
Applications mathématiques à la physique

SERGE ROBERT
CÉGEP SAINT-JEAN-SUR-RICHELIEU

RÉSUMÉ

Je vais présenter quelques problèmes qui sont traités dans le cours *Intégration des apprentissages* en Sciences de la nature, volet mathématique-physique. La plupart des problèmes classiques de la mécanique peuvent être résolus grâce à la seconde loi de Newton sous sa forme vectorielle :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}.$$
 On en extrait alors les équations différentielles qu'on résout selon les techniques vues dans nos cours de mathématique. On peut démontrer certaines formules classiques comme la vitesse d'impact d'un corps en chute libre, $v_I = \sqrt{2gh}$, ou la formule de l'intensité de la force centripète, $F_c = mw^2r$; on peut même démontrer les trois lois de Kepler.

D'autres problèmes reliés à l'optique seront présentés ainsi que deux applications à la cosmologie. Avec une petite démonstration mathématique bien simple on verra que la loi de Hubble est probablement fautive. De plus, un graphique en quatre dimensions de l'hyper-sphère nous donnera une explication possible de l'expansion de l'Univers.

Les exemples de problèmes qu'on verra sont extraits du cours *Intégration des apprentissages* ; c'est un cours de trois périodes par semaine, obligatoire pour tous les élèves du programme Sciences de la nature, soit dans le volet biologie-chimie, soit dans le volet mathématique-physique.

Les problèmes traités sont tous des problèmes de physique mais vus selon le point de vue d'un mathématicien ; le traitement mathématique aura alors une plus grande importance que dans les cours de physique et, contrairement à la coutume en physique, nous ferons la démonstration des formules.

Les notions utilisées sont celles vues dans les trois cours obligatoires du programme : dérivées, vecteurs, intégrales et équations différentielles d'ordre un à variables séparées. Les problèmes traités seront les suivants :

- problèmes de mécanique classique ;
- problèmes reliés à l'optique ;
- problèmes reliés à la cosmologie.

PROBLÈMES DE MÉCANIQUE CLASSIQUE

LA SECONDE LOI DE NEWTON REVISITÉE

La seconde loi de Newton, la plus connue des trois, s'écrit $F = ma$, mais comme une force a une intensité et une direction, c'est un vecteur. Il faudrait donc écrire F avec une flèche. Et il en est de même pour l'accélération. De plus, il s'agit de la somme vectorielle des forces qui s'appliquent sur l'objet. Nous en arrivons donc à l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}.$$

Mais qu'est le vecteur accélération ?

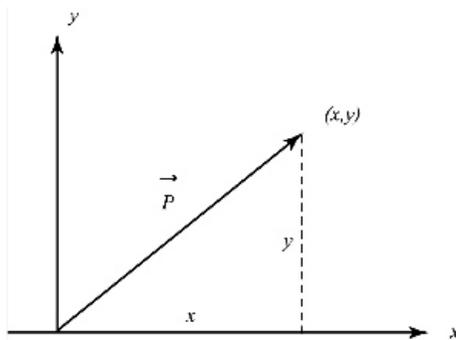


Figure 1

$$\begin{aligned} \vec{P}(t) &= x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} \\ \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{P}}{dt} = x'(t) \cdot \vec{i} + y'(t) \cdot \vec{j} \\ \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}}{dt} = x''(t) \cdot \vec{i} + y''(t) \cdot \vec{j}. \end{aligned}$$

La seconde loi de Newton devient donc :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = mx''(t) \cdot \vec{i} + my''(t) \cdot \vec{j}.$$

Problème no. 1 : La chute libre (sans résistance de l'air)

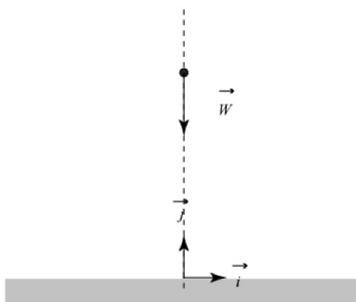


Figure 2

La seule force en présence, si on néglige la résistance de l'air est le poids de l'objet :

$$\vec{W} = -mg \cdot \vec{j}.$$

En appliquant la seconde loi de Newton, on aura :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$$

$$-mg \cdot \vec{j} = mx''(t) \cdot \vec{i} + my''(t) \cdot \vec{j}.$$

On obtient donc deux équations différentielles d'ordre 2 :

$$(1) \quad m \cdot x''(t) = 0$$

$$(2) \quad m \cdot y''(t) = -m \cdot g.$$

On voit que le mouvement ne dépend pas de la masse de l'objet :

$$(1) \quad x''(t) = 0$$

$$(2) \quad y''(t) = -g.$$

Intégrons deux fois par rapport au temps :

$$\int x''(t) dt = \int 0 dt$$

$$x'(t) = k_1$$

$$\int x'(t) dt = \int k_1 dt$$

$$x(t) = k_1 \cdot t + k_2.$$

Faisons la même chose avec y :

$$\int y''(t) dt = \int -g dt$$

$$y'(t) = -g \cdot t + k_3$$

$$\int y'(t) dt = \int (-g \cdot t + k_3) dt$$

$$y(t) = -g \cdot \frac{t^2}{2} + k_3 \cdot t + k_4.$$

Nous avons donc l'équation du mouvement :

$$x(t) = k_1 \cdot t + k_2 \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + k_3 \cdot t + k_4.$$

Les conditions initiales du problème vont déterminer la valeur des constantes.

1) La position initiale de l'objet est le point $(0; h)$:

$$x(0) = 0 \Rightarrow k_2 = 0$$

$$y(0) = h \Rightarrow k_4 = h.$$

2) Supposons que la vitesse initiale de l'objet soit dirigée vers le bas :

$$\vec{v}(0) = -v_0 \cdot \vec{j}.$$

À tout instant t , la vitesse de l'objet est :

$$\vec{v}(t) = x'(t) \cdot \vec{i} + y'(t) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = k_1 \cdot \vec{i} + (-g \cdot t + k_3) \cdot \vec{j}$$

$$-v_0 \cdot \vec{j} = k_1 \cdot \vec{i} + k_3 \cdot \vec{j}$$

$$k_1 = 0 \quad \text{et} \quad k_3 = -v_0.$$

L'équation du mouvement est donc :

$$x(t) = 0 \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 - v_0 \cdot t + h.$$

On peut alors démontrer la formule de la vitesse d'impact au sol :

$$y(t) = 0$$

$$-\frac{1}{2}g \cdot t^2 - v_0 \cdot t + h = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{-g}$$

$$t = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0}{g},$$

car la valeur de t doit être positive.

En mettant cette valeur de t dans l'expression de la vitesse, nous obtenons :

$$\vec{v}(t) = y'(t) \cdot \vec{j} = (-g \cdot t - v_0) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = -(g \cdot t + v_0) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = -\sqrt{v_0^2 + 2gh} \cdot \vec{j}.$$

La vitesse d'impact est donc :

$$v_I = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

En particulier, si la vitesse initiale est nulle, cela donne :

$$v_I = \sqrt{2gh}.$$

La vitesse d'impact varie selon la racine carrée de la hauteur.

Problème no. 2 : Le projectile (sans résistance de l'air)

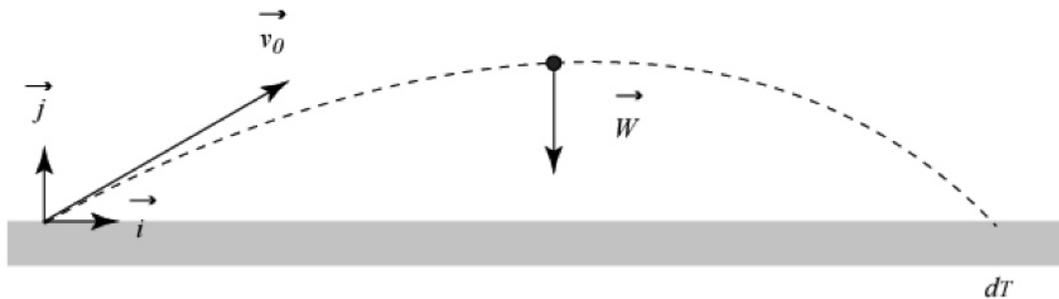


Figure 3

On lance dans les airs un projectile avec une vitesse initiale

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \theta \cdot \vec{i} + v_0 \sin \theta \cdot \vec{j}.$$

Comme dans le cas de la chute libre, la seule force qui s'exerce sur la masse dans les airs est son poids,

$$\vec{W} = -mg \cdot \vec{j}.$$

Nous obtenons donc les mêmes équations :

$$(1) \quad m \cdot x''(t) = 0$$

$$(2) \quad m \cdot y''(t) = -m \cdot g.$$

Ce qui nous donnera les mêmes solutions :

$$x(t) = k_1 \cdot t + k_2$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + k_3 \cdot t + k_4.$$

Ce sont les conditions initiales qui ne sont pas les mêmes :

$$x(0) = 0 \Rightarrow k_2 = 0$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow k_4 = 0.$$

À tout instant t , la vitesse de l'objet est :

$$\vec{v}(t) = x'(t) \cdot \vec{i} + y'(t) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = k_1 \cdot \vec{i} + (-g \cdot t + k_3) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v}(0) = v_0 \cos \theta \cdot \vec{i} + v_0 \sin \theta \cdot \vec{j} = k_1 \cdot \vec{i} + k_3 \cdot \vec{j}$$

$$k_1 = v_0 \cos \theta \text{ et } k_3 = v_0 \sin \theta.$$

D'où, $x(t) = v_0 \cos \theta \cdot t$ et $y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_0 \sin \theta \cdot t$.

La distance horizontale parcourue par le projectile, appelée portée, sera :

$$y(t) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_0 \sin \theta \cdot t = 0$$

$$t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \frac{2v_0}{g} \sin \theta$$

$$d_T = x(t) = v_0 \cos \theta \cdot \frac{2v_0}{g} \sin \theta = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta).$$

On voit que la portée sera maximale lorsque $2\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque $\theta = \frac{\pi}{4}$.

La courbe suivie par le projectile sera une parabole puisque

$$x(t) = v_0 \cos \theta \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_0 \sin \theta \cdot t$$

$$y = -\frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 + v_0 \sin \theta \cdot \frac{x}{v_0 \cos \theta}$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} \sec^2 \theta \cdot x^2 + \tan \theta \cdot x.$$

Ceci est une illustration de la première loi de Kepler :

« Tout corps qui se déplace dans un champ de force central et dont l'intensité de la force est inversement proportionnelle au carré de la distance se déplace nécessairement sur une conique. »

Il y a trois possibilités :

- 1) Si la vitesse n'est pas grande, le projectile décrit une parabole.

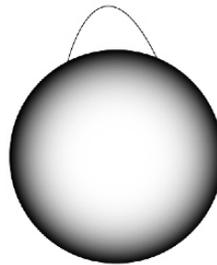


Figure 4

2) Si la vitesse est suffisamment grande, le projectile entrera en orbite autour de la Terre sur une ellipse.

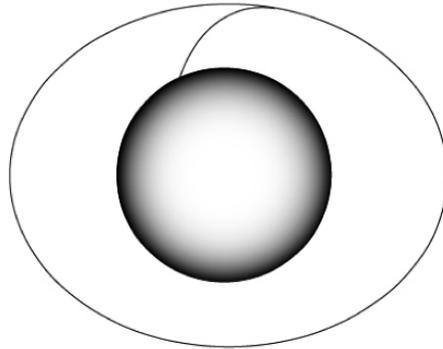


Figure 5

3) Si la vitesse est encore plus grande, le projectile quittera l'attraction terrestre sur une hyperbole ; après un certain temps, il filera en ligne droite.

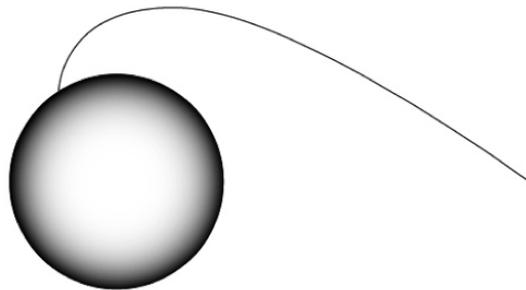


Figure 6

Problème no. 3 : La force centripète

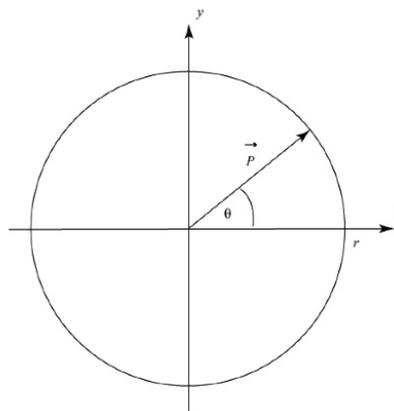


Figure 7

Première loi de Newton : « Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie G d'un solide soumis à un ensemble de forces dont la somme vectorielle est nulle est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme (le vecteur vitesse demeure constant). »

Corollaire : « Pour qu'une masse m puisse tourner, il faut lui appliquer une force dans une direction autre que celle du mouvement. La force qu'on lui applique (centripète, dirigée vers le centre) contrebalance la force centrifuge (causée par le changement de direction). »

$$\vec{F}_c = m\vec{a}$$

$$\vec{P} = r \cos \theta \cdot \vec{i} + r \sin \theta \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v} = -r \sin \theta \cdot \theta' \cdot \vec{i} + r \cos \theta \cdot \theta' \cdot \vec{j}$$

$$\vec{a} = -r \cos \theta \cdot (\theta')^2 \cdot \vec{i} - r \sin \theta \cdot \theta'' \cdot \vec{i} - r \sin \theta \cdot (\theta')^2 \cdot \vec{j} + r \cos \theta \cdot \theta'' \cdot \vec{j}.$$

Si on suppose que la vitesse angulaire est constante, alors $\theta'' = 0$ et, si la vitesse angulaire est notée $\theta' = \omega$, alors

$$\vec{a} = -r \cos \theta \cdot \omega^2 \cdot \vec{i} - r \sin \theta \cdot \omega^2 \cdot \vec{j} \quad \vec{F}_c = m\vec{a} = -mr \cos \theta \cdot \omega^2 \cdot \vec{i} - mr \sin \theta \cdot \omega^2 \cdot \vec{j}$$

$$\vec{F}_c = -m\omega^2 r \cdot (\cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j})$$

$$\vec{F}_c = -m\omega^2 r \cdot \vec{u}$$

où \vec{u} est un vecteur radial unitaire dans la direction θ .

$$F_c = |\vec{F}_c| = m\omega^2 r.$$

Ceci est la démonstration de la formule de la force centripète.

Problème no. 4 : Liquide en rotation

On fait tourner un liquide dans un bol plat, selon un axe perpendiculaire à la base, et on cherche la forme de la courbe prise par le liquide lorsqu'il s'est stabilisé.

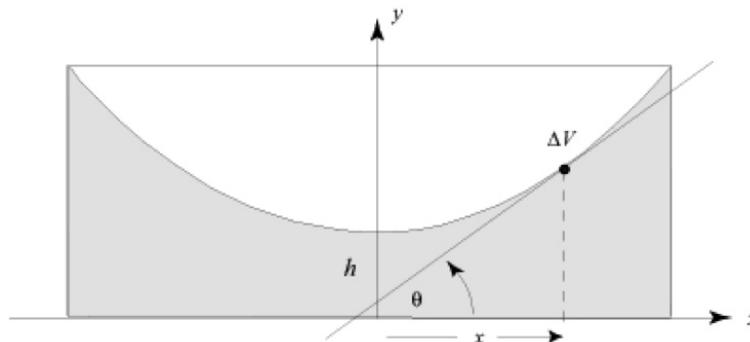


Figure 8

Comme l'angle θ correspond à l'angle d'élévation de la tangente à la courbe, $\tan \theta = y'$.

Considérons une particule d'eau à la surface du liquide ; la poussée qu'elle subit de la part du liquide est perpendiculaire à la surface sinon la surface du liquide ne serait pas stable.

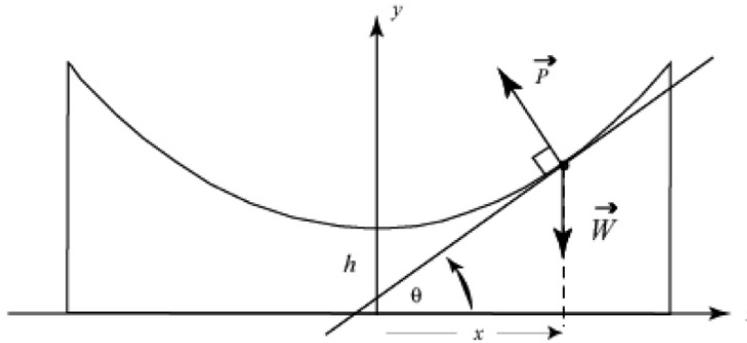


Figure 9

Les seules forces en présence sont le poids de la molécule d'eau et la poussée du liquide ; la somme de ces deux forces doit être égale à la force centripète :

$$\vec{P} = -P \sin \theta \cdot \vec{i} + P \cos \theta \cdot \vec{j}$$

$$-P \sin \theta \cdot \vec{i} + P \cos \theta \cdot \vec{j} - mg \cdot \vec{j} = -m\omega^2 x \cdot \vec{i}.$$

On en déduit que

$$P \sin \theta = m\omega^2 x$$

$$P \cos \theta = mg$$

$$\tan \theta = y' = \frac{\omega^2}{g} \cdot x$$

$$y = \frac{\omega^2}{2g} \cdot x^2 + k.$$

C.Q.F.D.

La forme de la courbe prise par le liquide est une parabole, en fait, un paraboloïde de révolution. Cette propriété est utilisée pour construire des miroirs de télescope. L'Université Laval possède un tel miroir en mercure.

Problème no. 5 : La corde suspendue

Considérons une portion de corde entre les abscisses 0 et x :

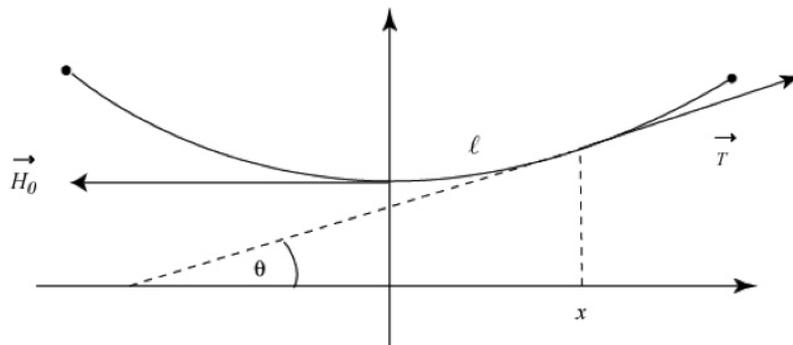


Figure 10

\vec{H}_0 est la tension dans la corde au point le plus bas :

$$\vec{H}_0 = -H_0 \cdot \vec{i}$$

$$\vec{T} = T \cos \theta \cdot \vec{i} + T \sin \theta \cdot \vec{j}.$$

Le poids de la portion de corde jusqu'au point x est :

$$\vec{W} = -mg \cdot \vec{j} = -\rho \ell g \cdot \vec{j}$$

où ρ est la densité linéaire de la corde et ℓ sa longueur.

$$T \cos \theta \cdot \vec{i} + T \sin \theta \cdot \vec{j} - H_0 \cdot \vec{i} - \rho \ell g \cdot \vec{j} = \vec{0}$$

$$T \sin \theta = \rho \ell g$$

$$T \cos \theta = H_0$$

$$\tan \theta = y' = \frac{\rho g}{H_0} \cdot \ell.$$

Si on dérive l'équation, on obtient : $y'' = k \cdot \ell'$.

$\ell = \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2} dx$, d'où $\ell' = \sqrt{1 + (y')^2}$. Nous obtenons donc l'équation différentielle suivante :

$$y'' = k \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Posons $u = y'$ pour la ramener à une équation à variables séparées :

$$u' = k \sqrt{1 + u^2}$$

$$\frac{u'}{\sqrt{1 + u^2}} = k$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1 + u^2}} dx = \int k dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = kx + c_1.$$

En posant $u = \tan \theta$, on obtient :

$$\int \frac{1}{\sec \theta} \sec^2 \theta d\theta = kx + c_1$$

$$\int \sec \theta d\theta = kx + c_1$$

$$\ln |\sec \theta + \tan \theta| = kx + c_1$$

$$\ln \left| u + \sqrt{1+u^2} \right| = kx + c_1$$

$$u + \sqrt{1+u^2} = e^{kx+c_1} = c_2 e^{kx}$$

$$\sqrt{1+u^2} = c_2 e^{kx} - u$$

$$1 + u^2 = (c_2 e^{kx} - u)^2 = c_2^2 e^{2kx} - 2c_2 u e^{kx} + u^2$$

$$u = \frac{c_2^2 e^{2kx} - 1}{2c_2 e^{kx}} = y'.$$

Comme la pente est nulle au point le plus bas de la corde,

$$y'(0) = \frac{c_2^2 - 1}{2c_2} = 0$$

$$c = \pm 1.$$

La valeur 1 correspond à une courbure vers le haut et la valeur -1 , à une courbure vers le bas.

$$y' = \frac{e^{2kx} - 1}{2e^{kx}} = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}$$

$$y' \sin h(kx)$$

$$y = \int \sin h(kx) dx = \frac{1}{k} \cos h(kx)$$

$$y = \frac{H_0}{\rho g} \cos h \left(\frac{\rho g}{H_0} x \right).$$

La forme adoptée par le câble est un cosinus-hyperbolique.

C.Q.F.D.

Nous avons la même forme (inversée) avec une baguette que l'on plie en tenant les deux extrémités.

PROBLÈME RELIÉ À L'OPTIQUE

Problème no. 6 : Les miroirs paraboliques

Nous allons démontrer que tout miroir ayant la propriété que tout rayon entrant parallèlement à l'axe du miroir est réfléchi en un point unique est nécessairement un miroir parabolique.

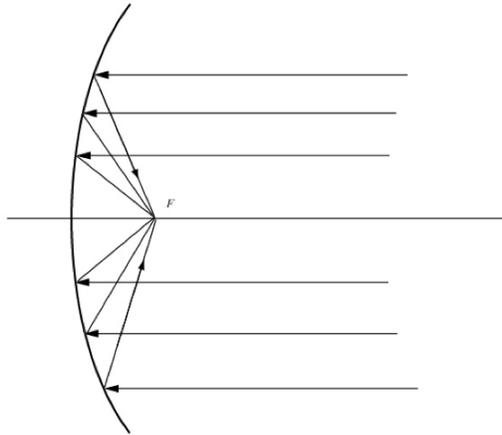


Figure 11

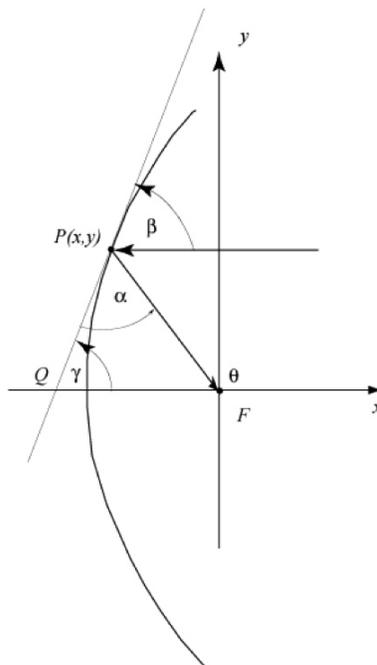


Figure 12

Les angles α et β sont égaux par la loi de la réflexion et $\gamma = \beta$, car ce sont des angles alternes-internes

Comme $\theta = \gamma + \alpha$, il s'ensuit que $\theta = 2\gamma$.

$$\tan \theta = \tan(2\gamma) = \frac{2 \tan \gamma}{1 - \tan^2 \gamma}$$

$$\tan \gamma = y'$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x},$$

ce qui nous amène à l'équation suivante :

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - (y')^2}$$

$$y \cdot (y')^2 + 2x \cdot y' - y = 0.$$

Ceci est une équation quadratique en y' , d'où

$$y' = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 4y^2}}{2y}$$

$$y \cdot y' + x = \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On effectue le changement de variable $u = x^2 + y^2$.

$$u' = 2x + 2y \cdot y'$$

$$y \cdot y' + x = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{u'}{2} = \pm \sqrt{u}$$

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} = \pm 2$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} dx = \pm \int 2 dx$$

$$\int u^{-1/2} du = \pm 2x + c_1$$

$$2\sqrt{u} = \pm 2x + c_1 \sqrt{u} = \pm x + c_2$$

$$u = x^2 \pm 2c_2x + c_2^2$$

$$y^2 = \pm 2c_2x + c_2^2.$$

Il s'agit donc bien d'une parabole.

C.Q.F.D.

PROBLÈMES RELIÉS À LA COSMOLOGIE

Voici maintenant quelques considérations touchant la cosmologie.

LA LOI DE HUBBLE

Hubble fut le premier à montrer qu'il y avait d'autres galaxies que la nôtre et à calculer la distance de ces galaxies. D'autres astronomes avaient remarqué un décalage vers le rouge des raies spectrales de ces galaxies. Hubble mit alors en évidence un lien entre la distance des galaxies et leur décalage vers le rouge. Il obtint le diagramme suivant pour une trentaine de galaxies.

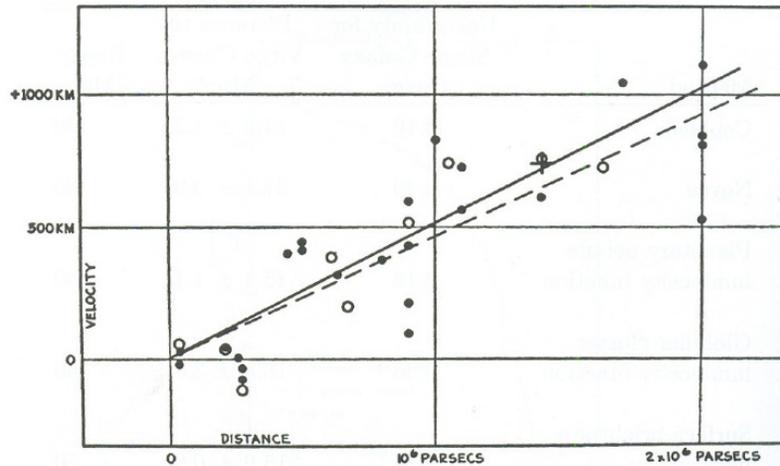


Figure 25.6 Hubble's 1936 version of his velocity-distance relation. (Figure from Hubble, *Realm of the Nebulae*, Yale University Press, New Haven, CT, © 1936.)

Figure 13

Le décalage vers le rouge est interprété par les astrophysiciens comme étant un effet Doppler et qu'il est donc causé par la vitesse de la galaxie. On voit que presque toutes les galaxies ont l'air de s'éloigner de nous sauf Andromède (le point blanc sous l'axe des y) qui se rapproche de nous.

D'après le nuage de points, la corrélation ne semble pas très forte, mais, compte tenu de l'imprécision des mesures et du fait que les astrophysiciens aiment bien faire passer des droites dans des nuages de points, on en déduit la relation suivante :

$$v = H_0 \cdot d.$$

La vitesse d'éloignement des galaxies est directement proportionnelle à la distance qui nous en sépare. C'est la loi de Hubble.

Hubble lui-même n'était pas entièrement convaincu que le décalage vers le rouge n'était dû qu'à une vitesse d'éloignement, mais c'est maintenant l'interprétation partagée par la majorité des astrophysiciens et c'est cette loi qui a mené à l'élaboration de la théorie du Big Bang.

L'exercice suivant est un classique en Calcul II et il a des applications dans beaucoup de domaines.

Démontrez que : « *Toute quantité qui croît proportionnellement à la quantité présente est nécessairement une fonction exponentielle* ».

Preuve :

$$Q'(t) = k \cdot Q$$

$$\frac{Q'(t)}{Q} = k$$

$$\int \frac{Q'(t)}{Q} dt = \int k dt$$

$$\int \frac{1}{Q} dQ = kt + c_1$$

$$Q = e^{kt+c_1} = e^{kt} \cdot e^{c_1} = c_2 \cdot e^{kt}$$

$$Q(0) = c_2$$

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{kt}.$$

C.Q.F.D.

Revenons à la loi de Hubble :

$$v = H_0 \cdot d.$$

La vitesse étant la dérivée de la distance,

$$v = d'(t) = k \cdot d$$

$$d(t) = d_0 \cdot e^{kt}$$

$$v(t) = kd_0 \cdot e^{kt}.$$

Les galaxies s'éloignent de nous à une vitesse exponentielle ! Ce qui ne correspond pas aux théories des astrophysiciens.

L'EXPANSION DE L'UNIVERS

La théorie du Big Bang se raffinant, les astrophysiciens en vinrent à penser que ce n'étaient pas les galaxies qui s'éloignaient de nous mais l'espace qui se dilatait, entraînant du même coup les galaxies.

Mais ce qui est très difficile à imaginer, c'est qu'il s'agit d'un espace à quatre dimensions, l'espace-temps. Lorsque les astronomes regardent dans leurs télescopes (façon de parler), ils regardent sur l'axe du temps. Une galaxie qu'on voit à deux millions d'années lumière (Andromède, par exemple)

nous donne une image de sa position et de sa vitesse, il y a deux millions d'années. C'est comme lorsqu'on entend un avion à réaction passer au-dessus de nous, il faut chercher son image loin de l'endroit d'où nous provient le son, surtout s'il s'agit d'un avion extrêmement rapide comme un F-18. Il en est de même des galaxies : leur vitesse d'éloignement observée est leur vitesse d'éloignement d'il y a des millions d'années, voire des milliards d'années ; on n'a aucune idée de leur position et de leur vitesse actuelles, elles n'existent peut-être même plus.

Voici maintenant une interprétation possible de l'expansion de l'Univers illustrée par le graphique d'une hyper-sphère : $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = a^2$.

Pour les valeurs de t de moins l'infini à $-a$, il n'y a rien de visible dans l'espace. Lorsque t vaut $-a$, un point apparaît dans l'espace.

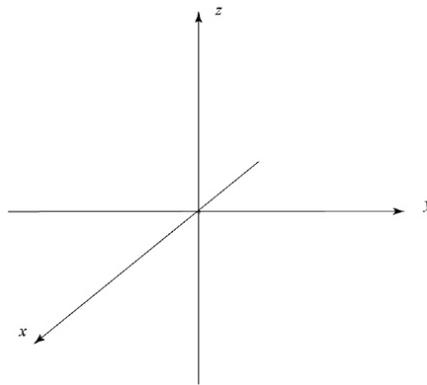


Figure 14

Lorsque t augmente de $-a$ à 0 , le rayon de la sphère augmente.

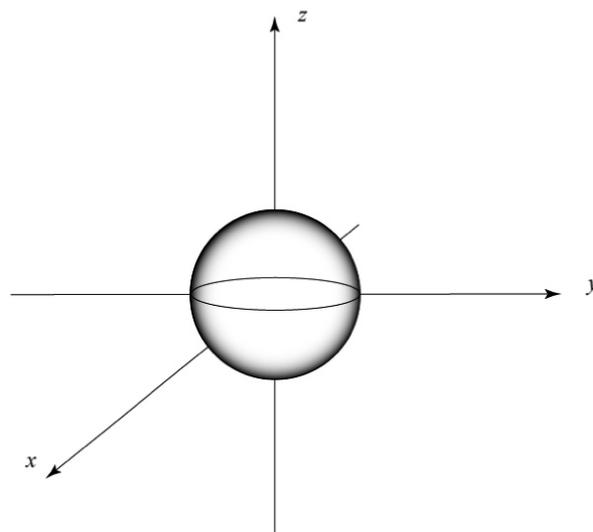


Figure 15

Lorsque t vaut 0, nous voyons une sphère de rayon a .

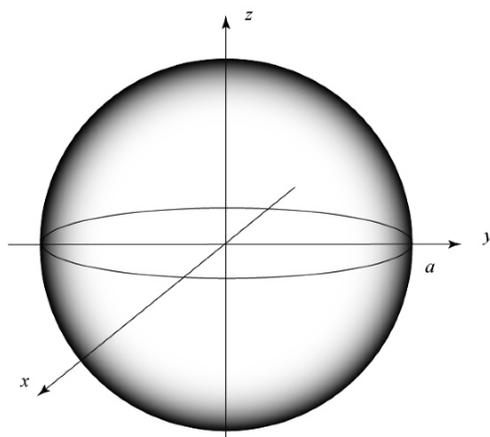


Figure 16

Lorsque t augmente de 0 à a , le rayons de la sphère diminue.

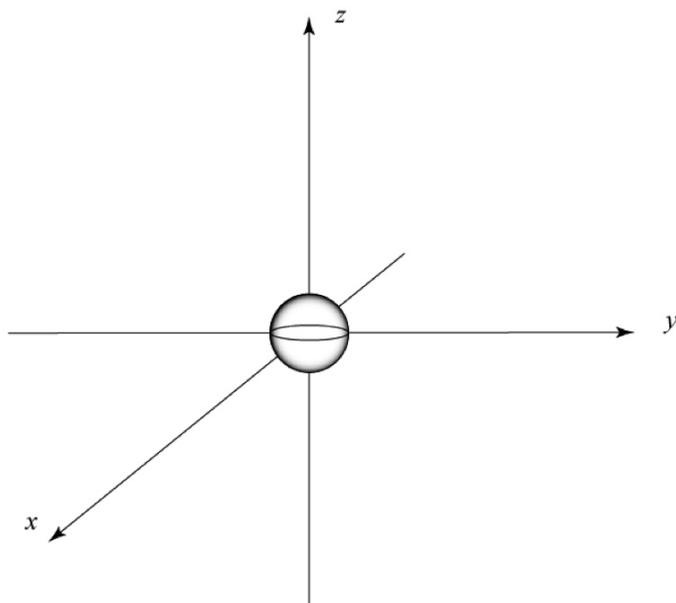


Figure 17

Et lorsque t vaut a , il ne reste qu'un point.

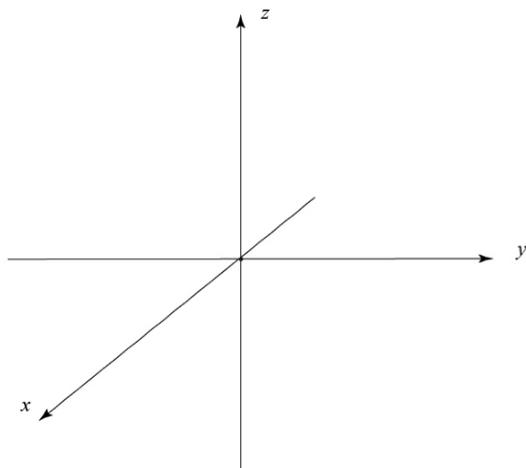


Figure 18

Finalement, au-delà de cette valeur, il n'y a plus rien, c'est un hypervolume fermé dans R^4 .