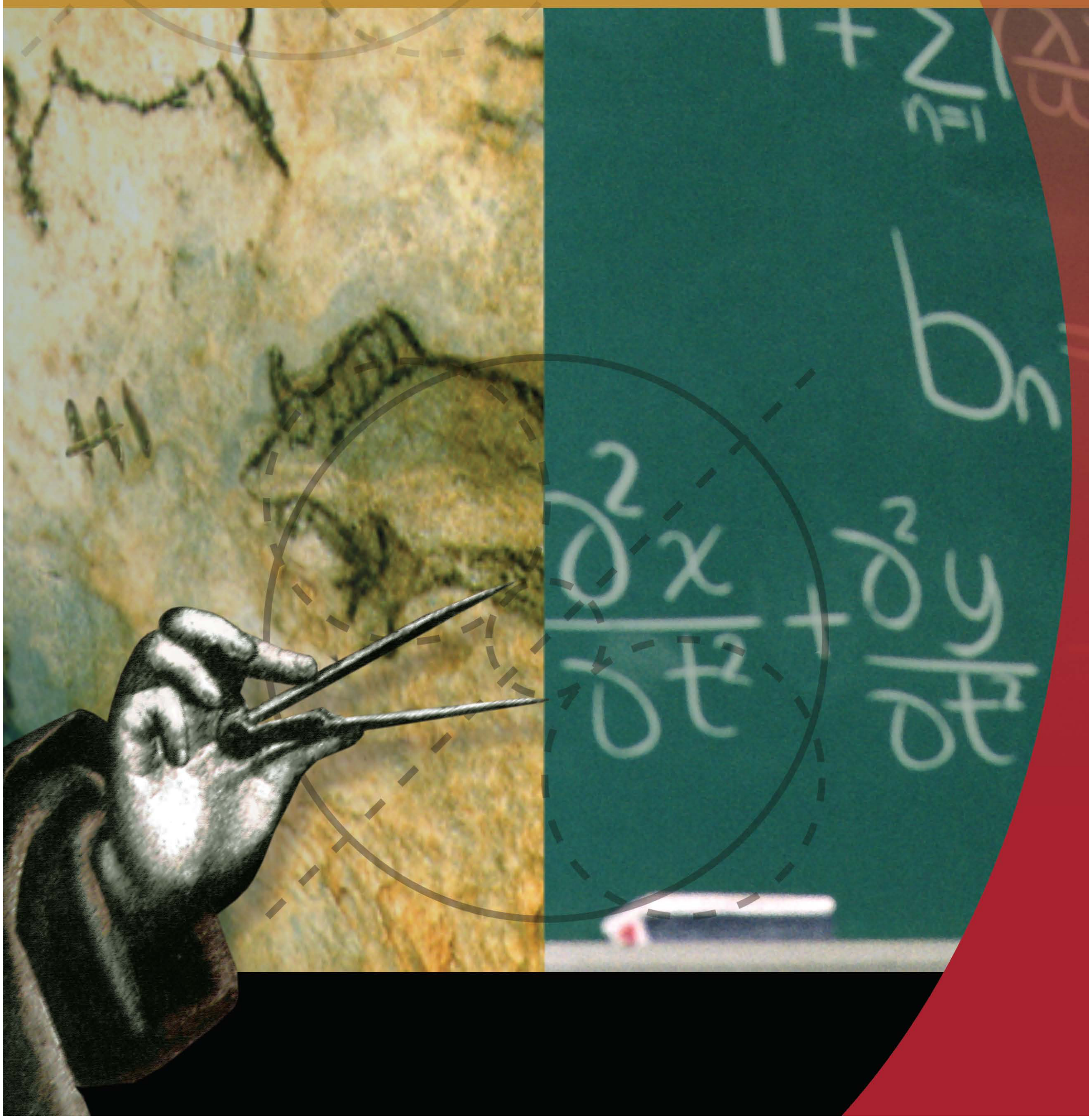
Bulletin AMQ

Association mathématique du Québec

Octobre 2006



Membres du comité de rédaction

Politique de rédaction

Dans chaque numéro du *Bulletin AMQ* on retrouve un éditorial circonstancié, des chroniques de nature mathématique, des textes d'information et des articles de fond.
Les articles de fond doivent normalement se situer à l'intérieur de l'un des trois thèmes du *Bulletin AMQ* : mathématiques, didactique des mathématiques, informatique appliquée à l'enseignement ou à l'apprentissage des mathématiques. En général, ils ne doivent pas avoir été publiés dans une revue. Toutefois, il pourrait y avoir des exceptions qui seront étudiées par le Comité de rédaction.
Les articles parus dans le *Bulletin AMQ* peuvent être reproduits avec la mention de la source. Les auteurs cèdent à l'AMQ toute redevance qui, leur étant due en vertu des lois touchant aux droits d'auteur, provient de toute utilisation pouvant être faite de leurs textes publiés dans le *Bulletin AMQ*.

ISSN 0316-8832
Dépôt légal - Bibliothèque et Archives nationales du Québec, 2006

Montage de la couverture effectué à partir d'une affiche de Marie-Claude Asselin. `www.conceptionmc.com`.

Mise en page par Marie-Claude Côté.

Table des matières

Bulletin AMQ Vol. XLVI, n^{o} 3, octobre 2006

AMQ en action

Article

Chronique

AMQ en action

Préparation du congrès de Shawinigan

L'équipe du Département de mathématiques du Collège Shawinigan qui se charge d'organiser le congrès de l'AMQ a convoqué des journalistes et tenu une conférence de presse le 11 octobre 2006. Sous le titre *Mathématiques et énergie feront la paire* et le sous-titre *Le Collège Shawinigan accueillera les mathématiciens du Québec les 20, 21 et 22 octobre*, le quotidien *Le Nouvelliste* de Trois-Rivières l'a rapportée comme suit dans son édition week-end des 14 et 15 octobre.

« Shawinigan - Le Collège Shawinigan sera l'hôte, les 20, 21 et 22 octobre prochain, de la 50^{e} édition du Congrès de l'Association mathématique du Québec. Depuis plusieurs mois, le comité organisateur de cette activité, composé des enseignants du Département de mathématiques du Collège Shawinigan, met tout en oeuvre afin d'élaborer différentes activités soulignant de façon particulière cette 50^{e} édition.

Afin de donner le ton à cette 50^{e} édition, le thème *Mathématiques et énergie* a été choisi dès le début des rencontres préparatoires. Ce thème a été choisi puisque le Collège est situé en plein coeur de la région de l'Énergie. De plus, le lien entre les mathématiques et l'énergie prend tout son sens, aux dires de Luc Vandal, responsable de l'activité, enseignant et coordonnateur au Département de mathématiques du Collège.

Selon lui, quand l'on parle d'énergie hydroélectrique, nucléaire, éolienne ou de toute autre forme d'énergie, les mathématiques sont omniprésentes lorsqu'il s'agit de canaliser l'énergie afin de la rendre utilisable.

Pour donner le coup d'envoi à l'événement, une conférence de Gilles Brassard, chercheur de renommée internationale à l'Université de Montréal en cryptographie quantique, sera présentée dès 20 h à la salle Gilles-Grondin du Collège.

En plus de plusieurs ateliers et conférences abordant différents thèmes liés aux mathématiques, les gens auront la chance d'assister, le samedi 21 octobre, au spectacle d'un grand ambassadeur de la Mauricie, le coloré Fred Pellerin. Les participants pourront finalement visiter la Cité de l'Énergie le lendemain en matinée. »

Sur la photo, nous retrouvons (à l'avant) : Monsieur Claude Villemure, président de la Fondation du Collège Shawinigan, Monsieur Gilles Lafrenière du CLD Shawinigan et Monsieur Luc Vandal, responsable de l'activité et enseignant et coordonnateur au département de Mathématiques du Collège Shawinigan. À l'arrière : Madame Louise Trudel, directrice générale du Collège Shawinigan, Monsieur Jean Turgeon, représentant de l'AMQ, Madame Amina Chaffai, représentante de Madame Julie Boulet, Députée de Laviolette et ministre déléguée au Transport.

Hommage à Maurice L'Abbé, fondateur de l'AMQ

Maurice L'Abbé est mort le 21 juillet 2006 à 86 ans, entouré de son épouse France Mignault et de ses enfants Guillaume, Dominique, Bertrand et Geneviève.

Dans le très bel hommage que l'Université de Montréal lui rendait le 10 septembre dernier, Jacques St-Pierre, Aubert Daigneault, Camille Limoges, Harold Kuhn, Jim Lambek et le recteur Luc Vinet ont évoqué les grands moments de sa carrière professionnelle exceptionnelle. Premier québécois à obtenir un Ph.D. en mathématiques – à l'Université de Princeton en 1951 – Maurice L'Abbé était de la race des bâtisseurs.

Il fonde en 1962 le Séminaire de mathématiques supérieures, et crée en 1968 le Centre de recherches mathématiques, des institutions qui ont été très importantes pour le développement de la recherche en mathématiques au Québec.

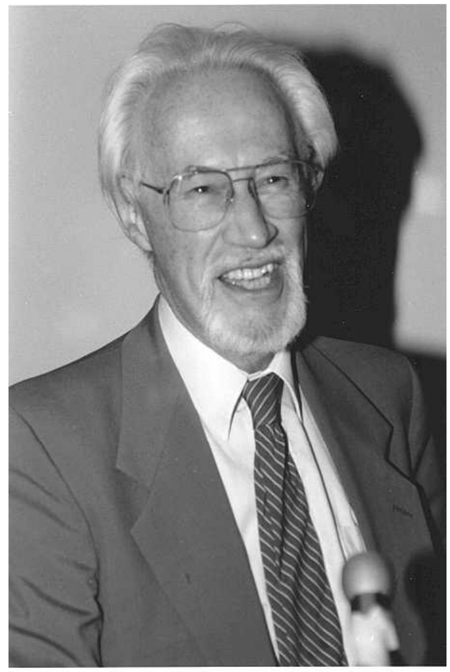


Photo prise par Denys Bélanger lors du congrès de l'AMQ en octobre 94 au Cégep de Saint-Hyacinthe.

Comme premier vice-recteur à la recherche dans une université québécoise, il s'emploie de 1968 à 1978 à la création et au développement d'une dizaine de centres de recherche et permet à l'Université de Montréal de se définir véritablement comme une université de recherche.

En 1980, il devient directeur général du Conseil des sciences du Canada, et en 1983, il est appelé à devenir le premier président du Conseil de la science et de la technologie que le Gouvernement du Québec vient de créer.

De nombreux prix et distinctions ont reconnu l'influence que Maurice L'Abbé a eue sur le développement de la recherche au Québec. Il a, entre autres, mérité le Prix Armand-Frappier du Gouvernement du Québec en 1994. On trouvera un résumé de sa carrière sur le site www.prixduquebec.gouv.qc.ca.

La cérémonie de l'Université de Montréal s'est terminée par un hommage de Dominique L'Abbé à son père. Elle nous a raconté que les dernières années avaient été une occasion de rapprochement et d'échange avec ce père « ouvert et modeste » qui savait écouter. Il lui a dit un jour : « Je crois avoir été au bout de ce que j'avais à faire ».

Avec toutes les transpositions et nuances qui s'imposent, je crois que la situation de l'AMQ vis-à-vis Maurice L'Abbé est un peu analogue à celle de sa fille Dominique. L'AMQ doit son existence même à Maurice L'Abbé. Comme il le disait dans la dernière entrevue accordée en 2002 avant sa maladie, dès 1952, avant son stage post-doctoral à Paris, il avait réuni chez lui des professeurs de niveau secondaire et collégial pour fonder une association. Cela n'avait pas marché à ce moment-là, mais l'idée a fait son chemin et finalement la réunion de fondation de l'AMQ a eu lieu au bureau de Maurice L'Abbé le 5 juin 1958. Dès les débuts de l'AMQ, il a encouragé la création de concours et de camps mathématiques pour les jeunes. Par la suite, malgré ses lourdes responsabilités, il a toujours gardé un attachement spécial à son association. C'est ainsi que, pour ne parler que de la période récente, il a accepté au congrès de Saint-Hyacinthe, en 1994, de donner son nom au Fonds de l'AMQ pour le financement des camps mathématiques et de présider le Comité de financement de ces camps de 1994 à 2000. L'AMQ l'a nommé membre émérite au congrès de Lévis-Lauzon en 1995 en présence du Ministre de l'éducation. En 1998, il est venu au congrès du 40^{e} anniversaire de l'AMQ entouré des présidentes et présidents passés réunis pour la circonstance. C'est sous son impulsion que l'AMQ a lancé en 2000 au Collège Brébeuf les camps mathématiques de niveau secondaire qui se sont ajoutés aux camps collégiaux qui existaient déjà depuis le milieu des années 1960. Nous avons eu le privilège de le côtoyer à de nombreuses reprises au cours des années 1990. Il manifestait toujours une attitude optimiste et encourageante qui était très stimulante pour nous.

Les institutions que Maurice L'Abbé a créées, et l'AMQ en fait partie intégrante, constituent un héritage immense que nous devons continuer à faire fructifier. Ces institutions garderont vivante la grande influence qu'il a eue sur le développement extraordinaire des sciences en général et des mathématiques en particulier dans la société québécoise.

Nous devons toute notre reconnaissance à notre fondateur Maurice L'Abbé et il est bien naturel que le 50^{e} congrès de l'AMQ lui soit dédié.

Bernard Courteau
19^{e} président.

Les nombres polygonaux et la généralisation

André Ross
Cégep de Lévis-Lauzon

Dans son article du Bulletin de décembre 2004, Jacques Sormany, en procédant par inférence, obtient une généralisation de la formule des nombres polygonaux. En comparant les formes générales des nombres triangulaires, carrés, pentagonaux, hexagonaux et des heptagonaux, il obtient une formulation décrivant les nombres $(k+2)$gonaux.

Nombres triangulaires : $P_{3,n} = \dfrac{n^2+n}{2}$.

Nombres carrés : $P_{4,n} = \dfrac{2n^2}{2} = n^2$.

Nombres pentagonaux : $P_{5,n} = \dfrac{3n^2-n}{2}$.

Nombres hexagonaux : $P_{6,n} = \dfrac{4n^2-2n}{2} = 2n^2-n$.

Nombres heptagonaux : $P_{7,n} = \dfrac{5n^2-3n}{2}$.

Nombres $(k+2)$gonaux : $P_{k+2,n} = \dfrac{kn^2-(k-2)n}{2}$.

Par la suite, il pose quelques problèmes :

Soit m un entier pris au hasard. De combien de façons peut-on l'exprimer comme nombre polygonal ?

Soit x un entier quelconque. Combien de nombres sont polygonaux exactement de x façons et comment peut-on les trouver ?

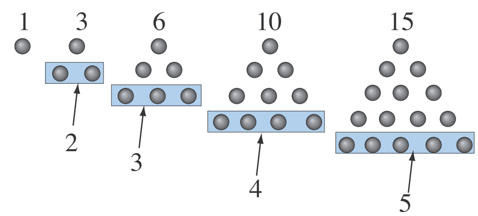
Peut-on trouver une formule générale donnant les entiers dont la forme polygonale non triviale est unique ?

L'inférence n'est pas la seule procédure permettant d'obtenir la forme générale des nombres $(k+2)$gonaux. Nous en présenterons quelques-unes dans cet article.

À la manière de Pythagore

Nombres triangulaires

Les nombre triangulaires sont ceux que l'on peut disposer de façon à former un triangle comme dans l'illustration suivante.



On obtient la suite des nombres triangulaires en ajoutant successivement une ligne au bas du triangle. Cela signifie l'ajout d'un nombre entier de points. Le nombre de points sur la ligne extérieure est appelé le *gnomon* du nombre. Ainsi, en ajoutant une ligne extérieure de 6 points au nombre 15, on obtient le nombre triangulaire suivant, soit 21. En ajoutant une ligne de 7 points, on obtient 28, ainsi de suite. Pour passer du nombre de rang n–1 au nombre de rang n, on doit ajouter une ligne de n points.

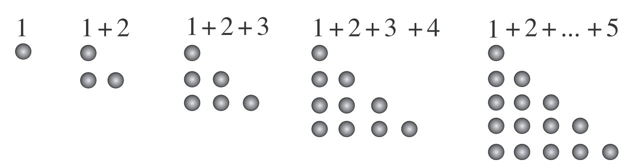
La suite des gnomons des nombres triangulaires est alors :

$$\{2; 3; 4; 5; 6; 7; \ldots; n; \ldots\}.$$

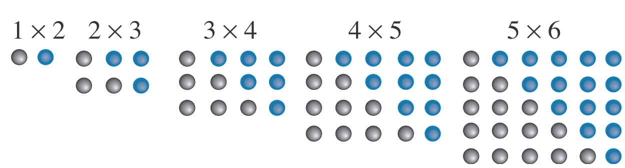
On constate que les nombres triangulaires sont les sommes partielles de la progression arithmétique de raison 1 et dont le premier terme est 1. Ainsi, le nombre triangulaire de rang n, que nous noterons $P_{3,n}$, est la somme :

$$P_{3,n} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

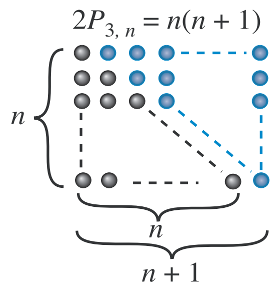
En disposant les nombres pour former des triangles rectangles plutôt que des triangles équilatéraux, on obtient les configurations suivantes pour les premières sommes partielles :



On peut alors reproduire chacun des triangles avec une rotation de 180°, cela donne :



On obtient chaque fois un rectangle dont on peut facilement déterminer le nombre de points. En effet, le nombre de lignes est le rang n du nombre triangulaire et le nombre de colonnes est le gnomon additionné de l'unité. Dans le cas général, le gnomon est n et le nombre de colonnes est $n+1$.



En écriture moderne, obtient donc que :

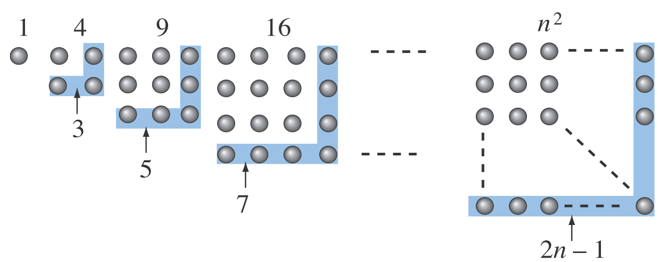
$$2P_{3,n} = n(n+1).$$

D'où l'on tire :

$$P_{3,n} = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nombres carrés

On peut procéder de la même façon avec les nombres carrés. Comme l'illustre la figure suivante, le gnomon qui permet de passer du nombre carré de rang n–1 au terme de rang n est $2n$–1.



La suite des gnomons est alors la suite des nombres impairs

$$\{3; 5; 7; 9; \ldots; (2n–1); \ldots\}.$$

On obtient donc les nombres carrés en effectuant les sommes partielles de la progression arithmétique de raison 2 et dont le premier terme est 1, soit :

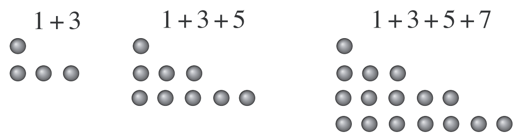
$C_1 = 1 = 1^2$

$C_2 = 1+3 = 4 = 2^2$

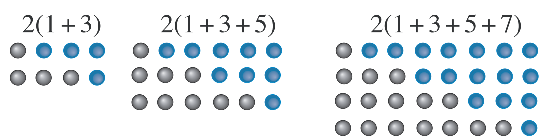
$C_3 = 1+3+5 = 9 = 3^2$

$C_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

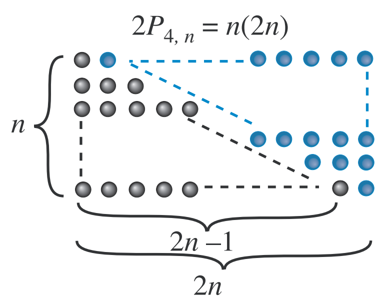
En représentant ces sommes partielles par des points en utilisant une ligne par terme, on peut alors disposer les lignes de façon à former des triangles rectangles. Cela donne :



En reproduisant chacun des triangles avec une rotation de 180°, on obtient :



On a chaque fois un rectangle dont on peut facilement déterminer le nombre de points. Le nombre de lignes est le rang n du nombre et le nombre de colonnes est le gnomon additionné de l'unité.

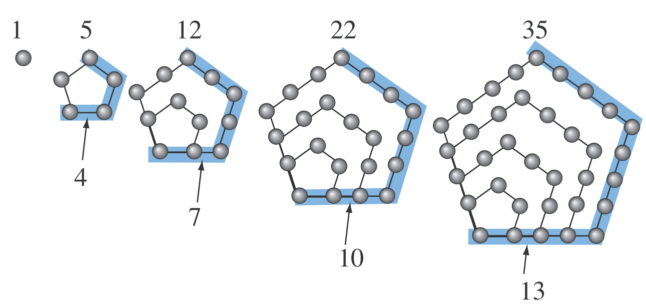


Ainsi, le nombre carré de rang n est donné par :

$$2P_{4,n} = n(2n) \text{ et } P_{4,n} = n^2.$$

Nombres pentagonaux

Les premiers nombres pentagonaux sont :

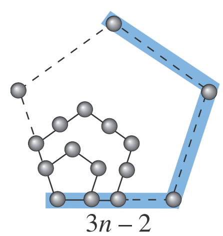


Chaque nombre pentagonal peut être considéré comme une somme partielle des termes de la progression arithmétique de raison 3 et dont le premier terme est 1, soit :

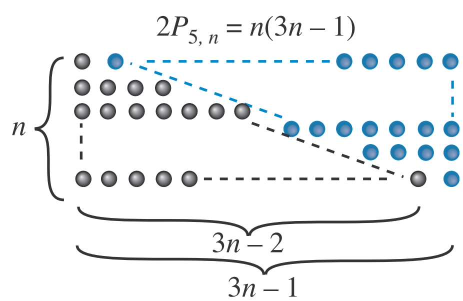
$$\{1; 4; 7; 10; 13; \ldots\}.$$

La figure suivante montre que le gnomon est constitué de trois côtés de n points et ces côtés se recoupent en deux sommets. La forme générale du gnomon est donc $3n$–2 et le nombre pentagonal de rang n est la somme partielle :

$$P_{5,n} = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + (3n - 2).$$



Si on représente chaque terme de cette somme partielle par des points en utilisant une ligne par terme, on a :

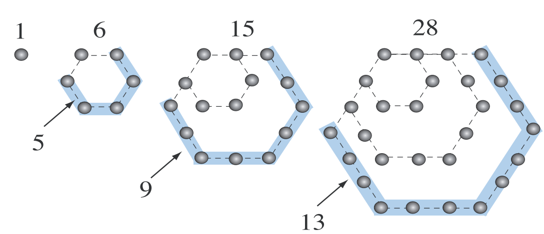


D'où l'on tire :

$$2P_{5,n} = n(3n - 1) \text{ et } P_{5,n} = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Nombres hexagonaux

Les premiers nombres hexagonaux sont :

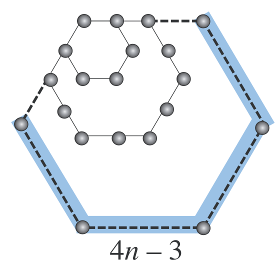


Les nombres hexagonaux sont donc obtenus en effectuant les sommes partielles de la progression arithmétique dont le premier terme est 1 et dont la raison est 4, soit :

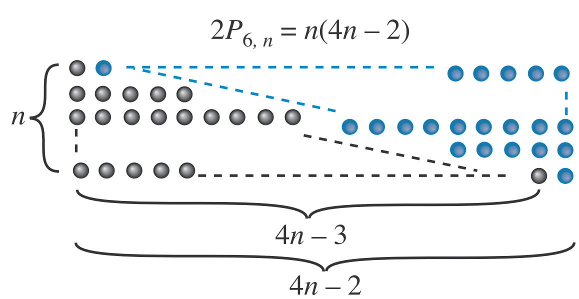
$$\{1; 5; 9; \underline{13}; 17; \ldots\}.$$

La figure suivante montre que le gnomon est constitué de quatre côtés de n points. Puisque ces côtés se recoupent en trois sommets, la forme générale du gnomon est $4n$–3. Le nombre hexagonal de rang n est la somme partielle :

$$P_{6,n} = 1 + 5 + 9 + \underline{13} + 17 + \ldots + (4n–3).$$



Connaissant la forme générale du gnomon, on peut trouver celle des nombres hexagonaux. En représentant chaque terme de cette somme partielle par des points et en utilisant une ligne par terme, on a :



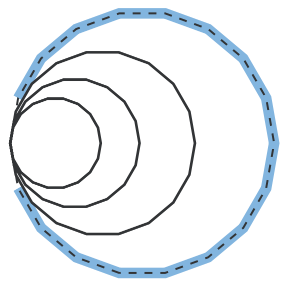
On obtient donc :

$$2P_{6,n} = n(4n–2) \text{ d'où : } P_{6,n} = n(2n–1).$$

Nombres polygonaux à $k + 2$ côtés

De façon générale, les gnomons des nombres polygonaux à $k + 2$ côtés forment une progression arithmétique de raison k. Les nombres polygonaux à $k + 2$ côtés sont alors les sommes partielles de la progression arithmétique de raison k et dont le premier terme est 1. On peut donc, en procédant comme précédemment, déterminer la forme générale d'un nombre polygonal à k côtés de rang n.

Chaque nombre $(k + 2)$gonal peut s'exprimer comme somme partielle des termes de la progression arithmétique de raison k et dont le premier terme est 1.

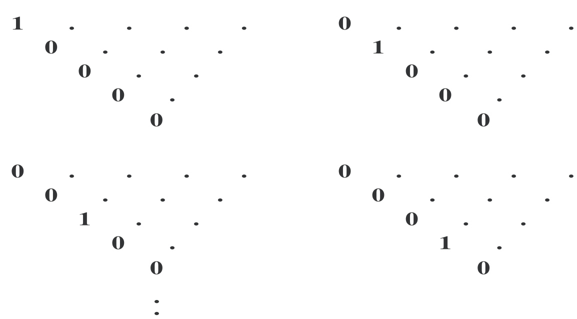


$kn - (k - 1)$

Dans ce cas, le gnomon est constitué de k côtés de n points. Puisque ces côtés se recoupent en k–1 sommets, la forme générale du gnomon est kn–(k–1). Le nombre ($k+2$)gonal de rang n est la somme partielle :

$$P_{k+2,n} = 1 + (k+1) + (2k+1) + ... + [kn–(k–1)]$$

d'où : $P_{k+2,n} = \dfrac{n(kn-k+2)}{2}$.



En procédant à la manière de Pythagore, on obtient le même résultat que celui auquel Jacques Sormany était parvenu par inférence.

Progressions arithmétiques

En reconnaissant qu'un nombre ($k+2$)gonal de rang n est la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique, on peut généraliser en utilisant la formule donnant la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique. Cette somme est donnée par :

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d).$$

Dans le cas d'un nombre ($k+2$)gonal, le premier terme est $a = 1$ et la raison est $d = k$. En substituant, on obtient alors :

$$S_n = P_{k+2,n} = \frac{n(2 \times 1 + (n-1)k)}{2} = \frac{n(kn-k+2)}{2}.$$

On obtient à nouveau le même résultat, mais pas de nouvelle piste de réflexion.

Table de différences

On peut procéder à la généralisation en considérant que les gnomons d'un nombre polygonal constituent une ligne d'une table de différences associée à un polynôme. Procédons à l'aide d'un exemple pour bien saisir cette idée.

Considérons le polynôme :

$$f(x) = x^3 – 2x + 4.$$

En calculant l'image par f des valeurs entières $x = 0, 1, 2, 3 \ldots$, on obtient :

4 3 8 25 60 119 208 333 500 ...

En écrivant sous cette ligne d'images les différences entre deux nombres consécutifs, on obtient :

4 3 8 25 60 119 208 333 500 ...
–1 5 17 35 59 89 125 167 ...

En calculant les différences des différences et en continuant ainsi, on obtient :

4 3 8 25 60 119 208 333 500 ...
–1 5 17 35 59 89 125 167 ...
6 12 18 24 30 36 42 ...
6 6 6 6 6 6 ...
0 0 0 0 0 ...

C'est la *table des différences* associée au polynôme :

$$f(x) = x^3 – 2x + 4.$$

Considérons maintenant le polynôme :

$$g(x) = x^2 + 3x – 2.$$

En calculant les images des valeurs entières $x = 0, 1, 2, 3 \ldots$ et en construisant la table des différences, on obtient :

–2 2 8 16 26 38 52 68 86 ...
4 6 8 10 12 14 16 18 ...
2 2 2 2 2 2 2 ...
0 0 0 0 0 0 ...

On peut définir des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire de ces tables de différences. La somme de deux tables de différences est associée à la somme des polynômes. Ainsi, la table des différences du polynôme :

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x)+g(x) \\ &= (x^3-2x+4)+(x^2+3x-2) \\ &= x^3+x^2+x+2 \end{aligned}$$

est la somme des tables des polynômes $f(x)$ et $g(x)$, soit :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\mathbf{2} & & \mathbf{5} & & \mathbf{16} & & \mathbf{41} & & \mathbf{86} & & \mathbf{157} & & \mathbf{260} & & \mathbf{401} & & \mathbf{586} & & \ldots \\
& \mathbf{3} & & \mathbf{11} & & \mathbf{25} & & \mathbf{45} & & \mathbf{71} & & \mathbf{103} & & \mathbf{141} & & \mathbf{185} & & \ldots & \\
& & \mathbf{8} & & \mathbf{14} & & \mathbf{20} & & \mathbf{26} & & \mathbf{32} & & \mathbf{38} & & \mathbf{44} & & \ldots & & \\
& & & \mathbf{6} & & \mathbf{6} & & \mathbf{6} & & \mathbf{6} & & \mathbf{6} & & \mathbf{6} & & \ldots & & & \\
& & & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \ldots & & & &
\end{array}$$

De plus, la table du produit d'un polynôme f par un scalaire a est le produit de la table des différences de f par le scalaire a.

En fait, puisque l'ensemble des polynômes munie de l'addition et de la multiplication par un scalaire forme un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, il en est de même pour l'ensemble des tables de différences. On pourrait le montrer en définissant un isomorphisme ou en montrant que chacune des propriétés des opérations d'un espace vectoriel est satisfaite. On peut également montrer que : pour un polynôme de degré n, les valeurs de la ligne n sont constantes et celles de la ligne $n+1$ sont toutes nulles.

On peut déterminer une base de cet espace vectoriel en constatant qu'on peut facilement construire une table de différences par additions successives en ne connaissant que le bord de gauche de la table. En effet, chaque table contient des triplets x, y et z disposés en triangles de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} x & & y \\ & z & \end{array} \qquad \textbf{où } z = y - x$$

On a donc $y = x + z$.

En connaissant le bord gauche d'une table de différences, on peut la construire par additions successives. Les tables de différences dont les bords gauches sont les suivants constituent une base de cet espace vectoriel :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{1} & & . & & . & & . & & . \\
& \mathbf{0} & & . & & . & & . & \\
& & \mathbf{0} & & . & & . & & \\
& & & \mathbf{0} & & . & & & \\
& & & & \mathbf{0} & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & & . & & . & & . & & . \\
& \mathbf{1} & & . & & . & & . & \\
& & \mathbf{0} & & . & & . & & \\
& & & \mathbf{0} & & . & & & \\
& & & & \mathbf{0} & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & & . & & . & & . & & . \\
& \mathbf{0} & & . & & . & & . & \\
& & \mathbf{1} & & . & & . & & \\
& & & \mathbf{0} & & . & & & \\
& & & & \mathbf{0} & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & & . & & . & & . & & . \\
& \mathbf{0} & & . & & . & & . & \\
& & \mathbf{0} & & . & & . & & \\
& & & \mathbf{1} & & . & & & \\
& & & & \mathbf{0} & & & &
\end{array}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

On peut compléter les tables de cette base et déterminer le polynôme associé. Pour la première table, on trouve :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
f_0(0) & & f_0(1) & & f_0(2) & & f_0(3) & & \ldots & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \ldots & \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \ldots & & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & \ldots & & & \\
& & & 0 & & 0 & \ldots & & & & \\
& & & & 0 & \ldots & & & & &
\end{array}$$

La première table est donc celle du polynôme :

$$f_0(x) = 1.$$

Pour la deuxième table, on trouve :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
f_1(0) & & f_1(1) & & f_1(2) & & f_1(3) & & \ldots & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \ldots & \\
& 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \ldots & & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & \ldots & & & \\
& & & 0 & & 0 & \ldots & & & & \\
& & & & 0 & \ldots & & & & &
\end{array}$$

La deuxième table est celle du polynôme

$$f_1(x) = x.$$

Pour la troisième table, on trouve :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
f_2(0) & & f_2(1) & & f_2(2) & & f_2(3) & & \ldots & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & & 0 & & 1 & & 3 & & 6 & \ldots & \\
& 0 & & 1 & & 2 & & 3 & \ldots & & \\
& & 1 & & 1 & & 1 & \ldots & & & \\
& & & 0 & & 0 & \ldots & & & & \\
& & & & 0 & \ldots & & & & &
\end{array}$$

La première ligne indique que $f_2(0) = f_2(1) = 0$. On cherche donc un polynôme de degré 2 dont x et $x - 1$ sont des facteurs, soit un polynôme de la forme $f_2(x) = ax(x - 1)$. La première ligne indique également que $f_2(2) = 1$. Par substitution, on trouve :

$$f_2(2) = 2a(2 - 1) = 2a = 1$$

d'où l'on tire $a = 1/2$. La troisième table est donc celle du polynôme :

$$f_2(x) = \frac{x(x-1)}{2!}.$$

Pour la quatrième table, on trouve :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
f_3(0) & & f_3(1) & & f_3(2) & & f_3(3) & & \ldots & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 4 & & 10 & & \ldots \\
& 0 & & 0 & & 1 & & 3 & & 6 & & \ldots & \\
& & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & \ldots & & \\
& & & 1 & & 1 & & 1 & & \ldots & & & \\
& & & & 0 & & 0 & & \ldots & & & &
\end{array}$$

La première ligne indique que $f_3(0) = f_3(1) = f_3(2) = 0$. On cherche donc un polynôme de degré 3 dont $x, x-1$ et $x-2$ sont des facteurs, soit un polynôme de la forme $f_3(x) = ax(x-1)(x-2)$. La première ligne indique également que $f_3(3) = 1$. Par substitution, on trouve :

$$f_3(3) = 3a(3-1)(3-2) = 6a = 1$$

d'où l'on tire $a = 1/6$. La quatrième table est donc celle du polynôme :

$$f_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}.$$

En généralisant, les polynômes associés aux tables construites de la manière indiquée sont :

$$\begin{aligned}
&f_0(x) = 1\\
&f_1(x) = \frac{x}{1!}\\
&f_2(x) = \frac{x(x-1)}{2!}\\
&f_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_r(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)}{r!}.
\end{aligned}$$

Considérons de nouveau la table

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
4 & & 3 & & 8 & & 25 & & 60 & & 119 & & 208 & & 333 & & 500 & & \ldots \\
& -1 & & 5 & & 17 & & 35 & & 59 & & 89 & & 125 & & 167 & & \ldots & \\
& & 6 & & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & & 36 & & 42 & & \ldots & & \\
& & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & \ldots & & & \\
& & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \ldots & & & &
\end{array}$$

Les nombres du bord de gauche sont $4, -1, 6$, et 6. On peut alors déterminer le polynôme associé puisque c'est une combinaison linéaire des polynômes associés aux tables de la base et que les nombres du bord de gauche sont les scalaires de cette combinaison linéaire. On a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= 4f_0(x) - f_1(x) + 6f_2(x) + 6f_3(x) \\ &= 4 - x + 6 \times \frac{x(x-1)}{2!} + 6 \times \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \\ &= 4 - x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x \\ &= x^3 - 2x + 4. \end{aligned}$$

Application aux nombres polygonaux

Il est également possible de reconstruire une table de différences à partir d'une de ses lignes en connaissant le rang de cette ligne. Ainsi, on sait que les nombres triangulaires sont obtenus en effectuant les sommes partielles de la progression :

$$\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \ldots; n; \ldots\}.$$

Les nombres de cette progression constituent donc la ligne des premières différences dans la table dont la première ligne est constituée des nombres triangulaires. En reconstruisant cette table à partir de sa ligne des premières différences, on obtient :

0	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	**36**	**...**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**...**	
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**...**		
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**...**			

Les nombres triangulaires sont les images des entiers positifs par le polynôme associé à cette table. Le nombre triangulaire de rang n est alors :

$$\begin{aligned} P_{3,n} &= f_1(n) + f_2(n) = \frac{n}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} = n + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Les nombres carrés donnent la table des différences :

0	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**...**
1	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**...**	
2	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**...**		
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**...**			

Les nombres carrés sont les images des entiers positifs par le polynôme associé, soit :

$$\begin{aligned} P_{4,n} &= f_1(n) + 2f_2(n) = n + \frac{2n(n-1)}{2} \\ &= n + n^2 - n = n^2. \end{aligned}$$

Les nombres pentagonaux donnent la table des différences :

0	**1**	**5**	**12**	**22**	**35**	**51**	**70**	**92**	**...**
1	**4**	**7**	**10**	**13**	**16**	**19**	**22**	**...**	
3	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**...**		
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**...**			

Les nombres pentagonaux sont décrits par :

$$\begin{aligned} P_{5,n} &= f_1(n) + 3f_2(n) = n + \frac{3n(n-1)}{2} \\ &= \frac{2n + 3n^2 - 3n}{2} = \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Les nombres hexagonaux donnent la table des différences :

0	**1**	**6**	**15**	**28**	**45**	**66**	**91**	**120**	**...**
1	**5**	**9**	**13**	**17**	**21**	**25**	**29**	**...**	
4	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**...**		
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**...**			

Les nombres hexagonaux sont décrits par :

$$\begin{aligned} P_{6,n} &= f_1(n) + 4f_2(n) = n + \frac{4n(n-1)}{2} \\ &= \frac{2n + 4n^2 - 4n}{2} = \frac{4n^2 - 2n}{2} = 2n^2 - n = n(2n-1). \end{aligned}$$

Les nombres heptagonaux donnent la table des différences :

0	**1**	**7**	**18**	**34**	**55**	**81**	**112**	**148**	**...**
1	**6**	**11**	**16**	**21**	**26**	**31**	**36**	**...**	
5	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**...**		
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**...**			

Les nombres heptagonaux sont décrits par :

$$\begin{aligned} P_{7,n} &= f_1(n) + 5f_2(n) = n + \frac{5n(n-1)}{2} \\ &= \frac{2n + 5n^2 - 5n}{2} = \frac{5n^2 - 3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}. \end{aligned}$$

Les nombres $(k+2)$gonaux donnent la table des différences :

0	**1**	$\boldsymbol{k+2}$	$\boldsymbol{3k+3}$	$\boldsymbol{6k+4}$	$\boldsymbol{10k+5}$	$\boldsymbol{15k+6}$	**...**
1	$\boldsymbol{k+1}$	$\boldsymbol{2k+1}$	$\boldsymbol{3k+1}$	$\boldsymbol{4k+1}$	$\boldsymbol{5k+1}$	**...**	
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{k}$	**...**		
0	**0**	**0**	**0**	**...**			

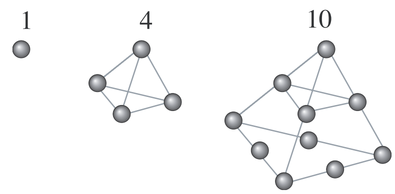
Les nombres polygonaux à $(k+2)$gonaux sont décrits par :

$$\begin{aligned} P_{k+2,n} &= f_1(n) + kf_2(n) = n + \frac{kn(n-1)}{2} \\ &= \frac{2n + kn^2 - kn}{2} = \frac{kn^2 - kn + 2n}{2} = \frac{n[kn-(k-2)]}{2}. \end{aligned}$$

Nombres pyramidaux

On peut utiliser cette procédure pour déterminer les formes générales des nombres pyramidaux.

Considérons les nombres pyramidaux à base triangulaire.



Les nombres qui constituent les gnomons des nombres pyramidaux à base triangulaire sont les nombres triangulaires :

$$\{1; 3; 6; 10; 15; \ldots\}.$$

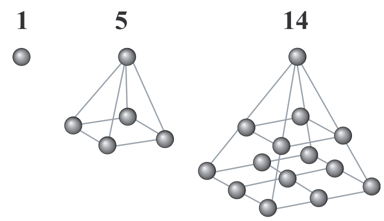
En considérant ces valeurs sur la deuxième ligne, on peut alors reconstituer le tableau suivant :

0	**0**	**1**	**4**	**10**	**20**	**35**	**56**	**84**	**...**
0	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	**36**	**...**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**...**	
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**...**		
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**...**			

Il suffisait donc d'ajouter une autre ligne au-dessus de la table des différences associée aux nombres triangulaires.

$$\begin{aligned} f_2(n) + f_3(n) &= \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \\ &= n(n-1)\left[\frac{1}{2} + \frac{(n-2)}{6}\right] \\ &= n(n-1)\left[\frac{3}{6} + \frac{(n-2)}{6}\right] \\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant la somme des n premiers nombres carrés qui donne le nombre pyramidal à base carrée de rang n.



Les nombres qui constituent les gnomons des nombres pyramidaux à base carrée sont les nombres carrés :

$$\{1; 4; 9; 16; 25; \ldots\}.$$

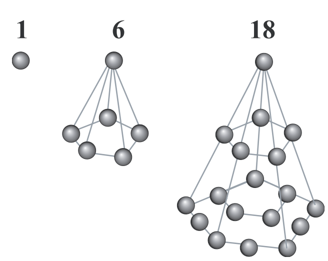
En considérant ces valeurs sur la deuxième ligne, on peut alors reconstituer le tableau suivant :

0	**0**	**1**	**5**	**14**	**30**	**55**	**91**	**140**	**...**
0	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**...**
1	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**...**	
2	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**...**		
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**...**			

L'image de n par le polynôme associé est alors :

$$\begin{aligned} f_2(n) + 2f_3(n) &= \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{3!} \\ &= n(n-1)\left[\frac{1}{2} + \frac{2(n-2)}{6}\right] \\ &= n(n-1)\left[\frac{3}{6} + \frac{2n-4}{6}\right] \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}. \end{aligned}$$

On procède de la même façon pour la somme des n premiers nombres pentagonaux qui donne le nombre pyramidal à base pentagonal de rang n. On obtient alors :



Les nombres qui constituent les gnomons des nombres pyramidaux à base pentagonale sont :

$$\{1; 5; 12; 22; 35; \ldots\}.$$

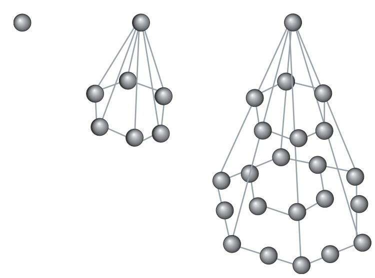
En considérant ces valeurs sur la deuxième ligne, on peut alors reconstituer le tableau suivant :

0	**0**	**1**	**6**	**18**	**40**	**75**	**126**	**196**	**...**
0	**1**	**5**	**12**	**22**	**35**	**51**	**70**	**92**	**...**
1	**4**	**7**	**10**	**13**	**16**	**19**	**22**	**...**	
3	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**...**		
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**...**			

L'image de n par le polynôme associé est alors :

$$\begin{aligned} f_2(n) + 3f_3(n) &= \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{3n(n-1)(n-2)}{3!} \\ &= n(n-1)\left[\frac{1}{2} + \frac{3(n-2)}{6}\right] \\ &= n(n-1)\left[\frac{3}{6} + \frac{3n-6}{6}\right] \\ &= \frac{n(n-1)(3n-3)}{6} = \frac{n(n-1)^2}{2}. \end{aligned}$$

Les nombres qui constituent les gnomons des nombres pyramidaux à base hexagonale sont :



Ces nombres sont les sommes partielles des termes de la suite :

$$\{1; 6; 15; 28; 45; \ldots\}.$$

En considérant ces valeurs comme deuxième ligne d'une table de différences, on peut alors reconstituer le tableau suivant :

0	**0**	**1**	**7**	**22**	**50**	**95**	**161**	**252**	**...**
0	**1**	**6**	**15**	**28**	**45**	**66**	**91**	**120**	**...**
1	**5**	**9**	**13**	**17**	**21**	**25**	**29**	**...**	
4	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**...**		
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**...**			

$$\begin{aligned} f_2(n) + 4f_3(n) &= \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{4n(n-1)(n-2)}{3!} \\ &= n(n-1)\left[\frac{1}{2} + \frac{4(n-2)}{6}\right] \\ &= n(n-1)\left[\frac{3}{6} + \frac{4n-8}{6}\right] = \frac{n(n-1)(4n-5)}{6}. \end{aligned}$$

Les nombres qui constituent les gnomons des nombres pyramidaux à base heptagonale sont :

$$\{1; 7; 18; 34; 55; \ldots\}.$$

En considérant ces valeurs sur la deuxième ligne, on peut alors reconstituer le tableau suivant :

0	**0**	**1**	**8**	**26**	**60**	**115**	**196**	**308**	**...**
0	**1**	**7**	**18**	**34**	**55**	**81**	**112**	**148**	**...**
1	**6**	**11**	**16**	**21**	**26**	**31**	**36**	**...**	
5	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**...**		
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**...**			

$$\begin{aligned} f_2(n) + 5f_3(n) &= \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{5n(n-1)(n-2)}{3!} \\ &= n(n-1)\left[\frac{1}{2} + \frac{5(n-2)}{6}\right] \\ &= n(n-1)\left[\frac{3}{6} + \frac{5n-10}{6}\right] = \frac{n(n-1)(5n-7)}{6}. \end{aligned}$$

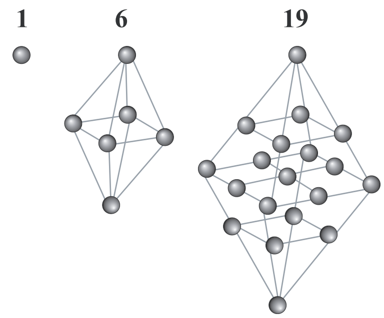
En généralisant, aux nombres pyramidaux à base $(k+2)$gonale, on obtient :

0	**0**	**1**	***k* + 3**	**4*k* + 6**	**10*k* + 10**	**20*k* + 15**	**...**
0	**1**	***k* + 2**	**3*k* + 3**	**6*k* + 4**	**10*k* + 5**	**15*k* + 6**	**...**
1	***k* + 1**	**2*k* + 1**	**3*k* + 1**	**4*k* + 1**	**5*k* + 1**	**...**	
k	***k***	***k***	***k***	***k***	**...**		
0	**0**	**0**	**0**	**...**			

$$\begin{aligned} f_2(n) + kf_3(n) &= \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{kn(n-1)(n-2)}{3!} \\ &= n(n-1)\left[\frac{1}{2} + \frac{k(n-2)}{6}\right] \\ &= n(n-1)\left[\frac{3}{6} + \frac{kn-2k}{6}\right] \\ &= \frac{n(n-1)(kn-2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Nombres octaédraux

Un nombre octaédral est la somme de deux nombres pyramidaux à base carrée successifs. Les premiers nombres octaédraux sont donnés dans l'illustration suivante :



$$
\begin{aligned}
OC_n &= PC_{4,n} + PC_{4,n-1} \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{6} \\
&= \frac{(n-1)}{6}[n(2n-1) + (n-2)(2n-3)] \\
&= \frac{(n-1)}{6}[4n^2 - 8n + 6] \\
&= \frac{(n-1)(2n^2-4n+3)}{3}.
\end{aligned}
$$

La table de différences associée aux nombres octaédraux est :

–1 0 1 6 19 44 85 146 231 ...

1 1 5 13 25 41 61 85 113 ...

0 4 8 12 16 20 24 28 ...

4 4 4 4 4 4 4 ...

0 0 0 0 0 0 ...

Détection des nombres polygonaux

On peut facilement à l'aide d'Excel dépister les nombres qui s'expriment de diverses façons comme nombres $(k+2)$gonaux. En effet, un nombre $(k+2)$gonal est de la forme :

$$P_{k+2,n} = n + k\frac{n(n-1)}{2}.$$

Un nombre m est donc le n nombre polygonal s'il existe un entier k tel que :

$$n + k\frac{n(n-1)}{2} = m \text{ ou } k = \frac{2(m-n)}{n(n-1)}.$$

On peut préparer une feuille d'Excel de telle sorte qu'en donnant une valeur au paramètre m, Excel calcule ce rapport pour différentes valeurs de n. Le tableau suivant donne les résultats pour les nombres 325, 435 et 561.

DÉTECTION DES DESCRIPTIONS POLYGONALES $k = \dfrac{2(m-n)}{n(n-1)}$			
n	$m = 325$ k	$m = 435$ k	$m = 561$ k
3	107,333	144	186
4	53,5	71,833	92,833
5	32	43	55,60
6	21,267	28,6	37
7	15,143	20,381	26,381
8	11,321	15,250	19,750
9	8,778	11,833	15,333
10	7	9,444	12,244
11	5,709	7,709	10
12	4,742	6,409	8,318
13	4	5,410	7,026
14	3,418	4,626	6,011
15	2,952	4	5,200
16	2,575	3,492	4,542
17	2,265	3,074	4
18	2,007	2,725	3,549
19	1,789	2,433	3,170
20	1,605	2,184	2,847
21	1,448	1,971	2,571
22	1,312	1,788	2,333
23	1,194	1,628	2,126
24	1,091	1,489	1,946
25	1	1,367	1,787
26	0,920	1,258	1,646
27	0,849	1,162	1,521
28	0,786	1,077	1,410
29	0,729	1	1,310
30	0,678	0,931	1,221
31	0,632	0,869	1,140
32	0,591	0,813	1,067
33	0,553	0,761	1
34	0,519	0,715	0,939
35	0,487	0,672	0,884

Dans le tableau, on peut voir, par exemple, qu'en assignant la valeur 325 à m, on obtient un résultat entier pour les valeurs de n suivantes : 5, 10, 13 et 25. Cela signifie que 325 s'exprime sous forme polygonale d'au moins quatre façons. La valeur entière apparaissant sur chacune de ces lignes est la valeur de k correspondante. On a donc :

$$325 = 5 + 32 \times \left(\frac{5 \times 4}{2}\right), 325 = 10 + 7 \times \left(\frac{10 \times 9}{2}\right),$$

$$325 = 13 + 4 \times \left(\frac{13 \times 12}{2}\right) \text{ et } 325 = 25 + 1 \times \left(\frac{25 \times 24}{2}\right).$$

Le tableau suivant donne les nombres polygonaux plus petits que 2000 qui sont polygonaux de plus d'une façon.

NOMBRES POLYGONAUX DE PLUS D'UNE FAÇON ($0 < m < 2000$)

15	2	235	2	456	3	666	3	865	2	1044	2	1242	2	1450	2	1645	2	1825	2
21	2	238	2	460	2	672	2	868	2	1045	3	1245	2	1455	2	1651	2	1828	2
28	2	246	2	465	3	675	2	870	2	1053	2	1246	2	1456	3	1652	2	1830	2
36	3	255	2	469	2	676	2	873	2	1056	3	1251	2	1461	2	1653	3	1834	3
45	3	256	2	471	2	681	2	874	2	1065	3	1266	3	1464	3	1656	2	1836	2
51	2	261	3	474	2	685	2	876	3	1068	2	1269	2	1470	2	1660	2	1845	3
55	2	276	4	477	3	693	2	885	2	1071	3	1270	2	1476	2	1662	2	1851	2
64	2	285	2	484	3	696	2	891	3	1072	2	1275	4	1485	5	1665	3	1854	2
66	3	286	2	486	2	700	2	900	2	1078	2	1276	2	1491	3	1666	2	1855	3
70	2	288	2	490	2	703	2	903	2	1080	2	1281	3	1492	2	1671	2	1860	2
75	2	291	2	495	2	705	2	904	2	1086	2	1288	4	1495	3	1675	2	1866	2
78	2	297	2	496	3	708	2	906	2	1089	4	1296	4	1498	2	1686	2	1870	2
81	3	306	2	501	2	711	2	909	2	1090	2	1305	3	1506	2	1695	3	1875	2
91	2	315	2	505	2	715	3	910	3	1095	2	1311	2	1515	2	1696	2	1876	2
96	2	316	2	513	2	726	3	915	2	1096	2	1315	2	1520	2	1701	5	1881	4
100	2	321	2	516	2	729	3	921	2	1101	2	1324	2	1521	4	1708	2	1884	2
105	3	322	2	525	2	730	2	924	2	1105	3	1326	4	1525	2	1716	4	1885	2
111	2	324	2	528	2	735	2	925	2	1116	2	1330	2	1530	2	1720	2	1891	2
112	2	325	4	531	2	736	3	936	4	1120	2	1332	2	1536	2	1725	2	1896	2
117	2	330	2	532	3	738	2	945	3	1125	3	1335	3	1540	6	1728	2	1900	3
120	3	333	2	540	4	741	3	946	3	1128	3	1336	2	1545	2	1729	3	1905	3
126	2	336	2	546	2	742	3	951	2	1131	2	1341	3	1548	3	1731	2	1911	3
135	2	342	2	549	2	750	2	952	2	1134	2	1350	2	1551	3	1737	2	1912	2
136	2	345	2	550	2	756	2	955	2	1135	2	1356	2	1557	2	1743	2	1917	2
141	2	351	3	555	2	765	3	960	3	1146	2	1360	2	1558	2	1744	2	1918	3
144	2	364	2	561	5	771	2	966	2	1155	2	1365	2	1561	2	1746	2	1920	2
145	2	366	2	568	2	775	2	969	2	1156	3	1371	2	1566	2	1750	2	1925	2
148	2	369	2	574	2	780	3	970	2	1161	3	1372	2	1575	2	1755	2	1926	4
153	3	370	2	576	2	783	2	975	2	1162	3	1377	3	1576	3	1761	2	1935	2
154	2	372	2	585	3	784	3	976	2	1170	2	1378	2	1581	2	1764	2	1936	4
156	2	375	2	591	2	786	2	981	3	1176	3	1380	3	1582	2	1765	2	1941	2
165	2	376	2	595	4	792	2	988	2	1180	2	1386	3	1585	2	1770	3	1945	2
171	3	378	3	606	3	795	2	990	2	1183	2	1395	3	1590	2	1771	2	1953	3
175	2	381	2	615	2	801	3	994	2	1185	2	1398	2	1593	2	1773	2	1956	2
176	2	385	2	616	4	804	2	996	2	1191	2	1401	2	1596	3	1776	2	1960	2
186	2	396	3	621	3	805	2	1000	2	1197	3	1405	2	1600	2	1782	2	1965	2
189	2	400	3	624	2	816	2	1001	2	1200	2	1408	3	1605	2	1785	3	1968	2
190	3	405	3	625	2	820	4	1002	2	1204	2	1413	2	1606	2	1791	2	1971	2
195	2	406	3	630	3	825	2	1005	2	1206	2	1414	2	1611	2	1792	2	1986	2
196	3	408	2	636	2	826	2	1011	2	1212	2	1416	2	1617	2	1794	3	1989	2
201	2	411	2	637	2	831	2	1015	3	1215	2	1425	2	1624	2	1800	3	1990	2
204	2	415	2	640	2	833	2	1017	2	1216	3	1426	2	1626	2	1806	2	1992	2
210	3	425	2	645	3	837	2	1024	2	1221	3	1431	4	1629	2	1809	2	1995	2
216	2	426	2	651	4	846	2	1026	2	1225	6	1435	2	1630	2	1810	2	1996	2
225	4	435	4	652	2	855	3	1035	4	1233	2	1444	2	1632	2	1815	2		
231	4	441	4	657	2	856	2	1036	2	1236	2	1446	2	1635	2	1816	2		
232	2	448	2	658	2	861	4	1041	2	1240	2	1449	2	1641	2	1821	2		

Le tableau suivant donne les nombres polygonaux pour $n \leq 15$ et $k \leq 50$. Il est illusoire de chercher à détecter quelque chose à partir de ce tableau. En effet, le nombre 561 est polygonal de quatre façons avec les couples $(n;k)$ suivants : $(6;37), (11;10), (17;4)$ et $(33;1)$. Or, un seul de ces couples apparaît dans le tableau suivant. Il faudrait ajouter beaucoup de colonnes.

NOMBRES POLYGONAUX

k \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120
2	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
3	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210	247	287	330
4	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276	325	378	435
5	18	34	55	81	112	148	189	235	286	342	403	469	540
6	21	40	65	96	133	176	225	280	341	408	481	560	645
7	24	46	75	111	154	204	261	325	396	474	559	651	750
8	27	52	85	126	175	232	297	370	451	540	637	742	855
9	30	58	95	141	196	260	333	415	506	606	715	833	960
10	33	64	105	156	217	288	369	460	561	672	793	924	1065
11	36	70	115	171	238	316	405	505	616	738	871	1015	1170
12	39	76	125	186	259	344	441	550	671	804	949	1106	1275
13	42	82	135	201	280	372	477	595	726	870	1027	1197	1380
14	45	88	145	216	301	400	513	640	781	936	1105	1288	1485
15	48	94	155	231	322	428	549	685	836	1002	1183	1379	1590
16	51	100	165	246	343	456	585	730	891	1068	1261	1470	1695
17	54	106	175	261	364	484	621	775	946	1134	1339	1561	1800
18	57	112	185	276	385	512	657	820	1001	1200	1417	1652	1905
19	60	118	195	291	406	540	693	865	1056	1266	1495	1743	2010
20	63	124	205	306	427	568	729	910	1111	1332	1573	1834	2115
21	66	130	215	321	448	596	765	955	1166	1398	1651	1925	2220
22	69	136	225	336	469	624	801	1000	1221	1464	1729	2016	2325
23	72	142	235	351	490	652	837	1045	1276	1530	1807	2107	2430
24	75	148	245	366	511	680	873	1090	1331	1596	1885	2198	2535
25	78	154	255	381	532	708	909	1135	1386	1662	1963	2289	2640
26	81	160	265	396	553	736	945	1180	1441	1728	2041	2380	2745
27	84	166	275	411	574	764	981	1225	1496	1794	2119	2471	2850
28	87	172	285	426	595	792	1017	1270	1551	1860	2197	2562	2955
29	90	178	295	441	616	820	1053	1315	1606	1926	2275	2653	3060
30	93	184	305	456	637	848	1089	1360	1661	1992	2353	2744	3165
31	96	190	315	471	658	876	1125	1405	1716	2058	2431	2835	3270
32	99	196	325	486	679	904	1161	1450	1771	2124	2509	2926	3375
33	102	202	335	501	700	932	1197	1495	1826	2190	2587	3017	3480
34	105	208	345	516	721	960	1233	1540	1881	2256	2665	3108	3585
35	108	214	355	531	742	988	1269	1585	1936	2322	2743	3199	3690
36	111	220	365	546	763	1016	1305	1630	1991	2388	2821	3290	3795
37	114	226	375	561	784	1044	1341	1675	2046	2454	2899	3381	3900
38	117	232	385	576	805	1072	1377	1720	2101	2520	2977	3472	4005
39	120	238	395	591	826	1100	1413	1765	2156	2586	3055	3563	4110
40	123	244	405	606	847	1128	1449	1810	2211	2652	3133	3654	4215
41	126	250	415	621	868	1156	1485	1855	2266	2718	3211	3745	4320
42	129	256	425	636	889	1184	1521	1900	2321	2784	3289	3836	4425
43	132	262	435	651	910	1212	1557	1945	2376	2850	3367	3927	4530
44	135	268	445	666	931	1240	1593	1990	2431	2916	3445	4018	4635
45	138	274	455	681	952	1268	1629	2035	2486	2982	3523	4109	4740
46	141	280	465	696	973	1296	1665	2080	2541	3048	3601	4200	4845
47	144	286	475	711	994	1324	1701	2125	2596	3114	3679	4291	4950
48	147	292	485	726	1015	1352	1737	2170	2651	3180	3757	4382	5055
49	150	298	495	741	1036	1380	1773	2215	2706	3246	3835	4473	5160
50	153	304	505	756	1057	1408	1809	2260	2761	3312	3913	4564	5265
	$3+3k$	$4+6k$	$5+10k$	$6+15k$	$7+21k$	$8+28k$	$9+36k$	$10+45k$	$11+55k$	$12+66k$	$13+78k$	$14+91k$	$15+105k$

Comme sujet de réflexion, Jacques Sormany pose la question :

> Soit m un entier pris au hasard. De combien de façons peut-on l'exprimer comme nombre polygonal ?

On peut facilement déterminer que dans l'intervalle $[1; 2000]$, on trouve 788 nombres qui sont polygonaux d'une seule façon, 340 qui le sont de deux façons, 98 de trois façons, 25 de quatre façons, 3 de cinq façons et deux de six façons.

Les nombres qui s'expriment de cinq façons sont 561, 1485 et 1701. Ceux qui s'expriment de six façons sont 1225 et 1540.

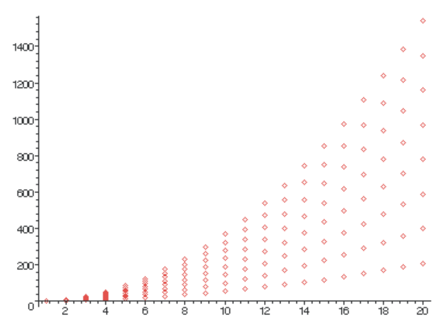
Suites polygonales

Les nombres polygonaux sont des suites dont les termes satisfont à une condition de la forme :

$$f(n) = P_{k+2,n} = n + k\frac{n(n-1)}{2}.$$

En utilisant Maple pour représenter graphiquement les 20 premiers termes de ces suites pour $3 \leq k + 2 \leq 10$, on obtient :

```
with(plots);
> P3 :=seq([n,n+(n*(n-1)/2)],n=1..20);
  P4 :=seq([n,n+2*(n*(n-1)/2)],n=1..20);
  P5 :=seq([n,n+3*(n*(n-1)/2)],n=1..20);
  P6 :=seq([n,n+4*(n*(n-1)/2)],n=1..20);
  P7 :=seq([n,n+5*(n*(n-1)/2)],n=1..20);
  P8 :=seq([n,n+6*(n*(n-1)/2)],n=1..20);
  P9 :=seq([n,n+7*(n*(n-1)/2)],n=1..20);
  P10 :=seq([n,n+8*(n*(n-1)/2)],n=1..20);
  pointplot(P3,P4,P5,P6,P7,P8,P9,P10,color=red);
```



Répartion des vingt premiers nombres $(k+2)$ gonaux pour $1 \leq k \leq 8$

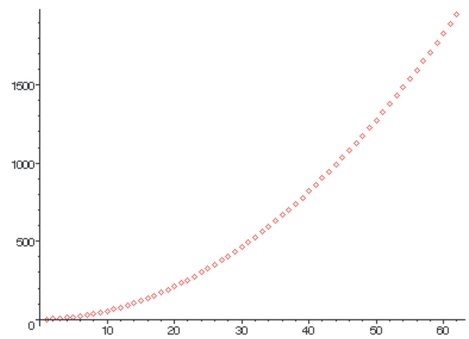
La représentation graphique d'une suite polygonale est un ensemble de points dont l'abscisse et l'ordonnée sont des valeurs entières. Ces points sont des valeurs discrètes sur une parabole.

Densité de la répartition

Considérons la question suivante :

> Soit m un nombre entier tel que $m \leq 2000$. Quelle est la probabilité que ce nombre soit triangulaire ?

En représentant graphiquement les nombres triangulaires inférieurs à 2000, on obtient la figure suivante.



Répartion des soixante premiers nombres triangulaires

La probabilité qu'un nombre $m \leq 2000$ choisi au hasard soit un nombre triangulaire est assez petite puisqu'il y a seulement soixante nombres triangulaires plus petits ou égaux à 2000. En effet :

$$P_{3,62} = 1953 \text{ et } P_{3,63} = 2016.$$

La probabilité qu'un nombre inférieur à 2000 soit triangulaire est donc :

$$\frac{60}{2000} = 0,03.$$

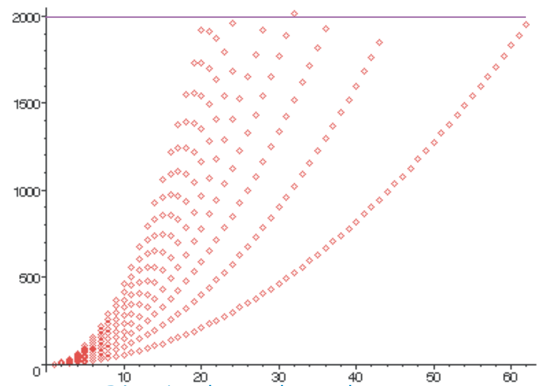
C'est également la probabilité qu'une droite tracée perpendiculairement à l'axe des y en une ordonnée choisie au hasard rencontre un des points de la suite des nombres triangulaires (la grosseur des points peut nous induire en erreur si on tente une estimation visuelle).

Que devient cette probabilité si on considère les suites de nombres polygonaux pour $3 \leq k+2 \leq 12$? Considérons maintenant les suites de nombres polygonaux plus petits ou égaux à 2000 pour $k = 1, 2, \ldots, 10$. On peut les représenter graphiquement en donnant à Maple les instructions suivantes :

```
> with(plots) :
P3 :=seq([n,n+(n*(n-1)/2)],n=3..62) ;
P4 :=seq([n,n+2*(n*(n-1)/2)],n=3..43) ;
P5 :=seq([n,n+3*(n*(n-1)/2)],n=3..36) ;
P6 :=seq([n,n+4*(n*(n-1)/2)],n=3..32) ;
P7 :=seq([n,n+5*(n*(n-1)/2)],n=3..28) ;
P8 :=seq([n,n+6*(n*(n-1)/2)],n=3..24) ;
```

P9 :=seq([n,n+7*(n*(n-1)/2)],n=1..24) ;
P10 :=seq([n,n+8*(n*(n-1)/2)],n=1..22) ;
P11 :=seq([n,n+9*(n*(n-1)/2)],n=1..21) ;
P12 :=seq([n,n+10*(n*(n-1)/2)],n=1..20) ;

La représentation graphique de ces suites donne la figure suivante :



Répartion des nombres polygonaux inférieurs à 2000 pour $3 \leq k+2 \leq 12$

On trouve 290 nombres $(k+2)$gonaux pour $3 \leq k+2 \leq 12$. La probabilité qu'un nombre inférieur à 2000 choisi au hasard soit $(k+2)$gonal pour $3 \leq k+2 \leq 12$ est donc :

$$\frac{290}{2000} = 0,145.$$

On trouve 431 nombres $(k+2)$gonaux pour $3 \leq k+2 \leq 22$. La probabilité qu'un nombre inférieur à 2000 choisi au hasard soit $(k+2)$gonal pour $3 \leq k+2 \leq 22$ est donc :

$$\frac{431}{2000} = 0,2155.$$

On trouve 543 nombres $(k+2)$gonaux pour $3 \leq k+2 \leq 32$. La probabilité qu'un nombre inférieur à 2000 choisi au hasard soit $(k+2)$gonal pour $3 \leq k+2 \leq 32$ est donc :

$$\frac{543}{2000} = 0,2715.$$

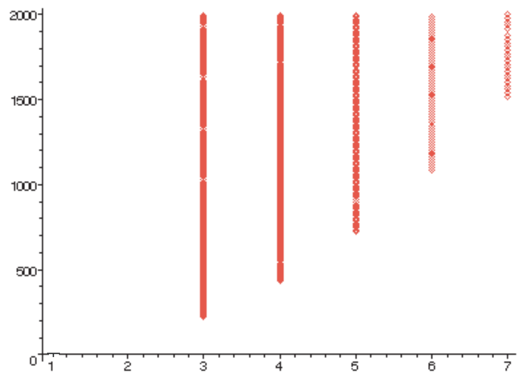
On trouve 649 nombres $(k+2)$gonaux pour $3 \leq k+2 \leq 42$. La probabilité qu'un nombre inférieur à 2000 choisi au hasard soit $(k+2)$gonal pour $3 \leq k+2 \leq 42$ est donc :

$$\frac{649}{2000} = 0,3245.$$

On peut poser la question :

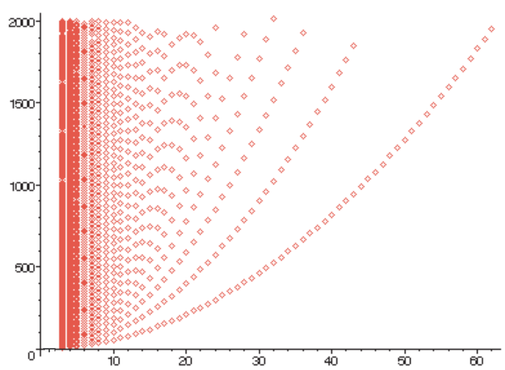
> Si on trace une perpendiculaire à l'axe verticale en un point d'ordonnée entière m, quelle est la probabilité que cette droite passe par au moins un point d'une suite polygonale ?

Dans la représentation graphique précédente, nous avons considéré les nombres polygonaux pour $3 \leq k+2 \leq 12$. Considérons maintenant les plus grandes valeurs. Dans les suites de nombres polygonaux $332 < k < 667$, il n'y a qu'un seul nombre inférieur à 2000, celui obtenu en posant $n = 3$. Pour $200 < k < 332$, il y a deux nombres polygonaux inférieurs à 2000. Pour $133 < k < 200$, il y en a trois, pour $96 < k < 133$ et pour $72 < k < 96$. La représentation graphique de ces nombres donne :



Répartion des nombres polygonaux
plus petits ou égaux à 2000 pour $k > 72$

En représentant tous les nombres polygonaux plus petits ou égaux à 2000, on obtient la représentation suivante.



Répartion des nombres polygonaux
plus petits ou égaux à 2000 pour $k > 2$

On trouve 1256 nombres $(k+2)$gonaux pour $k+2 \geq 3$ plus petits ou égaux à 2000. La probabilité est donc :

$$\frac{1256}{2000} = 0,628.$$

Conclusion

Il y a diverses approches permettant d'obtenir une généralisation de l'expression algébrique des nombres polygonaux. Chacune de celles-ci fait voir ces nombres sous un éclairage différent et suggère de nouvelles pistes de réflexion.

Bibliographie

Fletcher, T.J., *L'algèbre linéaire par ses applications*, adapté de l'anglais par M et V. Glaymann, Montréal, Éditions Hurtubise, Lyon, CEDC, 1972, 320 p.

Édition anglaise de *Linear Algebra Through Its Applications*, London, Van Nostrand Company, 1972.

Sormany, Jacques (décembre 2004), Les nombres polygonaux, *Bulletin de l'AMQ* 44,(4), p. 14-17.

Mathématiques et civilisation

André Ross
Cégep de Lévis-Lauzon

Les lois des mouvements planétaires de Johannes Kepler

Johannes Kepler naquit le 27 décembre 1571 à Weil der Stadt qui fait alors partie du duché de Wurtenberg. Son père offre ses services comme soldat mercenaire et est souvent absent durant des mois. À chacune de ses visites, il engrosse sa femme puis repart à l'aventure. L'atmosphère familiale est lourde et les disputes sont fréquentes. Lorsque Johannes a quatre ans, son père disparaît pour une année. Sa mère, Katharina, laissant les enfants chez leurs grands-parents partit à la recherche de son mari qu'elle ramena à la maison plusieurs mois plus tard. En 1589, il repartit à nouveau pour ne plus jamais revenir.

Johannes Kepler
(1571-1630)

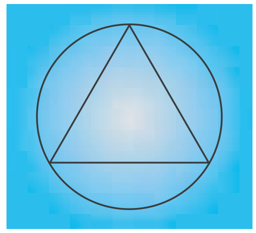
Malgré cette enfance tumultueuse, Kepler conserve de son enfance quelques moments heureux associés aux phénomènes astronomiques. En 1577, sa mère l'emmena au sommet d'une colline pour observer une comète et, le 31 janvier 1580, son père lui montra une éclipse de Lune et il observa que celle-ci devenait toute rouge. En septembre 1588, il réussit son examen de fin d'études et fut admis au séminaire supérieur de Tübingen. Il y suivit les cours d'astronomie de Michael Maestlin. Officiellement, celui-ci devait enseigner l'astronomie de Ptolémée, mais il initiait ses meilleurs élèves à la théorie copernicienne. Kepler fut passionné au point qu'il a consacré ses énergies à l'étude de cette science, il fut donc très tôt copernicien. Il fut également platonicien et convaincu que l'univers a été créé à partir d'un plan géométrique simple et beau.

En poursuivant ses études à Tübingen, Kepler envisageait de devenir pasteur luthérien, mais, avant de terminer, il fut appelé à Graz comme Mathématicien provincial et professeur de morale et de mathématiques à l'école secondaire protestante de Graz. Il était alors âgé de vingt-trois ans.

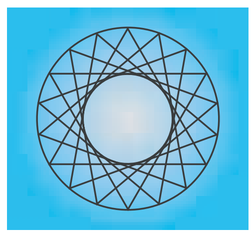
CORPS RÉGULIERS ET MODÈLE

À l'époque de Kepler, les modèles décrivant les mouvements planétaires étaient devenus très complexes. Profondément croyant, Kepler était convaincu que ces modèles ne pouvaient être ceux choisis par Dieu pour créer l'univers. Selon lui, Dieu avait nécessairement choisi des modèles simples et beaux. Cette conviction a présidé à toutes ses recherches. Découvrir les lois à partir desquelles Dieu avait créé l'univers, c'était pour Kepler rendre hommage à Dieu. La première théorie échafaudée par

Kepler témoigne de cette quête mystique. Il eut l'intuition de ce modèle durant un de ses cours de géométrie en observant un triangle équilatéral inscrit dans un cercle.

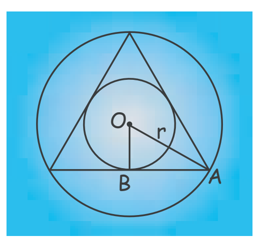


En considérant que le cercle est en rotation à une vitesse uniforme et que le triangle est entraîné dans cette rotation, il obtient la figure suivante.



La trace laissée lors de la rotation révèle un cercle inscrit dans le triangle équilatéral.

Le rayon de ce cercle inscrit peut être facilement déterminé si on connaît le rayon du cercle circonscrit.



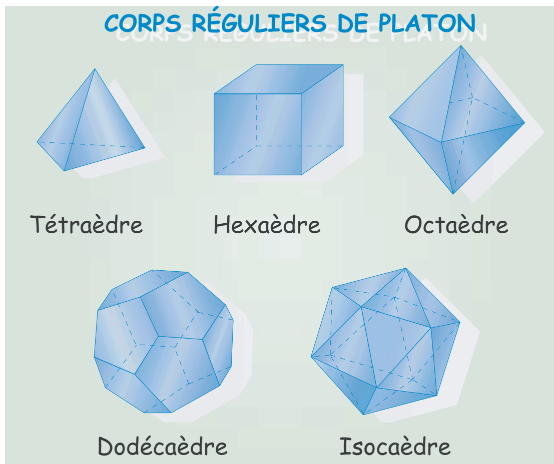
Dans le triangle OAB, l'hypoténuse est le rayon du cercle circonscrit et le côté OB est le rayon du cercle inscrit. De plus, l'angle en A est de 30°. Or, dans un triangle rectangle qui a un angle de 30°, le côté opposé à l'angle de 30° est égal à la moitié de l'hypoténuse. Par conséquent, le rayon du cercle inscrit est égal à $r/2$, soit la moitié du rayon du cercle circonscrit. Il existe donc une relation très simple entre le rayon du cercle inscrit et celui du cercle circonscrit.

Cette propriété peut-elle permettre de découvrir le secret de l'harmonie céleste ? Kepler le croyait. Il savait que, dans ses *Éléments*, Euclide a démontré des propriétés analogues pour les corps réguliers de Platon. Chacun de ces corps peut être inscrit dans une sphère et circonscrit à une autre sphère. On peut donc établir une relation entre les rayons de la sphère circonscrite et de la sphère inscrite dans chacun de ces corps réguliers.

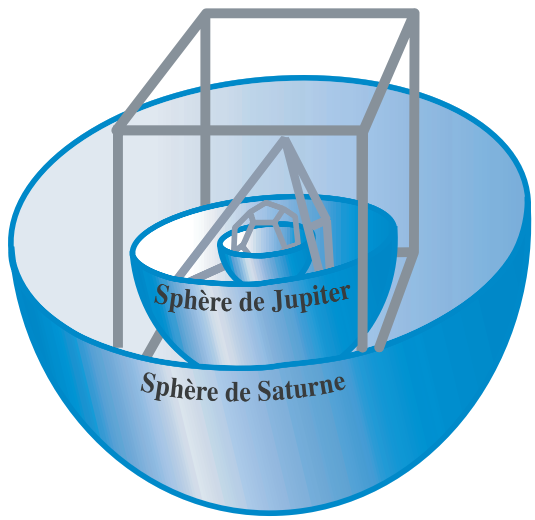
Kepler fit un rapprochement entre le nombre de corps réguliers de Platon et les planètes connues à l'époque. Il tenta donc d'expliquer les positions relatives des planètes à l'aide des corps réguliers de Platon. Impressionné par le fait qu'il n'existait que 5 polyèdres réguliers, les cinq corps de Platon, il croyait que ceux-ci avaient été utilisés par Dieu pour créer l'univers.

Dans la préface de *Mysterium cosmographicum* (*Mystère du Cosmos*), publié en 1596, il écrit :

> *Je vais tenter de prouver que Dieu en créant l'univers et en déterminant l'ordre dans le cosmos a utilisé les cinq corps réguliers de la géométrie, connus depuis l'époque de Pythagore et Platon.*



Kepler supposa que Saturne, la plus éloignée des planètes connues à l'époque, se déplaçait sur une sphère dont le centre était le Soleil. Il supposa de plus qu'à l'intérieur de cette sphère était inscrit un cube (hexaèdre) à l'intérieur duquel était inscrite une deuxième sphère sur laquelle se déplaçait la planète Jupiter. La sphère de Jupiter contenait un tétraèdre à l'intérieur duquel était inscrite une troisième sphère sur laquelle se déplaçait la planète Mars. Dans l'orbe de Mars, il inscrit un dodécaèdre (12 faces pentagonales et 20 sommets). La sphère inscrite dans ce dodécaèdre est l'orbe de la Terre. Dans l'orbe terrestre, il inscrit un icosaèdre (20 faces triangulaires et 12 sommets). À l'intérieur de celui-ci s'inscrit l'orbe de Vénus qui est circonscrite à un octaèdre (8 faces triangulaires et six sommets) . La sphère inscrite dans l'octaèdre est l'orbe de Mercure. Le soleil est immobile au centre de ces sphères homocentriques.



En utilisant les cinq corps réguliers, il obtenait ainsi six sphères, ce qui correspondait au nombre de planètes connues à l'époque. Cette coïncidence semblait à Kepler un argument de poids en faveur de sa théorie. Une fois connu le rayon de la sphère extérieure, soit la distance du Soleil à Saturne, il espérait pouvoir calculer les rayons des autres sphères et obtenir ainsi les distances du Soleil aux autres planètes. Le projet de Kepler était ambitieux et ne reposait sur aucun fondement scientifique. Il était purement spéculatif. Cette hypothèse a été publiée par Kepler dans *Mysterium cosmographicum*. Les astronomes de l'époque sont convaincus que c'est par le nombre, la géométrie, le poids et la mesure que l'on peut parvenir aux secrets de la construction du monde. Cependant, le recours aux nombres et à la géométrie ne peut justifier la mise en mouvement de la Terre. Kepler fait parvenir son ouvrage à Tycho Brahe qu'il croit le plus apte à apprécier son hypothèse. En 1598, Tycho lui fait savoir que les valeurs dérivées de Copernic sur lesquelles il base son hypothèse sont erronées. De plus, cette hypothèse accepte l'idée des orbes corporelles des planètes qui n'ont aucune réalité physique. La découverte d'autres planètes viendra par la suite confirmer le jugement de Tycho.

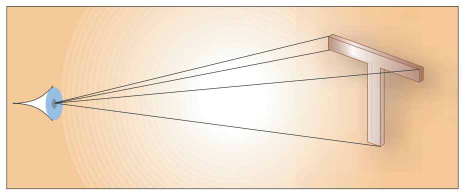
CLIN D'OEIL À L'OPTIQUE

Dans sa réponse à Kepler, Tycho invite celui-ci à se joindre à son équipe. En 1600, Kepler fut chassé de l'école de Graz par les persécutions religieuses de la Contre-Réforme. Il accepta alors l'invitation de Tycho. N'étant pas doté d'une très bonne vue, il ne pouvait agir efficacement comme observateur et Tycho lui assigna alors la tâche d'étudier l'orbite de Mars. Kepler pensait effectuer cette tâche en une semaine ; il n'en fut rien. Il s'est rapidement rendu compte qu'il fallait corriger les observations en tenant compte du phénomène de la réfraction, c'est-à-dire de la déviation des rayons lumineux par l'atmosphère terrestre. Cette constatation l'a amené à s'intéresser à l'optique. Il s'est alors plongé dans les ouvrages d'Alhazen (Al Haytam (965 - 1039)) et du polonais Witelo (1230 - vers 1300). Deux grandes questions étaient laissées sans réponse satisfaisante dans les ouvrages d'optique des prédécesseurs de Kepler :

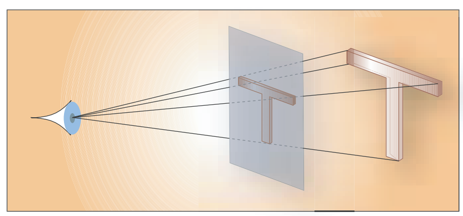
- Comment un objet extérieur parvient-il à notre organe de la vision ?
- Comment s'effectue la transition de l'organe de la vision au cerveau ?

Dans les réponses qu'il donne à ces questions, Kepler est inspiré par les illustrations de Dürer sur la perspective et les notions de projection et de section. Il fait également l'historique de la chambre noire et en décrit les utilisations pour obtenir des mesures précises lors d'éclipses de Soleil.

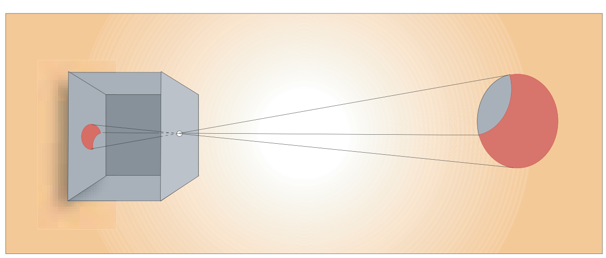
Dans la théorie de la perspective, il faut considérer un segment de droite partant de chacun des points d'un objet.



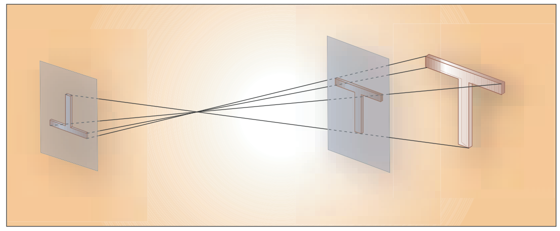
Ces segments de droite forment un cône dont le sommet est l'oeil du peintre. En intercalant un écran entre l'objet et l'oeil, les segments de droite laissent sur l'écran une trace dont l'effet sur l'oeil est le même que celui de l'objet à dessiner.



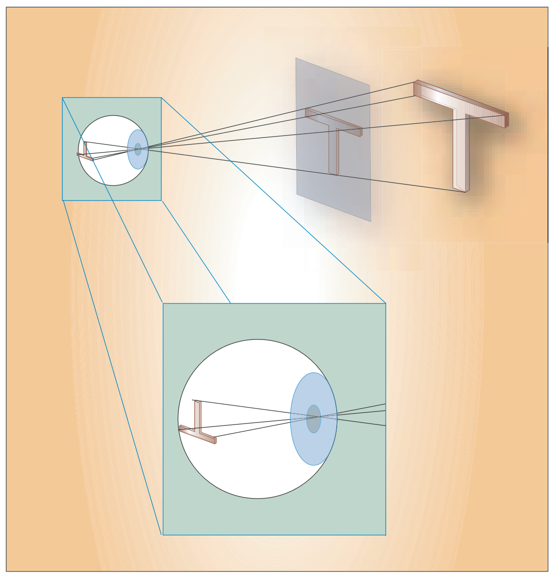
Dürer illustre ce principe de diverses façons, dans les dessins de l'homme assis, de la femme couchée, du luth et de la cruche. En observant une éclipse de Soleil dans une chambre obscure, l'image produite sur le mur par les rayons lumineux passant par le petit orifice aménagé dans la cloison est une image inversée.



En faisant un parallèle entre les illustrations de Dürer et la chambre obscure, Kepler considère que, dans les illustrations de Dürer, si l'écran était placé derrière le peintre, l'image serait également inversée.



Kepler, comme Léonard de Vinci avant lui, comprend alors que le globe oculaire fait office de chambre noire et que l'image se forme non pas sur le cristallin, comme on le croyait jusqu'alors, mais à l'arrière du globe oculaire.

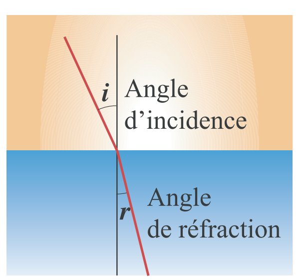


Le cerveau traduit alors l'information reçue par le globe oculaire pour recréer une image droite.

La réfraction

En étudiant la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r, Kepler suppose que l'angle de réfraction est proportionnel à l'angle d'incidence, soit :

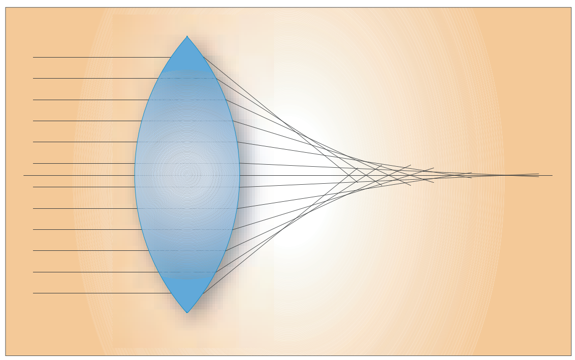
$$\frac{\angle i}{\angle r} = n$$



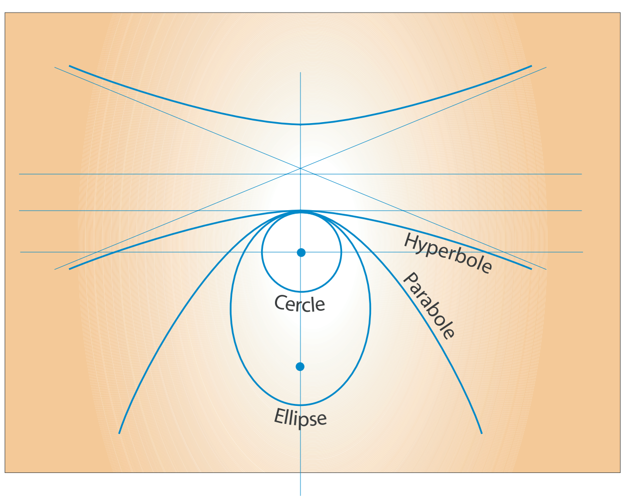
Pour les angles inférieurs à 30°, cela constitue une bonne approximation, mais la relation exacte, déterminée par Descartes et Snell quelques années plus tard, est :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

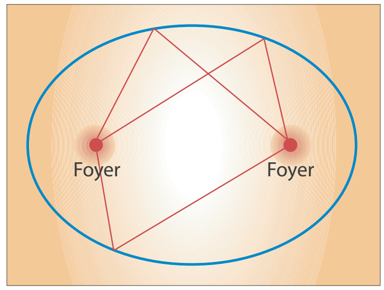
Pour bien comprendre le phénomène de réfraction, Kepler étudie ensuite la réfraction des lentilles. Il constate que, dans une lentille sphérique, les rayons ne convergent pas bien. Des rayons lumineux parallèles qui traversent une lentille sphérique ne convergent pas en un seul point mais en plusieurs points sur l'axe de la lentille. De nos jours, ce phénomène est appelé *aberration sphérique*.



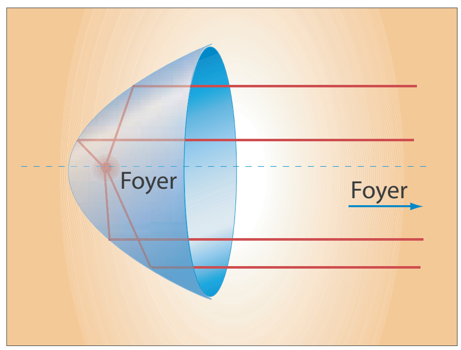
Lorsque Kepler a entrepris son étude de la réfraction, les lunettes astronomiques et les télescopes n'étaient pas encore connus. Il examine diverses formes de miroirs et de lentilles, dont les formes de la famille des coniques. Il montre comment, par une transformation, il est possible de passer de la droite à l'hyperbole, puis à la parabole, à l'ellipse et au cercle.



Il constate que les formes coniques ont des points caractéristiques qu'il nomme « foyers ». En plaçant une source lumineuse en l'un des foyers d'une ellipse, l'image est parfaitement claire à l'autre foyer.



Dans le cas d'un miroir parabolique, l'un des foyers est à l'infini. Si une source lumineuse est placée au foyer, les rayons lumineux sont réfléchis parallèlement à l'axe de la parabole. Par ailleurs, les rayons lumineux parallèles à l'axe sont concentrés au foyer.



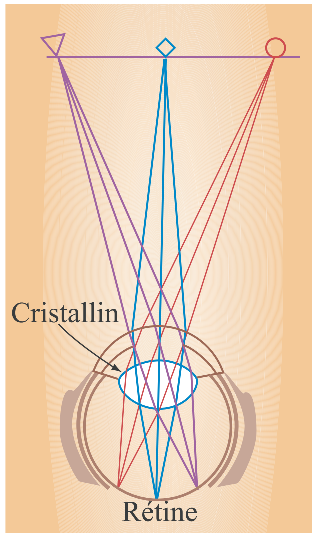
Le cercle et la sphère n'ont qu'un seul foyer, leur centre, et la lumière émise à partir de celui-ci est réfléchie au même point. Le cercle et la sphère sont donc désavantagés par rapport aux autres formes coniques.

Théorie de la vision

Kepler présente alors une théorie de la vision qui ressemble beaucoup à celle du mathématicien et astronome italien Francesco Maurolico (1494 - 1575). Cependant, l'ouvrage de Maurolico, *Photismi de lumine et umbra*, ne fut publié qu'en 1611, soit 36 ans après la mort de l'auteur et 7 ans après l'*Optica* de Kepler. Les grandes lignes de cette théorie de la vision sont les suivantes.

Si une source est constituée d'un seul point lumineux, elle émet des rayons dans toutes les directions. Les rayons interceptés par l'oeil forment un cône dont le sommet est la source ponctuelle de lumière. Ces rayons subissent une légère diffraction en traversant la cornée puis traversent le cristallin. Celui-ci est une lentille biconvexe qui a la propriété de modifier la direction des rayons lumineux. Les rayons forment alors un nouveau cône dont la base est à la surface du cristallin et convergent en un point sur la rétine. La myopie est une anomalie de la vision dans laquelle l'image d'un objet éloigné se forme en avant de la rétine. L'hypermétropie est une anomalie de la vision dans laquelle l'image d'un objet éloigné se forme en arrière de la rétine. Dans un commentaire, Kepler indique que la partie postérieure du cristallin est de forme hyperbolique. Cette forme lui semble préférable à la forme sphérique car la forme hyperbolique diminue les aberrations.

L'illustration suivante est inspirée du modèle de la focalisation des images en diverses parties de la rétine imaginée par Kepler.

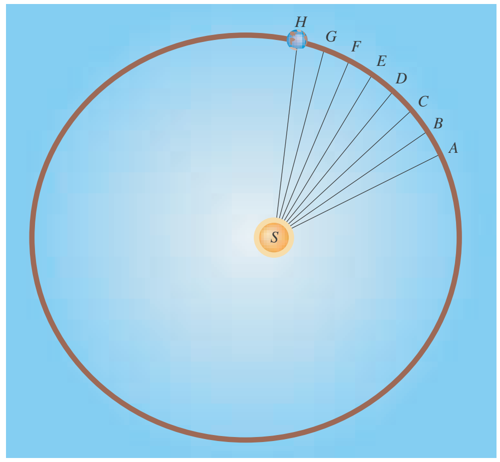


Kepler a consacré une année entière à l'étude de l'optique et à la rédaction de son ouvrage *Optica*. Une conséquence importante de cette étude est que Kepler a constaté que le cercle et la sphère ne sont pas nécessairement les figures géométriques les plus aptes à décrire les phénomènes physiques. Le recours au cercle et à la sphère, figures « parfaites » de la philosophie aristotélicienne, avait été érigé en dogme dans l'étude de la nature, mais les lentilles sphériques présentent une aberration que les lentilles hyperboliques n'ont pas...

LA LOI DES AIRES

Après ses travaux en optique, Kepler retourne à l'étude de l'orbite de Mars. Son premier souci est d'affiner la mesure de l'orbitre terrestre. Toutes les observations sont faites de la Terre et une imprécision sur la position de celle-ci se répercute sur l'ensemble des mesures et calculs.

La première constation de Kepler dans son étude de l'orbite terrestre est que la Terre ne se déplace pas à une vitesse constante. Son mouvement est plus rapide lorsqu'elle est plus proche du Soleil. Déjà dans le *Mysterium cosmographicum*, il avait constaté cette particularité pour les autres planètes et il avait avancé l'hypothèse que la force qui déplace les planètes est située dans le Soleil et est inversement proportionnelle à la distance. Il lui fallait maintenant retenir cette hypothèse pour la Terre. Illustrons son raisonnement en considérant que la Terre se déplace du point A au point H. Kepler divise alors l'arc AH en arcs de même longueur $AB, BC, \ldots, GH$.



En notant t_{AB} le temps nécessaire pour parcourir un arc AB, la vitesse v_{AB} est égale à la longueur de l'arc AB divisée par t_{AB} : $v_{AB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{t_{AB}}$. En supposant que la vitesse v_{AB} est inversement proportionnelle à la longueur du côté AS du secteur circulaire ASB, on obtient :

$$v_{AB} = \frac{k}{\overline{AS}}$$

où k est la constante de proportionnalité. Le temps de parcours pour aller de A à H est alors :

$$\begin{aligned} t_{AH} &= t_{AB} + t_{BC} + t_{CD} + \cdots + t_{GH} \\ &= \frac{\overset{\frown}{AB}}{v_{AB}} + \frac{\overset{\frown}{BC}}{v_{BC}} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{v_{CD}} + \cdots + \frac{\overset{\frown}{GH}}{v_{GH}} \end{aligned}$$

Puisque $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}= \ldots =\overset{\frown}{GH}$, on obtient :

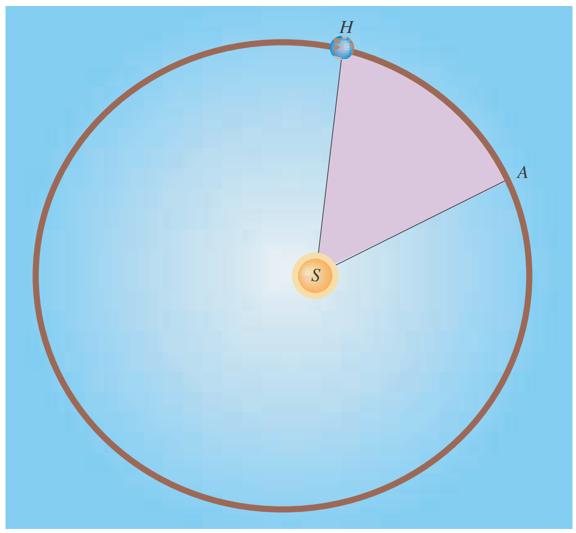
$$\begin{aligned} t_{AH} &= \frac{\overset{\frown}{AB}}{v_{AB}} + \frac{\overset{\frown}{AB}}{v_{BC}} + \frac{\overset{\frown}{AB}}{v_{CD}} + \cdots + \frac{\overset{\frown}{AB}}{v_{GH}} \\ &= \overset{\frown}{AB}\left(\frac{1}{v_{AB}} + \frac{1}{v_{BC}} + \frac{1}{v_{CD}} + \cdots + \frac{1}{v_{GH}}\right) \end{aligned}$$

L'hypothèse de la proportionnalité inverse de la distance donne alors :

$$\begin{aligned} t_{AH} &= \overset{\frown}{AB}\left(\frac{1}{k/\overline{AS}} + \frac{1}{k/\overline{BS}} + \frac{1}{k/\overline{CS}} + \cdots + \frac{1}{k/\overline{GS}}\right) \\ &= \overset{\frown}{AB}\left(\frac{\overline{AS}}{k} + \frac{\overline{BS}}{k} + \frac{\overline{CS}}{k} + \cdots + \frac{\overline{GS}}{k}\right) \\ &= \frac{\overset{\frown}{AB}}{k}\left(\overline{AS} + \overline{BS} + \overline{CS} + \cdots + \overline{GS}\right) \end{aligned}$$

Cela permet de conclure que le temps nécessaire pour que la Terre parcoure l'arc AH est proportionnel à la somme des rayons compris dans la portion d'orbite AG. On peut augmenter le nombre de subdivisions de l'arc AH, le résultat sera toujours le même. Le temps de parcours d'une portion de l'orbite est proportionnel à la somme des rayons dans cette portion d'orbite, en excluant le dernier rayon.

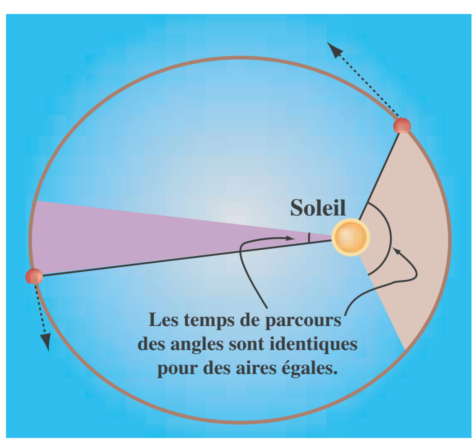
Pour simplifier le calcul de la position de la Terre en un instant futur, Kepler s'inspire de la méthode d'exhaustion utilisée par Archimède pour l'aire d'un cercle. Il considère alors la division de la portion d'orbite en un nombre infini de secteurs et remplace la somme infinie de toutes les distances obtenues par l'aire située entre la portion d'orbite considérée et les deux rayons reliant les extrémités de cette portion d'orbite au Soleil.



Ce résultat, appelé « loi des aires » ou « deuxième loi de Kepler », a en fait été obtenu avant la première loi. Elle s'applique à toutes les planètes et dans sa formulation générale s'énonce comme suit :

Deuxième loi

La droite joignant une planète au Soleil balaie des aires égales en des temps égaux.



L'ORBITE ELLIPTIQUE DE MARS

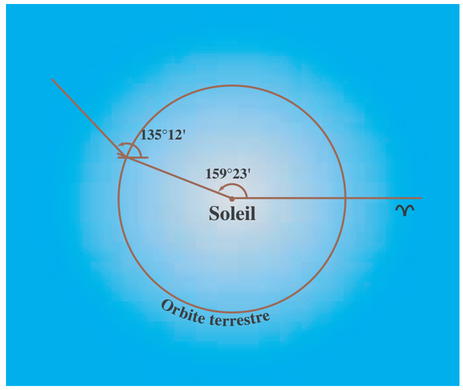
Les observations de la planète Mars héritées de Tycho Brahe ont été particulièrement utiles à Kepler pour déterminer la trajectoire elliptique de Mars. À partir de ces observations, Kepler constata qu'il fallait abandonner le postulat aristotélicien des mouvements circulaires uniformes. Illustrons la démarche qui l'a amené à cette conclusion.

Puisque l'année martienne dure 687 jours, si on considère une position particulière de Mars sur son orbite, la planète occupe la même position 687 jours plus tard. Durant cet intervalle de temps, la position de la Terre a changé. Si en chacun de ces instants on mesure la position de Mars et la position du Soleil par rapport à la Terre, il est possible de déterminer un point de l'orbite de Mars. Il n'est cependant pas facile d'obtenir des mesures aussi espacées dans le temps. Dans l'ensemble des observations de Tycho Brahe, Kepler ne peut compter que sur dix mesures pour mener à bien cette étude. Cela est insuffisant pour obtenir une description point par point de l'orbite car avec ces dix observations il peut obtenir seulement cinq points. Nous allons illustrer comment il obtint ces points en considérant les données du tableau suivant, dans lequel les données sont groupées par intervalles de 687 jours, l'année martienne.

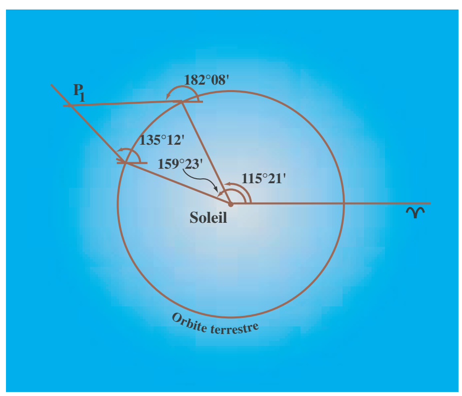
OBSERVATIONS DE MARS PAR TYCHO BRAHE

Date de l'observation	Terre Longitude héliocentrique	Mars Longitude géocentrique
17 février 1585	159°23'	135°12'
5 janvier 1587	115°21'	182°08'
19 septembre 1591	5°47'	284°18'
6 août 1593	323°26'	346°56'
7 décembre 1593	85°23'	3°04'
25 octobre 1595	41°42'	49°42'
28 mars 1587	196°50'	168°12'
12 février 1589	153°42'	218°48'
10 mars 1585	179°41'	131°48'
26 janvier 1587	136°06'	184°42'

La longitude héliocentrique de la Terre est l'angle entre la direction du point vernal (équinoxe de printemps) et la Terre avec le Soleil comme sommet. La longitude géocentrique de Mars est l'angle entre le Soleil et Mars avec la Terre comme sommet. Considérons le Soleil au centre de l'orbite terrestre et prenons le point vernal comme la direction 0°. Traçons ensuite un cercle centré au Soleil pour représenter l'orbite terrestre autour du Soleil. En reportant la longitude héliocentrique de 159°23' de la Terre, le 17 février 1585, on détermine la position de la Terre par rapport au Soleil sur cette circonférence. Puis, à partir de cette position, on peut tracer la droite donnant la direction de la planète Mars puisque sa longitude par rapport à la Terre est alors de 135˚12'.



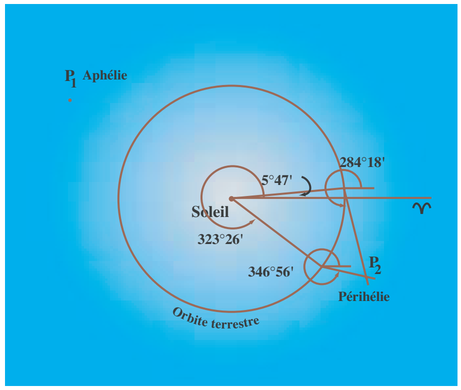
En procédant de la même façon pour les données du 5 janvier 1587, soit 115˚21' pour la longitude héliocentrique de la Terre et 182˚08' pour la longitude géocentrique de Mars, on obtient la direction de Mars à cette date.



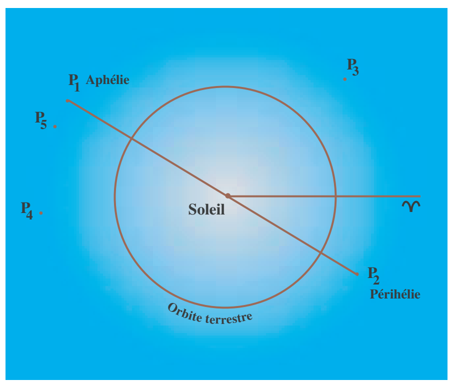
Le point de rencontre des directions de Mars du 17 février 1585 et du 5 janvier 1587 donne alors un premier point P_1 de l'orbite de la planète.

En procédant de la même façon pour les données du 19 septembre 1591, et celles du 6 août 1593, on peut déterminer un deuxième point P_2 de l'orbite de Mars. Ces deux points sont ceux choisis par Kepler pour l'aphélie[1] et le périhélie[2] de Mars.

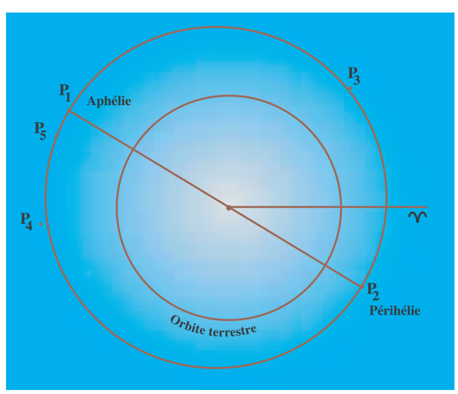
[1] Aphélie : point de l'orbite d'une planète qui est le plus éloigné du Soleil.
[2] Périhélie : point de l'orbite qui est le plus rapproché du Soleil.



En procédant de la même façon pour les autres données, on obtient cinq points de l'orbite de Mars. Le segment de droite joignant le périhélie et l'aphélie de Mars devrait être le diamètre de l'orbite de Mars si celle-ci est bien circulaire.



On peut alors déterminer le point milieu de ce diamètre et tracer le cercle passant par l'aphélie et le périhélie. Mais, ce cercle ne passe pas par tous les points de l'orbite.

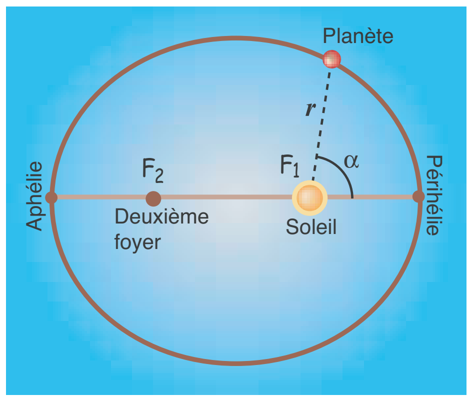


Puisque par trois points passe un et un seul cercle, on peut choisir trois des points et tracer le cercle qu'ils déterminent. Aucun des dix cercles ainsi tracés ne passe par les cinq points de l'orbite.

L'orbite est-elle bien circulaire ? Pour la décrire, Kepler a fait plusieurs tentatives allant jusqu'à considérer un épicycle tournant à une vitesse variable sur son déférent. Il a aussi considéré l'ellipse mais, pour confirmer cette hypothèse, il fallait déterminer les paramètres de celle-ci. Après beaucoup de tentatives et de calculs, il obtient la relation suivante :

$$r(\alpha) = p/(1 + e\cos\alpha)$$

où α est l'angle entre le périhélie et la planète et dont le sommet est le Soleil ; e, l'excentricité[3] ; r, la distance du Soleil à la planète ; p, une constante.



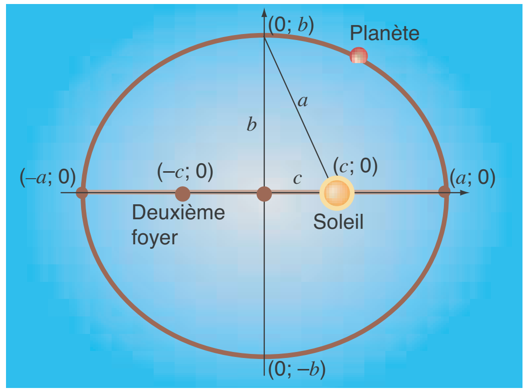
Ce résultat de Kepler est très impressionnant, car la notion moderne de fonction n'était pas encore définie et la géométrie analytique n'était pas encore inventée. Il a cependant obtenu une équation qui est l'expression moderne d'une conique en coordonnées polaires.

On peut interpréter le résultat obtenu par Kepler en considérant l'équation d'une ellipse en coordonnées rectangulaires dans un système d'axes cartésien. Une telle équation est de la forme :

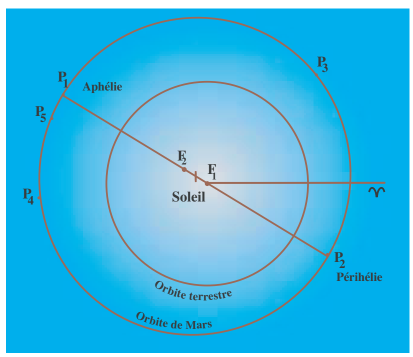
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

où a est la demi-longueur du grand axe, b la demi-longueur du petit axe. De plus, $a^2 = b^2 + c^2$, où c est la demi-distance entre les foyers et l'excentricité $e = c/a$.

[3] Dans le système de Ptolémée, l'*excentricité d'une orbite* indiquait que le centre de celle-ci se situait à une certaine distance de la Terre. Dans le système de Coperic, l'*excentricité* indiquait que le centre se situait à une certaine distance du Soleil. Depuis les travaux de Kepler, l'excentricité e est le paramètre qui caractérise les coniques : $e = 0$, circonférence ; $0 < e < 1$, ellipse ; $e = 1$, parabole ; $e > 1$, hyperbole.

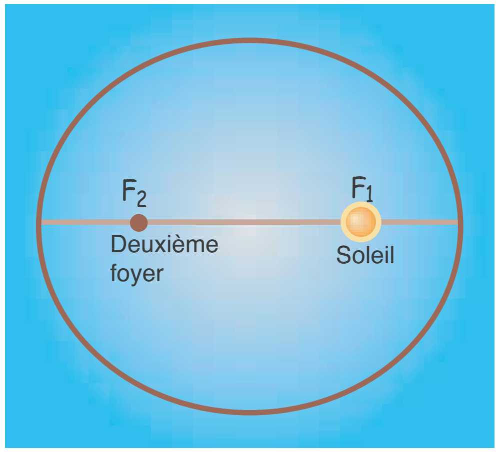


En considérant le segment joignant le périhélie et l'aphélie comme axe focal, le Soleil occupe l'un des foyers de l'ellipse, le second foyer est à égale distance de l'autre côté du centre. On peut alors tracer une ellipse dont le paramètre a est la demi-distance entre le périhélie et l'aphélie. C'est également la distance moyenne de la planète au Soleil.

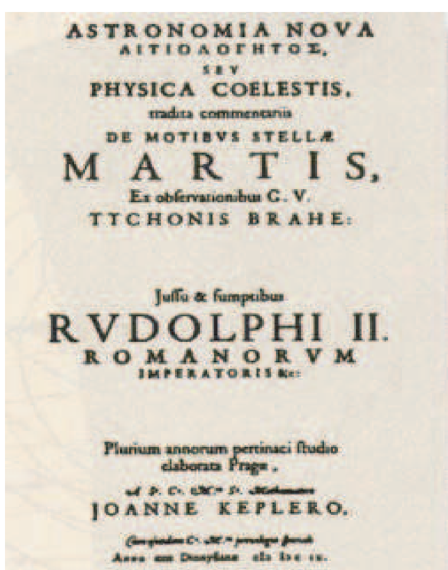


L'ellipse dont l'axe focal est le segment joignant le périhélie et l'aphélie est une meilleure représentation, un meilleur modèle des points de l'orbite de la planète Mars que n'importe quel cercle et agencement d'épicycle et de déférent. Kepler a enfin sa première loi.

> *Première loi*
>
> *Chaque planète décrit une ellipse dont un des foyers est occupé par le Soleil.*



Signalons toutefois que Kepler n'a pas procédé par une analyse graphique des données comme nous l'avons fait. C'est par des calculs échelonnés sur plusieurs années que Kepler est parvenu à montrer que les orbites des planètes étaient elliptiques. On considère aujourd'hui que c'est un heureux hasard qu'il se soit attaqué d'abord à l'orbite de Mars, car, parmi les planètes observées par Tycho Brahe, c'est celle dont la trajectoire elliptique présente la plus grande excentricité. L'excentricité de la Terre est de 0,016, celle de Mars de 0,093. S'il avait commencé son étude par la terre, les différences entre les valeurs observées et le modèle circulaire n'auraient probablement pas été assez significatives et auraient pu être attribuées à des erreurs de mesure. Signalons également que la précision et la quantité des observations de Tycho Brahe ont été des facteurs déterminants. Si Kepler n'avait pu situer que trois points de l'orbite, le modèle circulaire aurait été retenu puisque par trois points on peut faire passer un et un seul cercle. Il a communiqué les résultats de ses travaux sur l'orbite de Mars dans un ouvrage dédié à Rodolphe II. La page titre de cet ouvrage indique que les calculs sont basés sur les observations de Tycho Brahe.


ASTRONOMIA NOVA
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ,
SEV
PHYSICA COELESTIS,
tradita commentariis
DE MOTIBVS STELLÆ
MARTIS,
Ex observationibus G. V.
TYCHONIS BRAHE:

Jussu & sumptibus
RVDOLPHI II.
ROMANORVM
IMPERATORIS &c:

Plurium annorum pertinaci studio
elaborata Pragæ,

JOANNE KEPLERO.

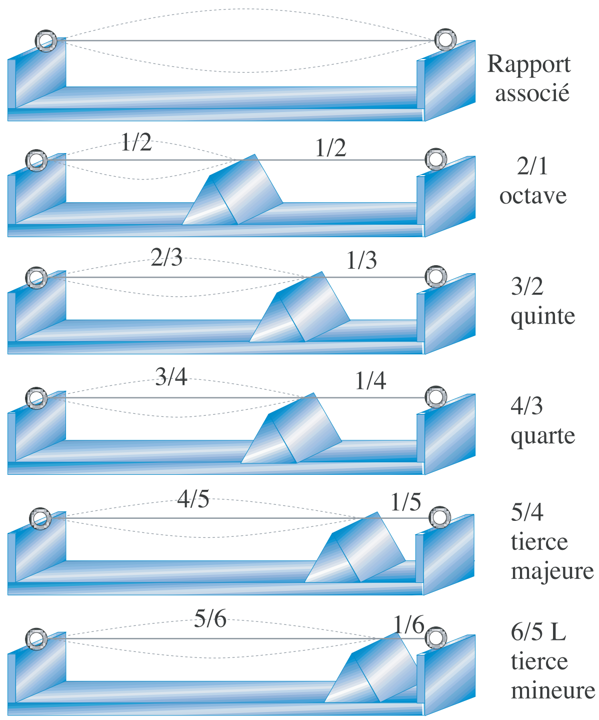
La première loi de Kepler fut confirmée par l'étude de Mercure qui n'avait pas été observée par Brahe. Cette planète semblait suspecte car, pour décrire son orbite, Copernic devait envisager un épicycle ayant une période d'un an. Grâce aux travaux de Kepler, celle-ci devenait une planète tout à fait normale avec une orbite elliptique dont l'excentricité est de 0,2, qui ne peut absolument pas être assimilée à une trajectoire circulaire. La première loi permit à Kepler de prédire un passage de Mercure devant le Soleil pour 1631. Il mourut trop tôt, en 1630, pour pouvoir observer ce passage. Pierre Gassendi a observé le phénomène et constaté que la prévision était précise au dixième de degré.

L'HARMONIE CÉLESTE

Au XVII^{e} siècle, les scientifiques étaient préoccupés par l'« Harmonie » de l'Univers. Cette préoccupation leur venait en partie des convictions religieuses. Dieu avait certainement créé l'univers selon un modèle simple, beau et harmonieux. Leur conviction avait également une autre source, la formation académique qui se composait du trivium regroupant rhétorique, dialectique et grammaire, et du quadrivium regroupant musique, arithmétique, géométrie et astronomie. Dans le quadrivium, l'harmonie se manifestait par les relations entre les sons musicaux et les rapports arithmétiques dont l'étude remonte à Pythagore.

La musique pythagoricienne

Selon la légende, Pythagore, passant devant l'atelier d'un forgeron, aurait été attiré par les différences de tons et aurait eu l'idée de peser les marteaux des forgerons pour expliquer ces différences. Il aurait alors songé à appliquer ces rapports pour l'étude des cordes vibrantes. Les Babyloniens et les Égyptiens avaient déjà étudié les cordes vibrantes. Ils savaient que, pour une tension donnée, la hauteur (donc la fréquence) du son émis par la corde augmente lorsque la longueur en vibration diminue. Les pythagoriciens se sont beaucoup intéressés à ce phénomène en utilisant une simple corde sous tension sur une caisse de résonnance.



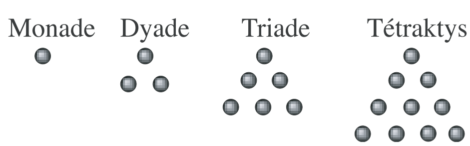
À l'aide d'un chevalet mobile sur une échelle graduée, ils faisaient vibrer une partie de la corde en comparant au son émis par une corde en pleine longueur. Ils pouvaient ainsi « écouter » les différentes proportions. Ils ont exprimé les propriétés des cordes vibrantes en termes de rapports de nombres naturels. Ainsi, si la moitié de la corde vibre, le son émis est une octave plus haut que le son émis par la corde entière. Le rapport de la longueur de la corde entière sur la partie vibrante est alors :

$$\frac{1}{1/2} = \frac{2}{1}$$

Si les deux tiers de la corde vibrent, le son est plus élevé de $1/5$ que le son produit par la vibration de la corde entière. Le rapport de la longueur de la corde entière sur la partie vibrante est alors :

$$\frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$$

Pour eux, les sons harmonieux sont produits par la vibration de cordes dont les longueurs sont des rapports de nombres naturels et, plus le rapport est simple, c'est-à-dire exprimé par les nombres de la Tetraktys, meilleure est la consonance.



Les nombres de la Tétraktys sont 1, 2, 3 et 4. Ainsi, l'*octave*, la *quinte*, la *quarte* étaient considérées comme les sons les plus harmonieux.

Les pythagoriciens ont imaginé que les corps en mouvement dans l'espace émettaient un son inaudible à l'oreille humaine. Plus la planète est éloignée, plus sa vitesse est grande et plus le son est élevé. Pour eux, les distances entre les planètes et les rapports entre leurs vitesses devaient être harmoniquement déterminés. Les sons émis par les planètes s'harmonisaient entre eux. Dans sa recherche de l'Harmonie céleste, Kepler[4] est inspiré par les travaux des pythagoriciens sur la musique.

Kepler a cherché une relation harmonique entre les rayons moyens des orbites des planètes et les vitesses de celles-ci. La loi des aires est une relation « harmonieuse » entre la vitesse d'une planète et sa distance au Soleil. Mais Kepler a voulu établir une relation entre les rayons moyens r_1 et r_2 des orbites de deux planètes et les périodes de révolution T_1 et T_2 de celles-ci. Il a d'abord comparé le rapport des périodes au rapport des rayons moyens[5], soit :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Il a alors constaté que le rapport des rayons moyens était plus petit que le rapport des périodes. Il a ensuite comparé le rapport des périodes au rapport des carrés des rayons moyens, soit :

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

Il a constaté que le rapport des carrés des rayons moyens était plus grand que le rapport des périodes. Il a alors effectué la comparaison suivante :

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2}$$

Dans le tableau suivant, on a quelques-uns des résultats obtenus en comparant les planètes deux à deux par ordre croissant des distances au Soleil.

Planète	Rayon r (UA)	Période T (années)	Rapport des périodes T_i/T_{i+1}	Puissance du rapport des rayons $(r_i/r_{i+1})^{3/2}$
Mercure	0,387	0,241		
Vénus	0,723	0,615	2,55187	2,55353
Terre	1,000	1,000	1,62602	1,62664
Mars	1,524	1,881	1,88100	1,88138
Jupiter	5,203	11,862	6,30622	6,30817
Saturne	9,534	29,456	2,48322	2,48046

Kepler a trouvé ces résultats très satisfaisants, d'autant plus que le rapport 3/2 est la base du système musical pythagoricien.

[4] Mersenne, Galilée, Descartes, Huygens, Newton sont également motivés par la recherche de l'harmonie. Pour eux, découvrir les lois de l'univers, c'est rendre hommage à Dieu.

[5] À l'époque, on ne pouvait calculer un rapport que pour des grandeurs de même nature. Celui-ci n'avait pas d'unité. Pour calculer le rapport de deux grandeurs de nature différente, il faut définir des unités pour ce rapport. Le développement d'unités associées au taux de deux grandeurs de nature différente s'est faite avec le développement du calcul différentiel.

De la relation $\dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{3/2}$, on tire : $\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^3$, d'où $\dfrac{T_1^2}{T_2^2} = \dfrac{r_1^3}{r_2^3}$ et $\dfrac{T_1^2}{r_1^3} = \dfrac{T_2^2}{r_2^3} = k$.

Ce qui donne l'énoncé de la troisième loi de Kepler.

> *Troisième loi*
>
> *Le carré du temps de révolution d'une planète autour de son orbite est proportionnel au cube de la distance moyenne au Soleil.*

En écriture mathématique moderne, cette loi est :

$$T^2 = k\,r^3$$

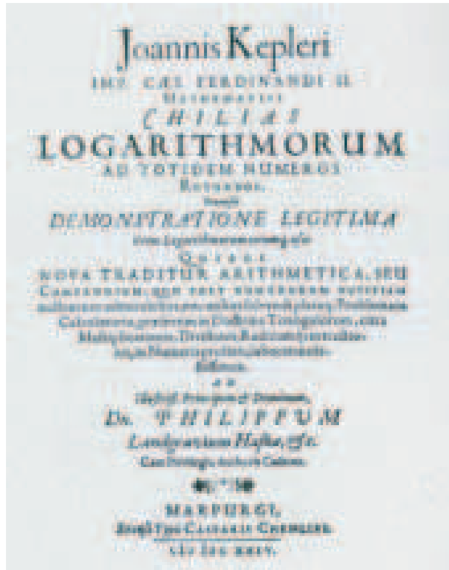
La constante k étant la même pour toutes les planètes. Comme l'illustre le tableau suivant, cette troisième loi établit une relation entre les mouvements de toutes les planètes. L'unité astronomique (UA) est la distance moyenne de la Terre au Soleil et la constante de proportionnalité est 1.

Relation entre les périodes et les distances moyennes

Planète	Rayon r (UA)	Période T (années)	Rapport T^2/r^3
Mercure	0,387	0,241	1,002
Vénus	0,723	0,615	1,001
Terre	1,000	1,000	1,000
Mars	1,524	1,881	1,000
Jupiter	5,203	11,862	0,999
Saturne	9,534	29,456	1,001

Selon Newton, la troisième loi implique que les masses des planètes sont nulles, ce qui n'est pas le cas. La troisième loi n'est vérifiée qu'à 0,1 % près.

Dans ses derniers calculs, Kepler a utilisé les logarithmes inventés par le mathématicien écossais John Napier (1550 - 1617). Cette invention, qui date de 1614, avait pour but d'alléger les calculs des astronomes. Kepler a lui-même publié des tables de logarithmes en 1624. Elles seront rééditées tout au long du XVIIe siècle.


Joannis Kepleri

CHILIAS

LOGARITHMORUM

DEMONSTRATIONE LEGITIMA

NOVA TRADITUR ARITHMETICA, SEU

Dn. PHILIPPUM

MARPURGI,

En 1612, Kepler a perdu sa femme et un de ses fils. Il a alors quitté Prague pour devenir professeur dans un petit collège de Linz. En 1628, il se mit au service du Duc de Wallenstein à Sagan. Il est mort le 2 novembre 1630, à Ragensburg (Ratisbonne), où il était allé pour réclamer le règlement de ses arriérés de salaire.

CONCLUSION

En utilisant les observations de Tycho Brahe, Kepler a poursuivi ses travaux sur l'orbite des planètes et a énoncé les trois lois des mouvements planétaires qui portent son nom. Les deux premières lois furent publiées en 1609 et la troisième en 1619. Ces loi constituaient un changement important. Avant l'énoncé de celles-ci, on considérait que les planètes se déplaçaient sur des cercles à une vitesse constante. Les trajectoires devenaient elliptiques et les vitesses variables.

Il restait un premier problème important :

> *Quelle force maintient les planètes sur leur orbite autour du Soleil* ?

Kepler, inspiré par les expériences sur le magnétisme de l'anglais William Gilbert (1554 - 1603), qui avait comparé la Terre à un aimant, suppose que le Soleil émet un magnétisme qui garde les planètes sur leur orbite. Il n'échafaudera cependant pas de théorie sur cette vague idée.

Un deuxième problème important n'obtenait pas réponse dans les lois de Kepler.

> *Comment expliquer la chute des corps dans une telle représentation de l'Univers* ?

L'idée du mouvement de la Terre entrait toujours en contradiction avec la théorie de la chute des corps d'Aristote. Cette objection était devenue incontournable pour les astronomes du XVII^{e} siècle. C'est Galilée, par son étude du mouvement, qui apportera les premiers éléments de réponse à la deuxième question. Les travaux de Newton apporteront des compléments de réponses à toutes ces questions.

Kepler était un très bon mathématicien. Ses travaux sur les mouvements planétaires l'ont amené à s'intéresser au calcul d'aires. D'autres questions relatives au calcul de volumes ont également occupé ses pensées. Il a réalisé des travaux importants en optique. Il est le premier à avoir affirmé que la vision était produite par une image formée sur la rétine. Il a expliqué la myopie, la presbytie et l'optique des lunettes. Il a fondé l'optique géométrique en faisant l'étude des lentilles et des télescopes. Il a étudié les lois de la réfraction pour améliorer les mesures astronomiques. En étudiant les lentilles provenant de sections coniques, il a décidé de nommer *foyers* les points où convergent tous les rayons émis par un autre *foyer*.

Lorsqu'il se hasardait à expliquer les causes des phénomènes physiques, Kepler tombait facilement dans le mysticisme et ce travers a nui à la reconnaissance de ses travaux. Cependant, par ses travaux, il a montré que les mathématiques sont indispensables dans la construction de la connaissance scientifique.

La démarche de Kepler a été de voir si les modèles échafaudés par les mathématiciens pouvaient servir à décrire les mouvements planétaires. Le premier modèle n'étant pas conforme à la réalité ; il en a cherché un autre. Les orbites circulaires ont également été mises de côté, car elles ne rendaient pas compte des observations. Entre le modèle préconçu et les observations, il a choisi les observations et cherché un autre modèle. Ce faisant, il a délaissé l'approche spéculative des anciens pour contribuer au développement de l'approche expérimentale. Pour rendre compte efficacement de la réalité, on doit juger la validité du modèle en tenant compte des observations.

C'est une démarche efficace de comparer les observations et les mesures des variables d'un phénomène physique à des modèles mathématiques connus et de retenir celui qui décrit le plus adéquatement le lien entre les variables. Les mathématiciens ont développé plusieurs formes générales de modèles à l'aide desquels on peut décrire beaucoup de phénomènes selon les valeurs assignées aux paramètres de ces modèles.

BIBLIOGRAPHIE

Astronomy Before the Telescope, Édité par Christopher Walker, The trustees of the British Museum St.Martin Press, New-York.

Ball, W. W. R. *A Short Account of History of Mathematics*, New York, Dover Publications Inc.,1960, 522 p.

Boyer, Carl B. *A History of Mathematics*, New York, John Wiley & Sons, 1968, 717 p.

Collette, Jean-Paul. *Histoire des mathématiques*, Montréal, Éditions du Renouveau Pédagogique Inc., 1979 2 vol., 587 p.

Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*, New-York, Holt Rinehart and Winston, 1976, 588 p.

Ferguson, Kitty *Tycho & Kepler, the unlikely partnership that forever changed our understanding of the heavens*, New-York, Walker and company, 2002, 402 p.

Les génies de la science, Pour la science, Kepler, Le musicien du ciel, Trimestriel août 2001 novembre 2001.

Les cahiers de Science et Vie, Les pères fondateurs de la science, Kepler, hors série n° 21, juin 1994.

Les cahiers de Science et Vie, Révolutions scientifiques, Nicolas Copernic, hors série n° 39, juin 1997.

Vollmann, William T *Uncentering the Earth, Copernicus and the Revolutions of the Heavenly Spheres*, New York, W.W. Norton & company, Atlas books, 2006, 295 p.

Association Mathématique du Québec

Lu pour vous

Robert Bilinski
Collège Montmorency

Sous la présente rubrique, vous trouverez une brochette intéressante et variée de livres : un livre d'histoire des mathématiques en France, un livre sur l'avenir des mathématiques en biologie, un autre rempli d'activités mathématiques pour les tout-petits, un quatrième sur l'ouverture d'un esprit critique chez les grands, pour aborder un recueil tous azimuts des mathématiques, ensuite une biographie de Gauss pour finir avec un livre de vulgarisation sur le chaos.

Marcel Berger, *Cinq siècles de mathématiques en France*, ADPF, 2005, 288 p., ISBN 2-91493538-2, environ 25 $.

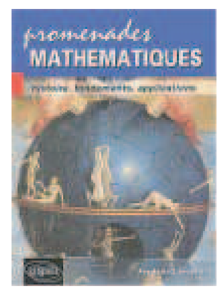
Le hasard, si cher à mes études, me suit au gré de mes recherches de livres pour mes chroniques. L'éditeur ADPF est une branche du ministère des Affaires Étrangères de la France qui a pour but d'augmenter la visibilité de la France à l'étranger. Ironiquement, je n'avais jamais entendu parler de cet éditeur, qui aurait intérêt à être mieux connu, car je vais vendre la mèche avant la fin en disant que j'ai beaucoup aimé ce livre. Ce livre s'intitule comme il s'intitule, c'est un choix. Mais il aurait pu aussi bien s'appeler *Cinq siècles de mathématiques*, tellement la France a eu une influence sur les mathématiques étudiées aujourd'hui.

En fermant ce livre pour la dernière fois, la première idée qui m'est venu après le « wow ! » initial, c'était : « Il me manquait cela pour avoir une vision d'ensemble de mes études ! ». Naturellement, j'ai eu d'autres réflexions en lisant le livre. Tout au long de la lecture, j'ai été frappé par l'immense culture de l'auteur. J'ai souvent eu l'impression que les anecdotes étaient « de première main » ou encore vivantes « dans les couloirs » des universités françaises. Je ne suis pas en train de dire que le livre est un ramassis de potins et de ragots, mais c'est un aspect plaisant du livre que de voir l'humanité qu'il y a en nous tous, même les plus grands.

Le niveau mathématique de ce livre est quand même élevé, compte tenu des mathématiciens présentés et des mathématiques qui ont été faites dans les cinq derniers siècles en France. Mais ce qui compte le plus, ce n'est pas le concept présenté, mais beaucoup l'homme et comment celui-ci s'insère dans la continuité et la discontinuité de la famille mathématique française. Le livre est abondamment illustré de photos, de graphiques et même d'équations, mais on n'entre pas dans le détail mathématique. Un coup de maître de l'auteur est qu'il réussit à éviter que le livre ne soit qu'un inventaire, une longue liste des mathématiciens français, bien que fondamentalement c'en soit une.

En conclusion, j'ai beaucoup aimé lire ce livre. Je crois qu'il devrait être lu par des aspirants mathématiciens, même s'ils sont au cégep ; ça leur permettra de s'insérer dans le continuum des mathématiciens. Déjà au cégep, les noms soulevés dans ce livre évoqueront des souvenirs (D'Alembert, Cauchy...). Par contre, ils garderont un bout de mystère. Mais pour un bachelier, ce livre comblera bien des trous et donnera une vision d'ensemble à une présentation très thématique et morcelée des mathématiques vues dans les cours. Bonne lecture !

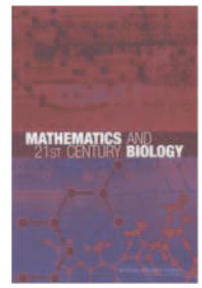
Frédéric Laroche, *Promenades mathématiques,*
Ellipse, 2003, 452 p., ISBN 2-72981417-5, environ 45 $.



« Promenades mathématiques » est un recueil couvrant un large spectre des mathématiques, allant de la géométrie euclidienne à la géométrie projective en passant par la géométrie fractale, sans oublier la théorie des groupes, les séries et les statistiques. Un autre titre aurait pu être « Encyclopédie personnelle des mathématiques appliquées », mais le livre ne couvre pas assez le tout des mathématiques pour vouloir y prétendre.

Ce livre me hante ! J'ai ce livre depuis quelques temps et j'essaie de le lire d'un bout à l'autre avant d'en faire une recension depuis ce temps-là. Je n'y arrive pas. Je le trouve fascinant et bien écrit, mais il est gros. Il parle de tout et de rien. Mais même en parlant de rien, il est intéressant. Pour donner une idée, il est constitué de 13 sections avec plusieurs chapitres par section. Le texte est formaté sur 2 colonnes par page pour laisser moins d'espace vide par page. Par contre, le texte lui-même n'est pas si dense. Il est succinct assurément, mais lisible. Par contre, en lisant l'avant-propos, on comprend que toutes ces « propriétés » du livre sont voulues. En effet, il écrit à la page 9 : « Le livre est certainement difficile à lire de manière linéaire : il vaut probablement mieux prendre un thème après l'autre en utilisant les ressources fournies : ... J'espère fournir ainsi à tous ceux concernés par les mathématiques un outil de base qui leur servira pendant de nombreuses années. »

Ce livre est abondamment illustré par des figures, mais aussi par des exemples riches et non triviaux de la vraie vie (ingénierie, sciences, technologie...) ou pas de la vraie vie (basket, roches qui tombent d'un immeuble...). Ce livre est un nouveau genre de manuel de référence, ni formulaire, ni dictionnaire, ni encyclopédie, ni recueil d'exercices, ni livre d'histoire, pourtant il regroupe des qualités de chacun. Je prévois le consulter souvent à l'avenir et je vous invite tous à y jeter un coup d'oeil. Bonne lecture !



National Research Council, *Mathematics and 21st Century Biology,* National Academies Press, 2005, 150 p., ISBN 0-309-09584-0, environ 39 $.

C'est fou ce que l'on peut trouver en fouillant dans des catalogues, surtout sur un site comme amazon.ca. Ça va vraiment des livres les plus sérieux aux plus quétaines. Je m'attendais au premier genre avec ce titre-ci et je n'ai pas été déçu. Écrit par des sommités de l'Académie des Sciences des États-Unis, ce livre fait en même temps le point sur l'état actuel des connaissances en mathématiques utiles à la fine pointe de la biologie d'aujourd'hui et énonce clairement les directions les plus utiles que devrait prendre la recherche mathématique pour assouvir les besoins de la communauté biologique.

Le préambule du livre énonce clairement la mission du livre. En paraphrasant l'idée principale, elle se lit comme suit : « Bien que faire des mathématiques dans le but de faire des mathématiques est désirable et louable, notre groupe de réflexion avait pour mandat d'identifier les mathématiques utiles à l'avancement de la biologie du 21^{e} siècle. Celles que nous voulons doivent être assujetties à l'impératif biologique et être fonctionnelle biologiquement parlant. »

Les auteurs identifient alors les grandes branches de la biologie et à tour de rôle, au fils des chapitres, décrivent l'état actuel des outils mathématiques et les directions désirables qu'elles devraient prendre. En chemin, ils discutent des difficultés rencontrées et amènent aussi une perspective historique en faisant un survol des divers outils développés dans chaque branche des mathématiques pour étudier les phénomènes sous-jacents.

Le terrain couvert en 8 chapitres et 150 pages est impressionnant. Ce livre est dense, mais très lisible. Par contre, ce n'est pas un livre scolaire de mathématiques. Il ne contient aucune formule ou théorème, encore moins des exemples concrets ou des exercices. En contrepartie, on y retrouve quelques diagrammes biologiques. Les pages du livre regorgent de discussions sur l'utilité et l'utilisation des mathématiques. La bibliographie à la fin de chaque chapitre est abondante et on y retrouve même un chercheur du CRM, le professeur David Sankoff, dont les travaux sont cités au chapitre 3. En prenant tous ces éléments, on peut donc dire que ce livre s'apparente à une revue exhaustive de la littérature scientifique sur l'interface mathématique/biologie.

Chaque chapitre a son thème propre, souvent une branche de recherche en biologie. On dénombre huit thèmes qui, traduits en français, donnent : « La nature du domaine », « Quelques succès historiques », « Comprendre les molécules », « Comprendre les cellules », « Comprendre les organismes », « Comprendre les populations », « Comprendre les écosystèmes et les communautés » et « Thèmes prévalents ». Dans le dernier chapitre, on aborde les mathématiques qui sont communes à plusieurs des branches de la biologie comme « Petit n, grand p ».

Avec l'intérêt que j'ai pour la biologie moléculaire et surtout pour les outils mathématiques utilisés dans ces branches de la science, ce livre était une lecture naturelle et instructive pour moi. Ce livre devrait être lu par les étudiants s'embarquant dans un doctorat en biologie mathématique, et les professeurs les dirigeant. Mais je crois aussi qu'il pourrait être intéressant pour des professeurs enseignant au cégep en sciences vu la quantité d'étudiants intéressés par la biologie ces temps-ci. Avec le niveau de la discussion, il peut rebuter certains lecteurs, mais la lecture dépend de ce que l'on veut y lire ; et ce livre peut apporter beaucoup d'information. Bonne lecture !

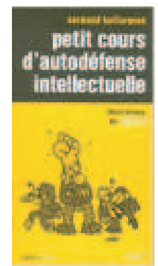
L. Baron, *Du vécu au jeu mathématique, Collection « Les guides Magnard »*,
Magnard, 1997, 240 p.,
ISBN 2-21071971-2, environ 30 \$.

Ayant des enfants en bas âge, je m'intéresse de plus en plus aux mathématiques « destinées aux jeunes ». Ainsi, depuis que l'APAME est devenue un groupe d'intérêt de l'AMQ et depuis la recension en décembre 2004 du livre « Éric Abaque, le roi du boulier compteur », j'ai eu dans l'idée d'inclure des livres destinés au préscolaire ou à l'élémentaire dans mes chroniques. J'ai « lu » ce livre il y a plus d'un an de cela, mais j'inclus la recension seulement maintenant, car je voulais « m'en servir » avant.

Ce livre est organisé en 26 chapitres. Chaque chapitre est en fait la description détaillée d'une activité d'initiation aux mathématiques par le bricolage, soit dans une phase « préécriture » du développement des enfants. Déjà un bémol survient au niveau de la présentation, le contenu est très « tassé » et densément réparti sur la page. Par contre, le contenu lui-même, soit l'activité, est très intéressant. J'ai pu « m'en servir » avec mes enfants qui ont beaucoup apprécié plusieurs des jeux. Je dirais que le fait d'être mathématicien m'a aidé à en tirer le plus grand profit, vu des explications ambivalentes des fois. Je pouvais donc dégager ce que je considérais « la compétence » mathématique à développer dans les contextes de jeu présentés.

Les instructions ne sont pas tout le temps les plus claires, mais les activités ont un intérêt certain pour les jeunes, si je me fie aux réactions de mes enfants.

Ainsi, ce livre intéressera autant les instituteurs au primaire que les éducateurs en CPE ou en garderie et les professeurs dans les facultés d'éducation des universités. En passant au-delà de la présentation condensée du contenu, on peut l'apprécier à sa juste valeur. Il faut le prendre pour ce qu'il est, soit un livre de référence pour s'inspirer dans le but d'amener les enfants à faire un bout de chemin mathématique qui soit ludique. Bonne lecture !



Normand Baillargeon, *Petit cours d'autodéfense intellectuelle,* Lux éditeurs, 2006, 340 p., ISBN 2-89596-006-2, environ 18.75 \$.

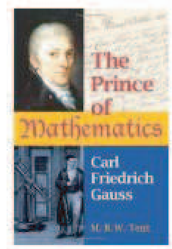
Quand l'auteur de ce livre, Normand Baillargeon, philosophe et anarchiste à l'UQAM, faisait la promotion de ce livre dans les médias lors de sa parution, il ne se gênait pas pour s'exclamer sur les mérites d'une bonne et « solide » éducation en mathématiques. Ce discours rafraîchissant rejoint beaucoup celui que j'entretiens avec mes étudiants, d'autant plus que les mathématiques font partie ici des instruments de critique et d'autodéfense face aux messages, envahissants et souvent manipulés, du monde moderne.

Le livre n'apporte pas de nouvelles réflexions sur la statistique et ses abus que l'on peut trouver dans les discours politiques, les médias et les publicités, pour ne nommer que ces milieux fertiles aux manipulations. Par contre, peu de livres en français ont reçu la mission que ce livre a, soit d'émanciper le lecteur du joug des abus. En effet, la bibliographie de ce livre contient nombre d'œuvres anglophones comme " 200 % of nothing, innumeracy ", ... ce qui illustre d'ailleurs « l'utilité » de ce livre (2 références mathématiques sur 23 sont en français). Ainsi, d'après les dires mêmes de l'auteur, il essaie de remplir un vide dans le monde intellectuel francophone. Mais, compte tenu que les mathématiques n'occupent qu'un chapitre sur cinq, on comprend que le livre est plus dans la filiation de contestataires comme Chomsky (qui est d'ailleurs beaucoup mentionné) que de ces vulgarisateurs mathématiques.

En ayant beaucoup parlé récemment avec des professeurs de philosophie, je me rends compte que le premier chapitre, portant sur la philosophie et les abus du langage et de logique que l'on peut contrer, traite de contenus abordés dans des cours d'introduction à la philosophie au cégep. Peut-être, ce qui le distingue ici, c'est son application exclusive à la démystification des déformations manipulatrices des faux raisonnements. À mon sens, il en va de même pour le second chapitre sur les statistiques et les mathématiques. À la place de voir la bonne manière de faire un graphique, on démasque les erreurs de présentation dans divers graphiques publiés dans des ouvrages militants qui faussent nos impressions et qui constituent des manipulations. Il reste 3 autres chapitres qui traitent respectivement de « l'expérience personnelle », de « la science empirique et expérimentale » et de « les médias ». On devine que le chapitre 4 contient aussi un contenu statistique important, celui-ci portant sur la collecte de données et l'évitement de biais, qu'ils soient d'échantillonnage ou d'analyse.

En somme, j'espère que la visibilité que ce livre a eu dans les médias et la place importante que les mathématiques et les statistiques ont dans ce livre porteront fruit et qu'il nous permette, un jour, en tant que société d'avancer dans le bon sens à la place de nous faire mener par des discours vides de sens. Mais pour qu'il puisse avoir ce rôle, il faudrait que nous l'aidions en faisant prendre conscience aux étudiants (de ceux d'entre nous qui sommes professeurs) de l'importance d'une solide fondation mathématique dans l'analyse, l'interprétation et la critique de l'actualité. Bonne lecture !

M. B. W. Tent, *The Prince of Mathematics : Carl Friedrich Gauss*, A.K. Peters, 2006, 245 p., ISBN 1-56881-261-2, environ 36 $.



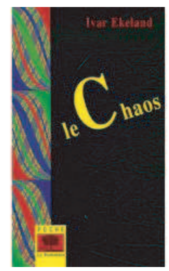
Gauss est une légende. Il est partout. Peut-être pas pour tout le monde, mais certainement pour nous. Par contre, je ne le connaissais pas. Je n'ai jamais été attiré par les biographies et, par conséquent, je n'en ai jamais lu, mais celle-ci m'a attiré pour le respect que je porte à l'œuvre de Gauss. N'ayant pas lu de biographie, les comparaisons me sont difficiles à faire, mais il me semble que ce livre est un bon représentant pour le style.

Naturellement, le livre n'a qu'un sujet, soit Gauss, bien qu'il traite indirectement de la compulsion à faire des mathématiques, ou le perfectionnisme. La biographie est structurée de manière chronologique et non thématique comme elle aurait pu l'être. Ainsi, il faut se méfier des premières pages. Je m'explique. À la place de faire un exposé savant sur l'enfance de Gauss avec des dates et la narration d'une suite de faits, l'auteure romance l'enfance de Gauss. Ainsi, j'ai failli étiqueter ce livre comme un « livre d'enfant », vu la naïveté de l'exposition au début. Par chance, je ne mets pas un livre au rancart si facilement et je cherche à identifier pour mes chroniques le lectorat cible pour un livre. Ainsi, « livre pour enfant » n'est pas une mauvaise chose pour moi.

En fait, on retrouve au début du livre les fameux épisodes de la vie de Gauss comme la somme des 100 premiers entiers, etc., mais on retrouve aussi des moments que l'auteure trouve importants, comme le conflit entre le milieu pauvre et les aspirations intellectuelles de Gauss, et ce, dans le but de nous amener à comprendre ce qui a su protéger et faire fleurir ce génie des mathématiques. D'après le générique, le livre est né d'un travail de recherche exhaustif, mené en Allemagne même, et en a été un de longue haleine. Ainsi, à travers les parties romancées du livre, on apprend une grande quantité d'informations sur le Prince des Mathématiques, « en passant » la vie au quotidien, etc.

Par contre, ce livre se veut grand public et on ne rentre pas dans le détail mathématique de l'œuvre de Gauss.

Pour conclure, ce livre est une « belle lecture du dimanche ». Un livre léger et divertissant qui intéressera tous les lecteurs du bulletin le moindrement intéressés par Gauss. En y pensant, ce livre est peut-être même plus un roman historique qu'une biographie. Peut-être faudra-t-il que j'invente l'expression « roman historico-biographique » ? Il se lit bien et surtout rapidement, mais il instruit aussi au passage. Bonne lecture !



Ivar Ekeland, *Le Chaos,*
Le Pommier, 2006, 149 p., ISBN 2-74650159-7, environ 11 $.

À la session de l'hiver 2006, le Centre de recherches mathématiques (CRM) a organisé plusieurs conférences « grand public », notamment avec Jean-Marie de Koninck, notre président, et avec Ivar Ekeland, l'auteur de ce livre. La conférence a été un grand succès et, à l'image de celle-ci, ce livre aussi mérite d'en avoir. L'auteur, un vulgarisateur reconnu, qui enseigne en français en France et en anglais au Canada, est une de ces vedettes de la vulgarisation mathématique que l'on a vues peu à peu apparaître au fil des années. Le voici de retour.

Ce livre, une réédition augmentée d'un livre de 1995, entre parfaitement dans la tradition des livres du Pommier : Un livre court qui fait le tour d'une question mathématique sans détour et à peu de frais. D'après mes lectures et les souvenirs que j'en ai en ce moment, il me semble que ce livre a une approche originale du chaos. On ne retrouve pas de fractales, pas d'ensemble de Julia, ni de Mandelbrot. On définit le chaos à partir de machines « artistiques », puis on s'en va sur la modélisation du système solaire avec la mécanique newtonienne. Le livre progresse et on entrevoit la différence entre la physique et les mathématiques, on salue π au passage. Il devient à nouveau sérieux avec les systèmes dynamiques en présence de Poincaré et de Kolmogorov... pour aboutir sur un livre infini.

À ce stade, on ne se retrouve qu'à la moitié du livre, et on entame le 3e et dernier chapitre, « Comment construire son petit chaos personnel », qui clôt la première section, « La mécanique du hasard ». Bientôt, on commencera la deuxième partie, « Des machines et des maths », avec ses deux chapitres « Comment calculer des trajectoires instables ? » et finalement « Qu'est-ce que la théorie du chaos ? ». Le contenu du livre paraît-il chaotique ? J'espère que non. D'ailleurs j'espère aussi avoir dévoilé assez du livre pour vous intéresser à le lire. C'est un livre appliqué. Je dirais même un témoignage. Il explique comment un mathématicien ou un physicien rencontre le chaos dans son travail, comment l'étudier et en tenir compte.

Ainsi, ce livre est une lecture un peu plus sérieuse que la biographie de Gauss, mais est de la même trempe : un livre à lire en un après-midi. Qui l'aimera ? Probablement tous ceux d'entre nous qui sommes fascinés par ce chaos qui nous entoure. Si vous êtes comme moi, les discussions mathématiques avec les non-mathématiciens de votre entourage élargi portent souvent sur ce thème qui a su captiver l'imaginaire populaire. Ainsi, il pourrait faire des heureux aux fêtes... Bonne lecture !

À venir :

En français :	Montrez cette mathématique que je ne saurais voir, Qu'est-ce qu'un nombre, Mathématiques pharaonique, Géométrie au XX^{e} siècle, Homo Mathematicus, Quand la science rencontre l'étrange ...
En anglais :	Cambridge dictionary of Statistics, The mathematical companion, Experiencing geometry, 1089 and all that, Geostatistics, How students learn ...

Robert Bilinski
Collège Montmorency
rbilinski@gmail.com

Vous venez de lire un ouvrage qui vous a passionné ? ou qui vous a choqué ? Nous attendons vos commentaires : un bref texte que vous postez à Robert Bilinski, Dép. de maths, 475, boul. de L'avenir, Laval (Québec), H7N 5H9. Vous pouvez aussi utiliser le courrier électronique (rbilinski@cmontmorency.qc.ca).

Association mathématique du Québec
7400 Saint-Laurent, bureau 259
Montréal (Québec) H2R-2Y1
Télécopieur : 514-948-6423

Formulaire d’adhésion à l’AMQ
et abonnement au Bulletin

AMQ 69,00$ ☐

AMQ-GRMS 101,22$ ☐

Étudiant(e)s 35,00$ ☐

Retraité(e)s 50,00$ ☐

Membre institutionnel 200,00$ ☐

Les taxes sont incluses (TPS :R125775858 et TVQ: 1015867341 TQ 0001)

Don au Fonds Maurice-L’Abbé ____________ (avec reçu d’impôt)

Nom: ______________________________
Prénom ______________________________
Adresse : ______________________________
Ville : ______________________________
Province : ______________________________
Code postal : ______________________________
Téléphone : ____________________
Courriel : __________________

Institution : ______________________________
Téléphone : __________________

Mode de paiement :

Chèque ☐ Visa ☐ Master Card ☐
Numéro :________________________________ Date d’expiration :__________
Signature :_______________________________

Date :____________

Merci de l’attention que vous portez à notre association!