d'un nombre entier de points. Le nombre de points sur la ligne extérieure est appelé le *gnomon* du nombre. Ainsi, en ajoutant une ligne extérieure de 6 points au nombre 15, on obtient le nombre triangulaire suivant, soit 21. En ajoutant une ligne de 7 points, on obtient 28, ainsi de suite. Pour passer du nombre de rang n–1 au nombre de rang n, on doit ajouter une ligne de n points.

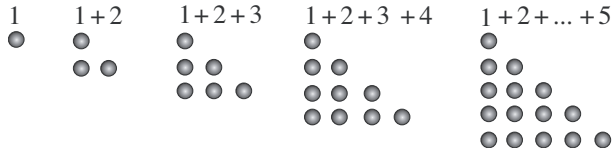
La suite des gnomons des nombres triangulaires est alors :

$$\{2; 3; 4; 5; 6; 7; \ldots; n; \ldots\}.$$

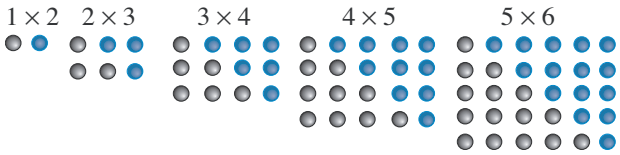
On constate que les nombres triangulaires sont les sommes partielles de la progression arithmétique de raison 1 et dont le premier terme est 1. Ainsi, le nombre triangulaire de rang n, que nous noterons $P_{3,n}$, est la somme :

$$P_{3,n} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

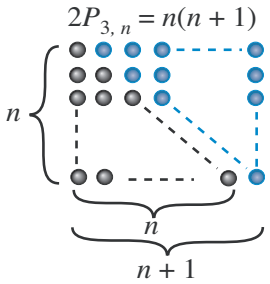
En disposant les nombres pour former des triangles rectangles plutôt que des triangles équilatéraux, on obtient les configurations suivantes pour les premières sommes partielles :



On peut alors reproduire chacun des triangles avec une rotation de 180°, cela donne :



On obtient chaque fois un rectangle dont on peut facilement déterminer le nombre de points. En effet, le nombre de lignes est le rang n du nombre triangulaire et le nombre de colonnes est le gnomon additionné de l'unité. Dans le cas général, le gnomon est n et le nombre de colonnes est $n+1$.



En écriture moderne, obtient donc que :

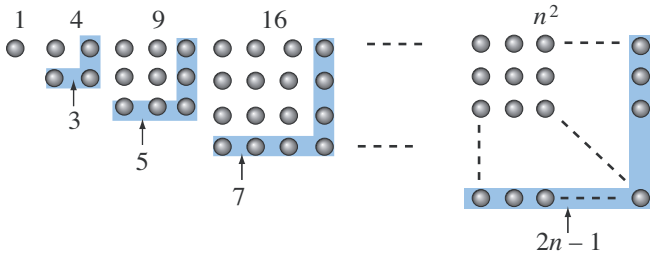
$$2P_{3,n} = n(n+1).$$

D'où l'on tire :

$$P_{3,n} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nombres carrés

On peut procéder de la même façon avec les nombres carrés. Comme l'illustre la figure suivante, le gnomon qui permet de passer du nombre carré de rang n–1 au terme de rang n est $2n$–1.



La suite des gnomons est alors la suite des nombres impairs

$$\{3; 5; 7; 9; \ldots; (2n–1); \ldots\}.$$

On obtient donc les nombres carrés en effectuant les sommes partielles de la progression arithmétique de raison 2 et dont le premier terme est 1, soit :

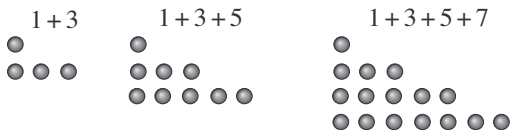
$C_1 = 1 = 1^2$

$C_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$

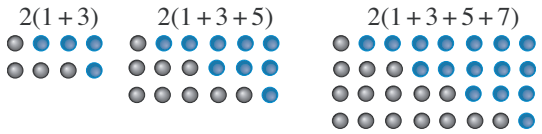
$C_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$C_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

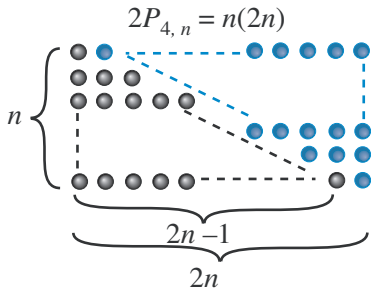
En représentant ces sommes partielles par des points en utilisant une ligne par terme, on peut alors disposer les lignes de façon à former des triangles rectangles. Cela donne :



En reproduisant chacun des triangles avec une rotation de 180°, on obtient :



On a chaque fois un rectangle dont on peut facilement déterminer le nombre de points. Le nombre de lignes est le rang n du nombre et le nombre de colonnes est le gnomon additionné de l'unité.

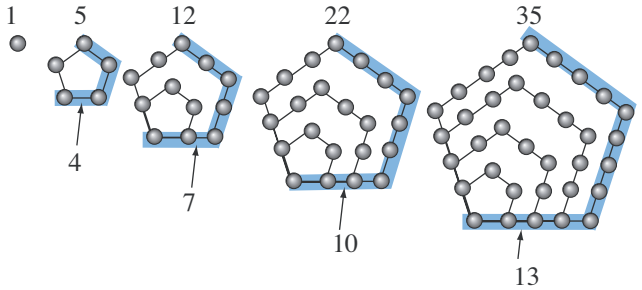


Ainsi, le nombre carré de rang n est donné par :

$$2P_{4,n} = n(2n) \text{ et } P_{4,n} = n^2.$$

Nombres pentagonaux

Les premiers nombres pentagonaux sont :

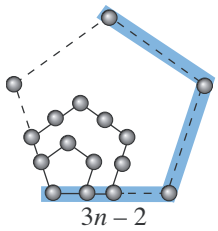


Chaque nombre pentagonal peut être considéré comme une somme partielle des termes de la progression arithmétique de raison 3 et dont le premier terme est 1, soit :

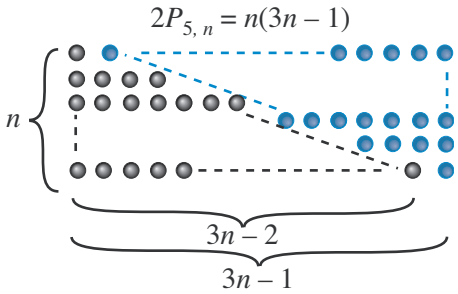
$$\{1; 4; 7; 10; 13; \ldots\}.$$

La figure suivante montre que le gnomon est constitué de trois côtés de n points et ces côtés se recoupent en deux sommets. La forme générale du gnomon est donc $3n$–2 et le nombre pentagonal de rang n est la somme partielle :

$$P_{5,n} = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + (3n - 2).$$



Si on représente chaque terme de cette somme partielle par des points en utilisant une ligne par terme, on a :

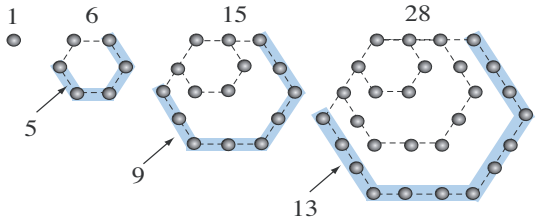


D'où l'on tire :

$$2P_{5,n} = n(3n - 1) \text{ et } P_{5,n} = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Nombres hexagonaux

Les premiers nombres hexagonaux sont :

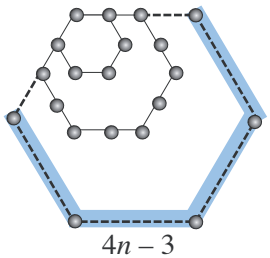


Les nombres hexagonaux sont donc obtenus en effectuant les sommes partielles de la progression arithmétique dont le premier terme est 1 et dont la raison est 4, soit :

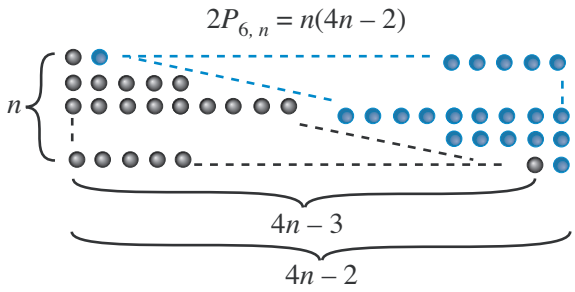
$$\{1; 5; 9; \underline{13}; 17; \ldots\}.$$

La figure suivante montre que le gnomon est constitué de quatre côtés de n points. Puisque ces côtés se recoupent en trois sommets, la forme générale du gnomon est $4n$–3. Le nombre hexagonal de rang n est la somme partielle :

$$P_{6,n} = 1 + 5 + 9 + \underline{13} + 17 + \ldots + (4n–3).$$



Connaissant la forme générale du gnomon, on peut trouver celle des nombres hexagonaux. En représentant chaque terme de cette somme partielle par des points et en utilisant une ligne par terme, on a :



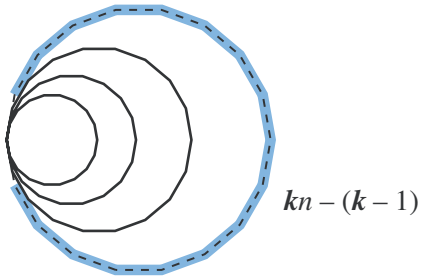
On obtient donc :

$$2P_{6,n} = n(4n–2) \text{ d'où : } P_{6,n} = n(2n–1).$$

Nombres polygonaux à $k + 2$ côtés

De façon générale, les gnomons des nombres polygonaux à $k + 2$ côtés forment une progression arithmétique de raison k. Les nombres polygonaux à $k + 2$ côtés sont alors les sommes partielles de la progression arithmétique de raison k et dont le premier terme est 1. On peut donc, en procédant comme précédemment, déterminer la forme générale d'un nombre polygonal à k côtés de rang n.

Chaque nombre $(k + 2)$gonal peut s'exprimer comme somme partielle des termes de la progression arithmétique de raison k et dont le premier terme est 1.



Dans ce cas, le gnomon est constitué de k côtés de n points. Puisque ces côtés se recoupent en k–1 sommets, la forme générale du gnomon est kn–(k–1). Le nombre $(k+2)$gonal de rang n est la somme partielle :

$$P_{k+2,n} = 1 + (k+1) + (2k+1) + ... + [kn–(k–1)]$$

d'où : $P_{k+2,n} = \dfrac{n(kn-k+2)}{2}$.

En procédant à la manière de Pythagore, on obtient le même résultat que celui auquel Jacques Sormany était parvenu par inférence.

Progressions arithmétiques

En reconnaissant qu'un nombre $(k+2)$gonal de rang n est la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique, on peut généraliser en utilisant la formule donnant la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique. Cette somme est donnée par :

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d).$$

Dans le cas d'un nombre $(k+2)$gonal, le premier terme est $a = 1$ et la raison est $d = k$. En substituant, on obtient alors :

$$S_n = P_{k+2,n} = \frac{n(2 \times 1 + (n-1)k)}{2} = \frac{n(kn-k+2)}{2}.$$

On obtient à nouveau le même résultat, mais pas de nouvelle piste de réflexion.

Table de différences

On peut procéder à la généralisation en considérant que les gnomons d'un nombre polygonal constituent une ligne d'une table de différences associée à un polynôme. Procédons à l'aide d'un exemple pour bien saisir cette idée.

Considérons le polynôme :

$$f(x) = x^3 – 2x + 4.$$

En calculant l'image par f des valeurs entières $x = 0, 1, 2, 3 \ldots$, on obtient :

4 3 8 25 60 119 208 333 500 ...

En écrivant sous cette ligne d'images les différences entre deux nombres consécutifs, on obtient :

4 3 8 25 60 119 208 333 500 ...
–1 5 17 35 59 89 125 167 ···

En calculant les différences des différences et en continuant ainsi, on obtient :

4 3 8 25 60 119 208 333 500 ...
–1 5 17 35 59 89 125 167 ···
6 12 18 24 30 36 42 ...
6 6 6 6 6 6 ...
0 0 0 0 0 ···

C'est la *table des différences* associée au polynôme :

$$f(x) = x^3 – 2x + 4.$$

Considérons maintenant le polynôme :

$$g(x) = x^2 + 3x – 2.$$

En calculant les images des valeurs entières $x = 0, 1, 2, 3 \ldots$ et en construisant la table des différences, on obtient :

–2 2 8 16 26 38 52 68 86 ...
4 6 8 10 12 14 16 18 ···
2 2 2 2 2 2 2 ...
0 0 0 0 0 0 ...

On peut définir des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire de ces tables de différences. La somme de deux tables de différences est associée à la somme des polynômes. Ainsi,

la table des différences du polynôme :

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (x^3 - 2x + 4) + (x^2 + 3x - 2) \\ &= x^3 + x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

est la somme des tables des polynômes $f(x)$ et $g(x)$, soit :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{16} & \mathbf{41} & \mathbf{86} & \mathbf{157} & \mathbf{260} & \mathbf{401} & \mathbf{586} & \mathbf{...} \\ & \mathbf{3} & \mathbf{11} & \mathbf{25} & \mathbf{45} & \mathbf{71} & \mathbf{103} & \mathbf{141} & \mathbf{185} & \mathbf{...} \\ & & \mathbf{8} & \mathbf{14} & \mathbf{20} & \mathbf{26} & \mathbf{32} & \mathbf{38} & \mathbf{44} & \mathbf{...} \\ & & & \mathbf{6} & \mathbf{6} & \mathbf{6} & \mathbf{6} & \mathbf{6} & \mathbf{6} & \mathbf{...} \\ & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{...} \end{array}$$

De plus, la table du produit d'un polynôme f par un scalaire a est le produit de la table des différences de f par le scalaire a.

En fait, puisque l'ensemble des polynômes munie de l'addition et de la multiplication par un scalaire forme un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, il en est de même pour l'ensemble des tables de différences. On pourrait le montrer en définissant un isomorphisme ou en montrant que chacune des propriétés des opérations d'un espace vectoriel est satisfaite. On peut également montrer que : pour un polynôme de degré n, les valeurs de la ligne n sont constantes et celles de la ligne $n+1$ sont toutes nulles.

On peut déterminer une base de cet espace vectoriel en constatant qu'on peut facilement construire une table de différences par additions successives en ne connaissant que le bord de gauche de la table. En effet, chaque table contient des triplets x, y et z disposés en triangles de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} x & & y \\ & z & \end{array} \qquad \text{où } z = y - x$$

On a donc $y = x + z$.

En connaissant le bord gauche d'une table de différences, on peut la construire par additions successives. Les tables de différences dont les bords gauches sont les suivants constituent une base de cet espace vectoriel :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{1} & . & . & . & . \\ & \mathbf{0} & . & . & . \\ & & \mathbf{0} & . & . \\ & & & \mathbf{0} & . \\ & & & & \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} & . & . & . & . \\ & \mathbf{1} & . & . & . \\ & & \mathbf{0} & . & . \\ & & & \mathbf{0} & . \\ & & & & \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} & . & . & . & . \\ & \mathbf{0} & . & . & . \\ & & \mathbf{1} & . & . \\ & & & \mathbf{0} & . \\ & & & & \mathbf{0} \\ & & & & \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} & . & . & . & . \\ & \mathbf{0} & . & . & . \\ & & \mathbf{0} & . & . \\ & & & \mathbf{1} & . \\ & & & & \mathbf{0} \\ & & & & \vdots \end{array}$$

On peut compléter les tables de cette base et déterminer le polynôme associé. Pour la première table, on trouve :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
f_0(0) & & f_0(1) & & f_0(2) & & f_0(3) & & \dots & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots & & \\
 & & & 0 & & 0 & & \dots & & & \\
 & & & & 0 & & \dots & & & &
\end{array}
$$

La première table est donc celle du polynôme :

$$f_0(x) = 1.$$

Pour la deuxième table, on trouve :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
f_1(0) & & f_1(1) & & f_1(2) & & f_1(3) & & \dots & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \dots & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots & & \\
 & & & 0 & & 0 & & \dots & & & \\
 & & & & 0 & & \dots & & & &
\end{array}
$$

La deuxième table est celle du polynôme

$$f_1(x) = x.$$

Pour la troisième table, on trouve :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
f_2(0) & & f_2(1) & & f_2(2) & & f_2(3) & & \dots & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & & 0 & & 1 & & 3 & & 6 & \dots & \\
 & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & \dots & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots & & \\
 & & & 0 & & 0 & & \dots & & & \\
 & & & & 0 & & \dots & & & &
\end{array}
$$

La première ligne indique que $f_2(0) = f_2(1) = 0$. On cherche donc un polynôme de degré 2 dont x et $x - 1$ sont des facteurs, soit un polynôme de la forme $f_2(x) = ax(x - 1)$. La première ligne indique également que $f_2(2) = 1$. Par substitution, on trouve :

$$f_2(2) = 2a(2 - 1) = 2a = 1$$

d'où l'on tire $a = 1/2$. La troisième table est donc celle du polynôme :

$$f_2(x) = \frac{x(x-1)}{2!}.$$

Pour la quatrième table, on trouve :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
f_3(0) & & f_3(1) & & f_3(2) & & f_3(3) & & \ldots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 4 & & 10 & & \ldots \\
 & 0 & & 0 & & 1 & & 3 & & 6 & & \ldots & \\
 & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & \ldots & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & \ldots & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & \ldots & & & &
\end{array}$$

La première ligne indique que $f_3(0) = f_3(1) = f_3(2) = 0$. On cherche donc un polynôme de degré 3 dont $x, x-1$ et $x-2$ sont des facteurs, soit un polynôme de la forme $f_3(x) = ax(x-1)(x-2)$. La première ligne indique également que $f_3(3) = 1$. Par substitution, on trouve :

$$f_3(3) = 3a(3-1)(3-2) = 6a = 1$$

d'où l'on tire $a = 1/6$. La quatrième table est donc celle du polynôme :

$$f_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}.$$

En généralisant, les polynômes associés aux tables construites de la manière indiquée sont :

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= 1 \\
f_1(x) &= \frac{x}{1!} \\
f_2(x) &= \frac{x(x-1)}{2!} \\
f_3(x) &= \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_r(x) &= \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)}{r!}.
\end{aligned}$$

Considérons de nouveau la table

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
4 & & 3 & & 8 & & 25 & & 60 & & 119 & & 208 & & 333 & & 500 & & \ldots \\
 & -1 & & 5 & & 17 & & 35 & & 59 & & 89 & & 125 & & 167 & & \ldots & \\
 & & 6 & & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & & 36 & & 42 & & \ldots & & \\
 & & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & \ldots & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \ldots & & & &
\end{array}$$

Les nombres du bord de gauche sont $4, -1, 6$, et 6. On peut alors déterminer le polynôme associé puisque c'est une combinaison linéaire des polynômes associés aux tables de la base et que les nombres

du bord de gauche sont les scalaires de cette combinaison linéaire. On a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= 4f_0(x) - f_1(x) + 6f_2(x) + 6f_3(x) \\ &= 4 - x + 6 \times \frac{x(x-1)}{2!} + 6 \times \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \\ &= 4 - x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x \\ &= x^3 - 2x + 4. \end{aligned}$$

Application aux nombres polygonaux

Il est également possible de reconstruire une table de différences à partir d'une de ses lignes en connaissant le rang de cette ligne. Ainsi, on sait que les nombres triangulaires sont obtenus en effectuant les sommes partielles de la progression :

$$\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \ldots; n; \ldots\}.$$

Les nombres de cette progression constituent donc la ligne des premières différences dans la table dont la première ligne est constituée des nombres triangulaires. En reconstruisant cette table à partir de sa ligne des premières différences, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbf{0} & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{6} & & \mathbf{10} & & \mathbf{15} & & \mathbf{21} & & \mathbf{28} & & \mathbf{36} & & \mathbf{...} \\ & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{3} & & \mathbf{4} & & \mathbf{5} & & \mathbf{6} & & \mathbf{7} & & \mathbf{8} & & \mathbf{...} \\ & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{...} & & \\ & & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{...} & & & \end{array}$$

Les nombres triangulaires sont les images des entiers positifs par le polynôme associé à cette table. Le nombre triangulaire de rang n est alors :

$$\begin{aligned} P_{3,n} &= f_1(n) + f_2(n) = \frac{n}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} = n + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Les nombres carrés donnent la table des différences :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbf{0} & & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{9} & & \mathbf{16} & & \mathbf{25} & & \mathbf{36} & & \mathbf{49} & & \mathbf{64} & & \mathbf{...} \\ & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{5} & & \mathbf{7} & & \mathbf{9} & & \mathbf{11} & & \mathbf{13} & & \mathbf{15} & & \mathbf{...} \\ & & \mathbf{2} & & \mathbf{2} & & \mathbf{2} & & \mathbf{2} & & \mathbf{2} & & \mathbf{2} & & \mathbf{2} & & \mathbf{...} & & \\ & & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{...} & & & \end{array}$$

Les nombres carrés sont les images des entiers positifs par le polynôme associé, soit :

$$\begin{aligned} P_{4,n} &= f_1(n) + 2f_2(n) = n + \frac{2n(n-1)}{2} \\ &= n + n^2 - n = n^2. \end{aligned}$$

Les nombres pentagonaux donnent la table des différences :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{12} & \mathbf{22} & \mathbf{35} & \mathbf{51} & \mathbf{70} & \mathbf{92} & \mathbf{...} \\
 & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{10} & \mathbf{13} & \mathbf{16} & \mathbf{19} & \mathbf{22} & \mathbf{...} \\
 & & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{...} \\
 & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{...}
\end{array}
$$

Les nombres pentagonaux sont décrits par :

$$
\begin{aligned}
P_{5,n} &= f_1(n) + 3f_2(n) = n + \frac{3n(n-1)}{2} \\
&= \frac{2n + 3n^2 - 3n}{2} = \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Les nombres hexagonaux donnent la table des différences :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{15} & \mathbf{28} & \mathbf{45} & \mathbf{66} & \mathbf{91} & \mathbf{120} & \mathbf{...} \\
 & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{9} & \mathbf{13} & \mathbf{17} & \mathbf{21} & \mathbf{25} & \mathbf{29} & \mathbf{...} \\
 & & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{...} \\
 & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{...}
\end{array}
$$

Les nombres hexagonaux sont décrits par :

$$
\begin{aligned}
P_{6,n} &= f_1(n) + 4f_2(n) = n + \frac{4n(n-1)}{2} \\
&= \frac{2n + 4n^2 - 4n}{2} = \frac{4n^2 - 2n}{2} = 2n^2 - n = n(2n-1).
\end{aligned}
$$

Les nombres heptagonaux donnent la table des différences :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{18} & \mathbf{34} & \mathbf{55} & \mathbf{81} & \mathbf{112} & \mathbf{148} & \mathbf{...} \\
 & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{11} & \mathbf{16} & \mathbf{21} & \mathbf{26} & \mathbf{31} & \mathbf{36} & \mathbf{...} \\
 & & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{...} \\
 & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{...}
\end{array}
$$

Les nombres heptagonaux sont décrits par :

$$
\begin{aligned}
P_{7,n} &= f_1(n) + 5f_2(n) = n + \frac{5n(n-1)}{2} \\
&= \frac{2n + 5n^2 - 5n}{2} = \frac{5n^2 - 3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}.
\end{aligned}
$$

Les nombres $(k+2)$gonaux donnent la table des différences :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{k+2} & \boldsymbol{3k+3} & \boldsymbol{6k+4} & \boldsymbol{10k+5} & \boldsymbol{15k+6} & \mathbf{...} \\
 & \mathbf{1} & \boldsymbol{k+1} & \boldsymbol{2k+1} & \boldsymbol{3k+1} & \boldsymbol{4k+1} & \boldsymbol{5k+1} & \mathbf{...} \\
 & & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k} & \mathbf{...} \\
 & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{...}
\end{array}
$$

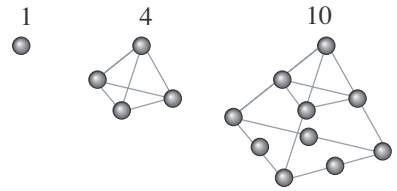
Les nombres polygonaux à $(k+2)$gonaux sont décrits par :

$$\begin{aligned} P_{k+2,n} &= f_1(n) + kf_2(n) = n + \frac{kn(n-1)}{2} \\ &= \frac{2n + kn^2 - kn}{2} = \frac{kn^2 - kn + 2n}{2} = \frac{n[kn-(k-2)]}{2}. \end{aligned}$$

Nombres pyramidaux

On peut utiliser cette procédure pour déterminer les formes générales des nombres pyramidaux.

Considérons les nombres pyramidaux à base triangulaire.



Les nombres qui constituent les gnomons des nombres pyramidaux à base triangulaire sont les nombres triangulaires :

$$\{1; 3; 6; 10; 15; \ldots\}.$$

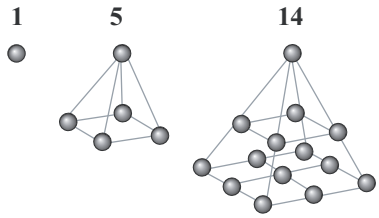
En considérant ces valeurs sur la deuxième ligne, on peut alors reconstituer le tableau suivant :

0	**0**	**1**	**4**	**10**	**20**	**35**	**56**	**84**	**...**
0	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	**36**	**...**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**...**	
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**...**		
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**...**			

Il suffisait donc d'ajouter une autre ligne au-dessus de la table des différences associée aux nombres triangulaires.

$$\begin{aligned} f_2(n) + f_3(n) &= \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \\ &= n(n-1)\left[\frac{1}{2} + \frac{(n-2)}{6}\right] \\ &= n(n-1)\left[\frac{3}{6} + \frac{(n-2)}{6}\right] \\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant la somme des n premiers nombres carrés qui donne le nombre pyramidal à base carrée de rang n.



Les nombres qui constituent les gnomons des nombres pyramidaux à base carrée sont les nombres carrés :

$$\{1; 4; 9; 16; 25; \ldots\}.$$

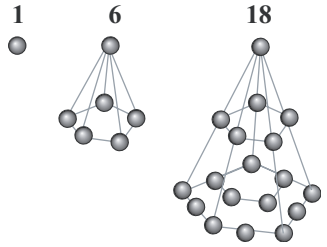
En considérant ces valeurs sur la deuxième ligne, on peut alors reconstituer le tableau suivant :

0	**0**	**1**	**5**	**14**	**30**	**55**	**91**	**140**	**...**
	0	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64** **...**
		1	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15** **...**
			2	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2** **...**
				0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0** **...**

L'image de n par le polynôme associé est alors :

$$\begin{aligned} f_2(n) + 2f_3(n) &= \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{3!} \\ &= n(n-1)\left[\frac{1}{2} + \frac{2(n-2)}{6}\right] \\ &= n(n-1)\left[\frac{3}{6} + \frac{2n-4}{6}\right] \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}. \end{aligned}$$

On procède de la même façon pour la somme des n premiers nombres pentagonaux qui donne le nombre pyramidal à base pentagonal de rang n. On obtient alors :



Les nombres qui constituent les gnomons des nombres pyramidaux à base pentagonale sont :

$$\{1; 5; 12; 22; 35; \ldots\}.$$

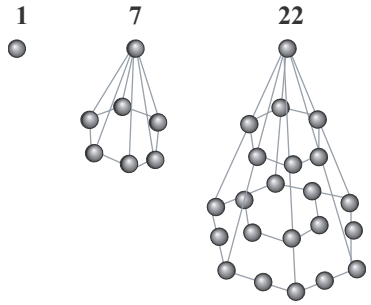
En considérant ces valeurs sur la deuxième ligne, on peut alors reconstituer le tableau suivant :

0	**0**	**1**	**6**	**18**	**40**	**75**	**126**	**196**	**...**
0	**1**	**5**	**12**	**22**	**35**	**51**	**70**	**92**	**...**
1	**4**	**7**	**10**	**13**	**16**	**19**	**22**	**...**	
3	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**...**		
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**...**			

L'image de n par le polynôme associé est alors :

$$\begin{aligned} f_2(n) + 3f_3(n) &= \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{3n(n-1)(n-2)}{3!} \\ &= n(n-1)\left[\frac{1}{2} + \frac{3(n-2)}{6}\right] \\ &= n(n-1)\left[\frac{3}{6} + \frac{3n-6}{6}\right] \\ &= \frac{n(n-1)(3n-3)}{6} = \frac{n(n-1)^2}{2}. \end{aligned}$$

Les nombres qui constituent les gnomons des nombres pyramidaux à base hexagonale sont :



Ces nombres sont les sommes partielles des termes de la suite :

$$\{1; 6; 15; 28; 45; \ldots\}.$$

En considérant ces valeurs comme deuxième ligne d'une table de différences, on peut alors reconstituer le tableau suivant :

0	**0**	**1**	**7**	**22**	**50**	**95**	**161**	**252**	**...**
0	**1**	**6**	**15**	**28**	**45**	**66**	**91**	**120**	**...**
1	**5**	**9**	**13**	**17**	**21**	**25**	**29**	**...**	
4	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**...**		
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**...**			

$$\begin{aligned} f_2(n) + 4f_3(n) &= \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{4n(n-1)(n-2)}{3!} \\ &= n(n-1)\left[\frac{1}{2} + \frac{4(n-2)}{6}\right] \\ &= n(n-1)\left[\frac{3}{6} + \frac{4n-8}{6}\right] = \frac{n(n-1)(4n-5)}{6}. \end{aligned}$$

Les nombres qui constituent les gnomons des nombres pyramidaux à base heptagonale sont :

$$\{1; 7; 18; 34; 55; \ldots\}.$$

En considérant ces valeurs sur la deuxième ligne, on peut alors reconstituer le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{26} & \mathbf{60} & \mathbf{115} & \mathbf{196} & \mathbf{308} & \mathbf{...} & \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{18} & \mathbf{34} & \mathbf{55} & \mathbf{81} & \mathbf{112} & \mathbf{148} & \mathbf{...} \\
 & & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{11} & \mathbf{16} & \mathbf{21} & \mathbf{26} & \mathbf{31} & \mathbf{36} & \mathbf{...} \\
 & & & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{...} \\
 & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{...}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
f_2(n) + 5f_3(n) &= \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{5n(n-1)(n-2)}{3!} \\
&= n(n-1)\left[\frac{1}{2} + \frac{5(n-2)}{6}\right] \\
&= n(n-1)\left[\frac{3}{6} + \frac{5n-10}{6}\right] = \frac{n(n-1)(5n-7)}{6}.
\end{aligned}$$

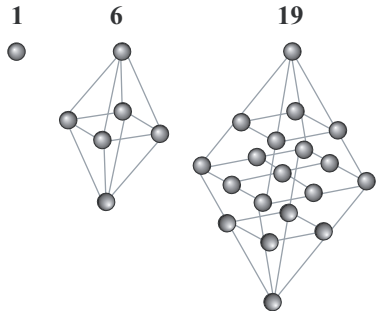
En généralisant, aux nombres pyramidaux à base $(k+2)$gonale, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{k+3} & \boldsymbol{4k+6} & \boldsymbol{10k+10} & \boldsymbol{20k+15} & \mathbf{...} & \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{k+2} & \boldsymbol{3k+3} & \boldsymbol{6k+4} & \boldsymbol{10k+5} & \boldsymbol{15k+6} & \mathbf{...} \\
 & & \mathbf{1} & \boldsymbol{k+1} & \boldsymbol{2k+1} & \boldsymbol{3k+1} & \boldsymbol{4k+1} & \boldsymbol{5k+1} & \mathbf{...} \\
 & & & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k} & \mathbf{...} \\
 & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{...}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
f_2(n) + kf_3(n) &= \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{kn(n-1)(n-2)}{3!} \\
&= n(n-1)\left[\frac{1}{2} + \frac{k(n-2)}{6}\right] \\
&= n(n-1)\left[\frac{3}{6} + \frac{kn-2k}{6}\right] \\
&= \frac{n(n-1)(kn-2k+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Nombres octaédraux

Un nombre octaédral est la somme de deux nombres pyramidaux à base carrée successifs. Les premiers nombres octaédraux sont donnés dans l'illustration suivante :



$$\begin{aligned}
OC_n &= PC_{4,n} + PC_{4,n-1} \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{6} \\
&= \frac{(n-1)}{6}[n(2n-1) + (n-2)(2n-3)] \\
&= \frac{(n-1)}{6}[4n^2 - 8n + 6] \\
&= \frac{(n-1)(2n^2 - 4n + 3)}{3}.
\end{aligned}$$

La table de différences associée aux nombres octaédraux est :

–1	**0**	**1**	**6**	**19**	**44**	**85**	**146**	**231**	**...**
1	**1**	**5**	**13**	**25**	**41**	**61**	**85**	**113**	**...**
0	**4**	**8**	**12**	**16**	**20**	**24**	**28**	**...**	
4	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**...**		
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**...**			

Détection des nombres polygonaux

On peut facilement à l'aide d'Excel dépister les nombres qui s'expriment de diverses façons comme nombres $(k+2)$gonaux. En effet, un nombre $(k+2)$gonal est de la forme :

$$P_{k+2,n} = n + k\frac{n(n-1)}{2}.$$

Un nombre m est donc le n nombre polygonal s'il existe un entier k tel que :

$$n + k\frac{n(n-1)}{2} = m \text{ ou } k = \frac{2(m-n)}{n(n-1)}.$$

On peut préparer une feuille d'Excel de telle sorte qu'en donnant une valeur au paramètre m, Excel calcule ce rapport pour différentes valeurs de n. Le tableau suivant donne les résultats pour les nombres 325, 435 et 561.

DÉTECTION DES DESCRIPTIONS POLYGONALES $k = \frac{2(m-n)}{n(n-1)}$			
n	$m = 325$ k	$m = 435$ k	$m = 561$ k
3	107,333	144	186
4	53,5	71,833	92,833
5	32	43	55,60
6	21,267	28,6	37
7	15,143	20,381	26,381
8	11,321	15,250	19,750
9	8,778	11,833	15,333
10	7	9,444	12,244
11	5,709	7,709	10
12	4,742	6,409	8,318
13	4	5,410	7,026
14	3,418	4,626	6,011
15	2,952	4	5,200
16	2,575	3,492	4,542
17	2,265	3,074	4
18	2,007	2,725	3,549
19	1,789	2,433	3,170
20	1,605	2,184	2,847
21	1,448	1,971	2,571
22	1,312	1,788	2,333
23	1,194	1,628	2,126
24	1,091	1,489	1,946
25	1	1,367	1,787
26	0,920	1,258	1,646
27	0,849	1,162	1,521
28	0,786	1,077	1,410
29	0,729	1	1,310
30	0,678	0,931	1,221
31	0,632	0,869	1,140
32	0,591	0,813	1,067
33	0,553	0,761	1
34	0,519	0,715	0,939
35	0,487	0,672	0,884

Dans le tableau, on peut voir, par exemple, qu'en assignant la valeur 325 à m, on obtient un résultat entier pour les valeurs de n suivantes : 5, 10, 13 et 25. Cela signifie que 325 s'exprime sous forme polygonale d'au moins quatre façons. La valeur entière apparaissant sur chacune de ces lignes est la valeur de k correspondante. On a donc :

$$325 = 5 + 32 \times \left(\frac{5 \times 4}{2}\right), 325 = 10 + 7 \times \left(\frac{10 \times 9}{2}\right),$$

$$325 = 13 + 4 \times \left(\frac{13 \times 12}{2}\right) \text{ et } 325 = 25 + 1 \times \left(\frac{25 \times 24}{2}\right).$$

Le tableau suivant donne les nombres polygonaux plus petits que 2000 qui sont polygonaux de plus d'une façon.

NOMBRES POLYGONAUX DE PLUS D'UNE FAÇON (0 < *m* < 2000)

15	2	235	2	456	3	666	3	865	2	1044	2	1242	2	1450	2	1645	2	1825	2
21	2	238	2	460	2	672	2	868	2	1045	3	1245	2	1455	2	1651	2	1828	2
28	2	246	2	465	3	675	2	870	2	1053	2	1246	2	1456	3	1652	2	1830	2
36	3	255	2	469	2	676	2	873	2	1056	3	1251	2	1461	2	1653	3	1834	3
45	3	256	2	471	2	681	2	874	2	1065	3	1266	3	1464	3	1656	2	1836	2
51	2	261	3	474	2	685	2	876	3	1068	2	1269	2	1470	2	1660	2	1845	3
55	2	276	4	477	3	693	2	885	2	1071	3	1270	2	1476	2	1662	2	1851	2
64	2	285	2	484	3	696	2	891	3	1072	2	1275	4	1485	5	1665	3	1854	2
66	3	286	2	486	2	700	2	900	2	1078	2	1276	2	1491	3	1666	2	1855	3
70	2	288	2	490	2	703	2	903	2	1080	2	1281	3	1492	2	1671	2	1860	2
75	2	291	2	495	2	705	2	904	2	1086	2	1288	4	1495	3	1675	2	1866	2
78	2	297	2	496	3	708	2	906	2	1089	4	1296	4	1498	2	1686	2	1870	2
81	3	306	2	501	2	711	2	909	2	1090	2	1305	3	1506	2	1695	3	1875	2
91	2	315	2	505	2	715	3	910	3	1095	2	1311	2	1515	2	1696	2	1876	2
96	2	316	2	513	2	726	3	915	2	1096	2	1315	2	1520	2	1701	5	1881	4
100	2	321	2	516	2	729	3	921	2	1101	2	1324	2	1521	4	1708	2	1884	2
105	3	322	2	525	2	730	2	924	2	1105	3	1326	4	1525	2	1716	4	1885	2
111	2	324	2	528	2	735	2	925	2	1116	2	1330	2	1530	2	1720	2	1891	2
112	2	325	4	531	2	736	3	936	4	1120	2	1332	2	1536	2	1725	2	1896	2
117	2	330	2	532	3	738	2	945	3	1125	3	1335	3	1540	6	1728	2	1900	3
120	3	333	2	540	4	741	3	946	3	1128	3	1336	2	1545	2	1729	3	1905	3
126	2	336	2	546	2	742	3	951	2	1131	2	1341	3	1548	3	1731	2	1911	3
135	2	342	2	549	2	750	2	952	2	1134	2	1350	2	1551	3	1737	2	1912	2
136	2	345	2	550	2	756	2	955	2	1135	2	1356	2	1557	2	1743	2	1917	2
141	2	351	3	555	2	765	3	960	3	1146	2	1360	2	1558	2	1744	2	1918	3
144	2	364	2	561	5	771	2	966	2	1155	2	1365	2	1561	2	1746	2	1920	2
145	2	366	2	568	2	775	2	969	2	1156	3	1371	2	1566	2	1750	2	1925	2
148	2	369	2	574	2	780	3	970	2	1161	3	1372	2	1575	2	1755	2	1926	4
153	3	370	2	576	2	783	2	975	2	1162	3	1377	3	1576	3	1761	2	1935	2
154	2	372	2	585	3	784	3	976	2	1170	2	1378	2	1581	2	1764	2	1936	4
156	2	375	2	591	2	786	2	981	3	1176	3	1380	3	1582	2	1765	2	1941	2
165	2	376	2	595	4	792	2	988	2	1180	2	1386	3	1585	2	1770	3	1945	2
171	3	378	3	606	3	795	2	990	2	1183	2	1395	3	1590	2	1771	2	1953	3
175	2	381	2	615	2	801	3	994	2	1185	2	1398	2	1593	2	1773	2	1956	2
176	2	385	2	616	4	804	2	996	2	1191	2	1401	2	1596	3	1776	2	1960	2
186	2	396	3	621	3	805	2	1000	2	1197	3	1405	2	1600	2	1782	2	1965	2
189	2	400	3	624	2	816	2	1001	2	1200	2	1408	3	1605	2	1785	3	1968	2
190	3	405	3	625	2	820	4	1002	2	1204	2	1413	2	1606	2	1791	2	1971	2
195	2	406	3	630	3	825	2	1005	2	1206	2	1414	2	1611	2	1792	2	1986	2
196	3	408	2	636	2	826	2	1011	2	1212	2	1416	2	1617	2	1794	3	1989	2
201	2	411	2	637	2	831	2	1015	3	1215	2	1425	2	1624	2	1800	3	1990	2
204	2	415	2	640	2	833	2	1017	2	1216	3	1426	2	1626	2	1806	2	1992	2
210	3	425	2	645	3	837	2	1024	2	1221	3	1431	4	1629	2	1809	2	1995	2
216	2	426	2	651	4	846	2	1026	2	1225	6	1435	2	1630	2	1810	2	1996	2
225	4	435	4	652	2	855	3	1035	4	1233	2	1444	2	1632	2	1815	2		
231	4	441	4	657	2	856	2	1036	2	1236	2	1446	2	1635	2	1816	2		
232	2	448	2	658	2	861	4	1041	2	1240	2	1449	2	1641	2	1821	2		

Le tableau suivant donne les nombres polygonaux pour $n \leq 15$ et $k \leq 50$. Il est illusoire de chercher à détecter quelque chose à partir de ce tableau. En effet, le nombre 561 est polygonal de quatre façons avec les couples $(n; k)$ suivants : $(6; 37), (11; 10), (17; 4)$ et $(33; 1)$. Or, un seul de ces couples apparaît dans le tableau suivant. Il faudrait ajouter beaucoup de colonnes.

NOMBRES POLYGONAUX

k \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120
2	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
3	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210	247	287	330
4	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276	325	378	435
5	18	34	55	81	112	148	189	235	286	342	403	469	540
6	21	40	65	96	133	176	225	280	341	408	481	560	645
7	24	46	75	111	154	204	261	325	396	474	559	651	750
8	27	52	85	126	175	232	297	370	451	540	637	742	855
9	30	58	95	141	196	260	333	415	506	606	715	833	960
10	33	64	105	156	217	288	369	460	561	672	793	924	1065
11	36	70	115	171	238	316	405	505	616	738	871	1015	1170
12	39	76	125	186	259	344	441	550	671	804	949	1106	1275
13	42	82	135	201	280	372	477	595	726	870	1027	1197	1380
14	45	88	145	216	301	400	513	640	781	936	1105	1288	1485
15	48	94	155	231	322	428	549	685	836	1002	1183	1379	1590
16	51	100	165	246	343	456	585	730	891	1068	1261	1470	1695
17	54	106	175	261	364	484	621	775	946	1134	1339	1561	1800
18	57	112	185	276	385	512	657	820	1001	1200	1417	1652	1905
19	60	118	195	291	406	540	693	865	1056	1266	1495	1743	2010
20	63	124	205	306	427	568	729	910	1111	1332	1573	1834	2115
21	66	130	215	321	448	596	765	955	1166	1398	1651	1925	2220
22	69	136	225	336	469	624	801	1000	1221	1464	1729	2016	2325
23	72	142	235	351	490	652	837	1045	1276	1530	1807	2107	2430
24	75	148	245	366	511	680	873	1090	1331	1596	1885	2198	2535
25	78	154	255	381	532	708	909	1135	1386	1662	1963	2289	2640
26	81	160	265	396	553	736	945	1180	1441	1728	2041	2380	2745
27	84	166	275	411	574	764	981	1225	1496	1794	2119	2471	2850
28	87	172	285	426	595	792	1017	1270	1551	1860	2197	2562	2955
29	90	178	295	441	616	820	1053	1315	1606	1926	2275	2653	3060
30	93	184	305	456	637	848	1089	1360	1661	1992	2353	2744	3165
31	96	190	315	471	658	876	1125	1405	1716	2058	2431	2835	3270
32	99	196	325	486	679	904	1161	1450	1771	2124	2509	2926	3375
33	102	202	335	501	700	932	1197	1495	1826	2190	2587	3017	3480
34	105	208	345	516	721	960	1233	1540	1881	2256	2665	3108	3585
35	108	214	355	531	742	988	1269	1585	1936	2322	2743	3199	3690
36	111	220	365	546	763	1016	1305	1630	1991	2388	2821	3290	3795
37	114	226	375	561	784	1044	1341	1675	2046	2454	2899	3381	3900
38	117	232	385	576	805	1072	1377	1720	2101	2520	2977	3472	4005
39	120	238	395	591	826	1100	1413	1765	2156	2586	3055	3563	4110
40	123	244	405	606	847	1128	1449	1810	2211	2652	3133	3654	4215
41	126	250	415	621	868	1156	1485	1855	2266	2718	3211	3745	4320
42	129	256	425	636	889	1184	1521	1900	2321	2784	3289	3836	4425
43	132	262	435	651	910	1212	1557	1945	2376	2850	3367	3927	4530
44	135	268	445	666	931	1240	1593	1990	2431	2916	3445	4018	4635
45	138	274	455	681	952	1268	1629	2035	2486	2982	3523	4109	4740
46	141	280	465	696	973	1296	1665	2080	2541	3048	3601	4200	4845
47	144	286	475	711	994	1324	1701	2125	2596	3114	3679	4291	4950
48	147	292	485	726	1015	1352	1737	2170	2651	3180	3757	4382	5055
49	150	298	495	741	1036	1380	1773	2215	2706	3246	3835	4473	5160
50	153	304	505	756	1057	1408	1809	2260	2761	3312	3913	4564	5265
	$3+3k$	$4+6k$	$5+10k$	$6+15k$	$7+21k$	$8+28k$	$9+36k$	$10+45k$	$11+55k$	$12+66k$	$13+78k$	$14+91k$	$15+105k$

Comme sujet de réflexion, Jacques Sormany pose la question :

> Soit m un entier pris au hasard. De combien de façons peut-on l'exprimer comme nombre polygonal ?

On peut facilement déterminer que dans l'intervalle $[1; 2000]$, on trouve 788 nombres qui sont polygonaux d'une seule façon, 340 qui le sont de deux façons, 98 de trois façons, 25 de quatre façons, 3 de cinq façons et deux de six façons.

Les nombres qui s'expriment de cinq façons sont 561, 1485 et 1701. Ceux qui s'expriment de six façons sont 1225 et 1540.

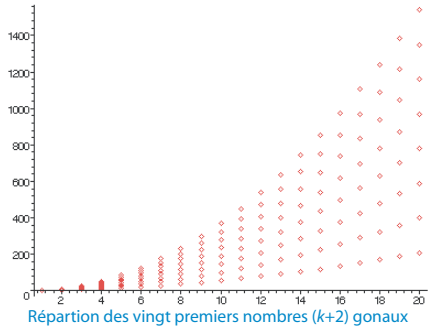
Suites polygonales

Les nombres polygonaux sont des suites dont les termes satisfont à une condition de la forme :

$$f(n) = P_{k+2,n} = n + k\frac{n(n-1)}{2}.$$

En utilisant Maple pour représenter graphiquement les 20 premiers termes de ces suites pour $3 \leq k + 2 \leq 10$, on obtient :

```
with(plots) ;
> P3 :=seq([n,n+(n*(n-1)/2)],n=1..20) ;
  P4 :=seq([n,n+2*(n*(n-1)/2)],n=1..20) ;
  P5 :=seq([n,n+3*(n*(n-1)/2)],n=1..20) ;
  P6 :=seq([n,n+4*(n*(n-1)/2)],n=1..20) ;
  P7 :=seq([n,n+5*(n*(n-1)/2)],n=1..20) ;
  P8 :=seq([n,n+6*(n*(n-1)/2)],n=1..20) ;
  P9 :=seq([n,n+7*(n*(n-1)/2)],n=1..20) ;
  P10 :=seq([n,n+8*(n*(n-1)/2)],n=1..20) ;
  pointplot(P3,P4,P5,P6,P7,P8,P9,P10,color=red) ;
```



Répartion des vingt premiers nombres (k+2) gonaux pour $1 \leq k \leq 8$

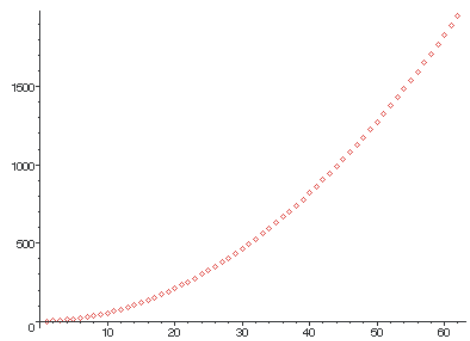
La représentation graphique d'une suite polygonale est un ensemble de points dont l'abscisse et l'ordonnée sont des valeurs entières. Ces points sont des valeurs discrètes sur une parabole.

Densité de la répartition

Considérons la question suivante :

> Soit m un nombre entier tel que $m \leq 2000$. Quelle est la probabilité que ce nombre soit triangulaire ?

En représentant graphiquement les nombres triangulaires inférieurs à 2000, on obtient la figure suivante.



Répartion des soixante premiers nombres triangulaires

La probabilité qu'un nombre $m \leq 2000$ choisi au hasard soit un nombre triangulaire est assez petite puisqu'il y a seulement soixante nombres triangulaires plus petits ou égaux à 2000. En effet :

$$P_{3,62} = 1953 \text{ et } P_{3,63} = 2016.$$

La probabilité qu'un nombre inférieur à 2000 soit triangulaire est donc :

$$\frac{60}{2000} = 0,03.$$

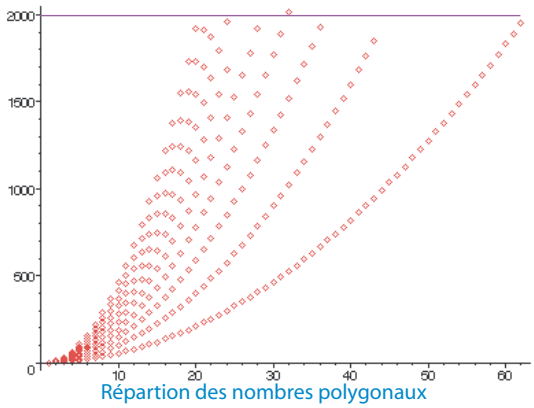
C'est également la probabilité qu'une droite tracée perpendiculairement à l'axe des y en une ordonnée choisie au hasard rencontre un des points de la suite des nombres triangulaires (la grosseur des points peut nous induire en erreur si on tente une estimation visuelle).

Que devient cette probabilité si on considère les suites de nombres polygonaux pour $3 \leq k+2 \leq 12$? Considérons maintenant les suites de nombres polygonaux plus petits ou égaux à 2000 pour $k = 1, 2, \ldots, 10$. On peut les représenter graphiquement en donnant à Maple les instructions suivantes :

```
> with(plots) :
P3 :=seq([n,n+(n*(n-1)/2)],n=3..62) ;
P4 :=seq([n,n+2*(n*(n-1)/2)],n=3..43) ;
P5 :=seq([n,n+3*(n*(n-1)/2)],n=3..36) ;
P6 :=seq([n,n+4*(n*(n-1)/2)],n=3..32) ;
P7 :=seq([n,n+5*(n*(n-1)/2)],n=3..28) ;
P8 :=seq([n,n+6*(n*(n-1)/2)],n=3..24) ;
```

```
P9 :=seq([n,n+7*(n*(n-1)/2)],n=1..24) ;
P10 :=seq([n,n+8*(n*(n-1)/2)],n=1..22) ;
P11 :=seq([n,n+9*(n*(n-1)/2)],n=1..21) ;
P12 :=seq([n,n+10*(n*(n-1)/2)],n=1..20) ;
```

La représentation graphique de ces suites donne la figure suivante :



Répartion des nombres polygonaux inférieurs à 2000 pour $3 \leq k+2 \leq 12$

On trouve 290 nombres $(k+2)$gonaux pour $3 \leq k+2 \leq 12$. La probabilité qu'un nombre inférieur à 2000 choisi au hasard soit $(k+2)$gonal pour $3 \leq k+2 \leq 12$ est donc :

$$\frac{290}{2000} = 0,145.$$

On trouve 431 nombres $(k+2)$gonaux pour $3 \leq k+2 \leq 22$. La probabilité qu'un nombre inférieur à 2000 choisi au hasard soit $(k+2)$gonal pour $3 \leq k+2 \leq 22$ est donc :

$$\frac{431}{2000} = 0,2155.$$

On trouve 543 nombres $(k+2)$gonaux pour $3 \leq k+2 \leq 32$. La probabilité qu'un nombre inférieur à 2000 choisi au hasard soit $(k+2)$gonal pour $3 \leq k+2 \leq 32$ est donc :

$$\frac{543}{2000} = 0,2715.$$

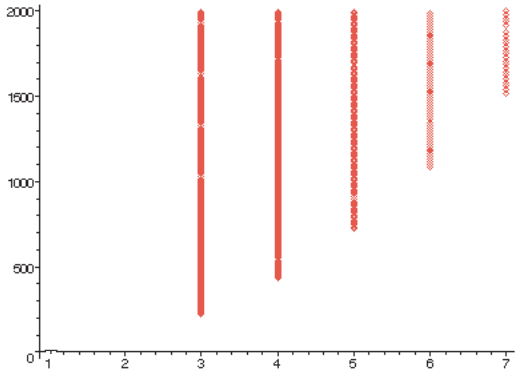
On trouve 649 nombres $(k+2)$gonaux pour $3 \leq k+2 \leq 42$. La probabilité qu'un nombre inférieur à 2000 choisi au hasard soit $(k+2)$gonal pour $3 \leq k+2 \leq 42$ est donc :

$$\frac{649}{2000} = 0,3245.$$

On peut poser la question :

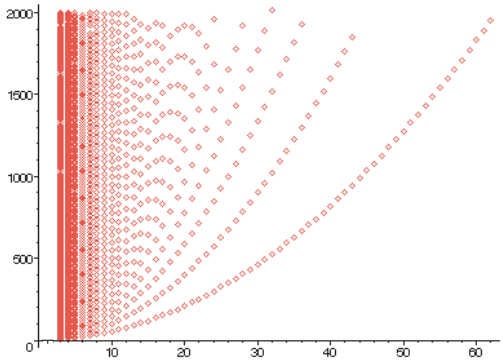
> Si on trace une perpendiculaire à l'axe verticale en un point d'ordonnée entière m, quelle est la probabilité que cette droite passe par au moins un point d'une suite polygonale ?

Dans la représentation graphique précédente, nous avons considéré les nombres polygonaux pour $3 \leq k+2 \leq 12$. Considérons maintenant les plus grandes valeurs. Dans les suites de nombres polygonaux $332 < k < 667$, il n'y a qu'un seul nombre inférieur à 2000, celui obtenu en posant $n = 3$. Pour $200 < k < 332$, il y a deux nombres polygonaux inférieurs à 2000. Pour $133 < k < 200$, il y en a trois, pour $96 < k < 133$ et pour $72 < k < 96$. La représentation graphique de ces nombres donne :



Répartion des nombres polygonaux
plus petits ou égaux à 2000 pour $k > 72$

En représentant tous les nombres polygonaux plus petits ou égaux à 2000, on obtient la représentation suivante.



Répartion des nombres polygonaux
plus petits ou égaux à 2000 pour $k > 2$

On trouve 1256 nombres $(k+2)$gonaux pour $k+2 \geq 3$ plus petits ou égaux à 2000. La probabilité est donc :

$$\frac{1256}{2000} = 0,628.$$

Conclusion

Il y a diverses approches permettant d'obtenir une généralisation de l'expression algébrique des nombres polygonaux. Chacune de celles-ci fait voir ces nombres sous un éclairage différent et suggère de nouvelles pistes de réflexion.

Bibliographie

Fletcher, T.J., *L'algèbre linéaire par ses applications*, adapté de l'anglais par M et V. Glaymann, Montréal, Éditions Hurtubise, Lyon, CEDC, 1972, 320 p.

Édition anglaise de *Linear Algebra Through Its Applications*, London, Van Nostrand Company, 1972.

Sormany, Jacques (décembre 2004), Les nombres polygonaux, *Bulletin de l'AMQ* 44,(4), p. 14-17.