Intégrer autrement avec l'intégrale de Lebesgue

Jean-Philippe Villeneuve,
Cégep de Rimouski

Résumé

Nous retrouvons au 19e siècle quatre façons d'intégrer une fonction : l'intégrale de Cauchy, l'intégrale de Riemann, la version calculatoire de l'intégrale de Lebesgue et sa version axiomatique. Après avoir présenté brièvement les deux premières façons d'intégrer, nous nous intéresserons aux deux versions de l'intégrale de Lebesgue. Nous verrons qu'il est possible de présenter l'intégrale de Lebesgue de façon simple et ceci nous amènera à nous demander si elle peut remplacer l'intégrale de Cauchy qui est présentée dans un premier cours de calcul intégral.

Nous proposons de présenter les quatre principales façons de calculer l'intégrale d'une fonction qui ont été développées au 19e siècle. Nous remarquons alors qu'il y a une petite confusion autour de l'utilisation du terme « intégrale de Riemann » dans les manuels du premier cours de calcul intégral. Nous discuterons ensuite de la possibilité de remplacer l'intégrale de Cauchy-Riemann par l'intégrale de Lebesgue dans un premier cours de calcul intégral. Nous en conclurons finalement que l'intégrale de Cauchy-Riemann cadre très bien avec un premier cours de calcul intégral.

1 Quelques curiosités historiques

Nous nous intéresserons aux travaux de Augustin Louis Cauchy (1789-1857), de Bernhard Riemann (1826-1866), de Gaston Darboux (1842-1917) et d'Henri Lebesgue (1875-1941) sur la notion d'intégrale au 19e siècle. Pour une présentation plus exhaustive, il est possible de consulter le texte *Les généralisations de la notion mathématique d'intégrale au 19e siècle* (Villeneuve, 2008) ou l'article *À propos de l'intégration* (Dubois, 2003).

1.1 L'intégrale de Cauchy

Cauchy présente, en 1823, un livre intitulé *Résumé des Leçons sur le calcul infinitésimal*. Ce livre est composé de 40 leçons, dont 20 sur le calcul différentiel et 20 sur le calcul intégral. Il est intéressant de remarquer que ce livre propose le même contenu que les premiers cours de calcul différentiel et intégral dispensés entre autres au cégep, à l'exception des solides de révolution (qui sont présentés dans les manuels de mécanique de l'époque) et de la version complète de la technique d'intégration par substitutions trigonométriques.

Cauchy définit l'intégrale (définie) à la Leçon 21. Pour ce faire, on se donne une fonction f continue définie sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$, et une partition $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, telle que $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. On calcule alors les sommes de Cauchy :

$$S_C(f, a, b, n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

On passe à la limite pour obtenir l'intégrale au sens de Cauchy :

$$I_C(f, a, b) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_C(f, a, b, n).$$

Ainsi, Cauchy définit l'intégrale comme la limite des sommes de Cauchy d'une fonction continue. Or, pour calculer une telle somme, Cauchy n'évalue pas la fonction à un point quelconque du sous-intervalle de la partition : il choisit la borne de gauche, la borne de droite ou la borne calculée à l'aide du Théorème de la moyenne. De plus, pour calculer effectivement les sommes de Cauchy d'une fonction continue, il utilise une suite arithmétique ou une suite géométrique comme partition. Par exemple, dans le premier cas, la partition devient $\{a, a + k, a + 2k, \ldots, a + nk = b\}$ avec $k = \dfrac{b-a}{n}$, et ainsi, nous avons :

$$S_C(f, a, b, n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

1.2 Le texte de Riemann de 1854 et l'intégrale de Riemann

Riemann présente, en 1854, dans *La possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique*, une courte note sur la notion d'intégrale.

Pour commencer, il généralise les sommes de Cauchy en les appliquant non seulement aux fonctions continues, mais aux fonctions arbitraires, et en permettant à la fonction d'être évaluée à un point quelconque du sous-intervalle de la partition. Il définit donc les sommes, qu'on appellera de Cauchy-Riemann, comme suit :

$$S_R(f, a, b, n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1} + \theta_i(x_i - x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}),$$

et présente l'intégrale comme le fit Cauchy, soit comme la limite des sommes de Cauchy-Riemann. Mais il n'utilisera jamais cette définition. En effet, il démontre d'abord l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

R1 : La fonction est à oscillation moyenne nulle.
R2 : La somme des intervalles où l'oscillation de la fonction est supérieure à ε peut être rendue aussi petite que possible.

Il suppose ensuite, sans en faire la démonstration, que la propriété R1 est équivalente à la convergence des sommes de Cauchy-Riemann, donc à l'intégrabilité selon Cauchy. Il peut ainsi utiliser, et c'est ce qu'il fait, la propriété R2 comme condition d'intégrabilité, c'est-à-dire qu'une fonction est intégrable si elle satisfait R2.

Quelques années plus tard, dans son long article *Mémoire sur les fonctions discontinues*, Darboux utilise cette équivalence entre R1 et R2 pour montrer que la condition R2 devient une condition d'intégrabilité non pas de l'intégrale de Cauchy-Riemann, comme le sous-entendait Riemann, mais d'une nouvelle façon de calculer l'intégrale que l'on appellera l'intégrale de Riemann. En fait, Darboux[1] introduit les sommes de Riemann inférieures et supérieures et démontre que ces deux sommes convergent toujours lorsque la fonction est bornée. Or, lorsque ces deux sommes sont égales, on retrouve la condition R1 proposée par Riemann et ainsi, comme Darboux l'affirme, la condition R1 permet de distinguer deux sortes de fonctions bornées : celles qui sont intégrables et celles qui ne le sont pas. Dans ce cas, on obtient l'intégrale de Riemann : la fonction est intégrable si ces sommes convergent vers le même nombre.

Donc, Riemann n'utilisa pas cette nouvelle façon de calculer l'intégrale, mais il permit de l'introduire. De plus, il développa une nouvelle façon de faire des recherches sur la notion d'intégrale en caractérisant le comportement de la fonction, en l'occurrence l'oscillation, et non, comme ce fut le cas pour les recherches sur l'intégrale de Cauchy, l'ensemble des points de discontinuité de la fonction[2].

1.3 La version axiomatique de l'intégrale

Lebesgue présente deux versions de l'intégrale : la version calculatoire dans l'article *Sur une généralisation de l'intégrale définie* de 1901 et la version axiomatique dans le livre *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* de 1904.

La version axiomatique est une nouvelle façon de définir l'intégrale : on ne s'intéresse plus à la façon de calculer l'intégrale, mais aux propriétés dont on a besoin lorsqu'on utilise la notion. Ainsi, un opérateur à valeurs réelles sur les fonctions réelles bornées définies sur un intervalle ($\int$: (Fonctions bornées, Intervalle) $\to \mathbf{R}$) est une intégrale s'il satisfait aux propriétés suivantes :

Ax.1 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx, \forall h \in R.$

Ax.2 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0, \forall c \in (a,b).$

Ax.3 $\displaystyle\int_a^b [f(x)+\varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx.$

Ax.4 Soit $\varphi \geq 0$ et $b > a$. Alors $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx \geq 0.$

[1]En même temps que Darboux, soit en 1875, les mathématiciens Ascoli, Smith et Thomae ont démontré le même résultat. Consulter au besoin Hawkins (1975) ou Hochkirchen (2003).

[2]Notre interprétation est la même que celle de Hawkins (1980) ou de Dugac (2003).

Ax.5 $\int_0^1 1dx = 1.$

Ax.6 Soit $f_n(x)$ une suite croissante de fonctions bornées qui convergent ponctuellement vers une fonction bornée $f(x)$, alors les intégrales des $f_n(x)$ convergent vers l'intégrale de $f(x)$.

Lebesgue démontre que ces six propriétés permettent de résoudre le problème qui est au coeur de l'intégration, en l'occurrence la recherche de primitives. Il réussit aussi à déduire de ces axiomes une théorie de la mesure (qui est différente de celle présentée en 1898 par Émile Borel) et la version calculatoire de l'intégrale de Lebesgue.

Par contre, cette définition axiomatique n'est plus vraiment utilisée aujourd'hui. D'une part, l'axiome 6 est devenu le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue. D'autre part, certaines propriétés ont été récupérées pour définir les notions d'espace mesurable, d'espace de mesure et de fonctions mesurables, notions qui sont maintenant au coeur de la théorie de l'intégration.

2 Intégrer autrement avec l'intégrale de Lebesgue

Intéressons-nous maintenant à la question suivante : Pouvons-nous remplacer l'intégrale de Cauchy-Riemann présentée dans le cours NYB du cégep par la version calculatoire de l'intégrale de Lebesgue ? Pour y répondre, nous proposons de présenter la version calculatoire de l'intégrale de Lebesgue et de la comparer ensuite avec l'intégrale de Cauchy-Riemann.

D'abord, l'idée géniale de Lebesgue est de considérer la partition non plus du domaine de la fonction, mais de son image[3]. Or, pour partitionner l'image d'une fonction, il n'est plus nécessaire que la fonction soit continue : il suffit qu'elle soit bornée.

Soit f, une fonction réelle à valeurs réelles bornée. Alors, il existe deux nombres réels l et L tels que $l \leq f(x) \leq L$, $\forall x \in [a, b]$. Ces deux nombres sont utilisés pour partitionner l'image de f, d'où la partition $P = \{l = l_0, l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}, L = l_n\}$ (Figure 1, avec $n = 3$)

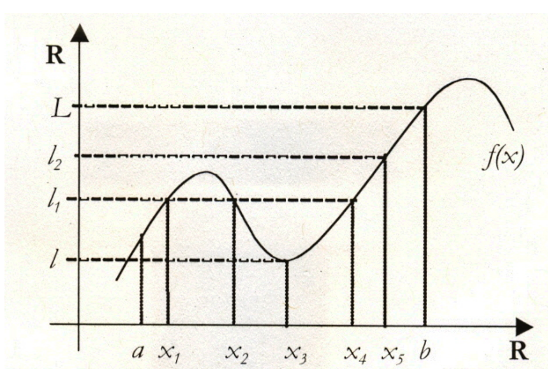

Figure 1 : La partition de l'image de la fonction.

[3]Pour être précis, on partitionne la fermeture de l'image de la fonction.

À partir de cette partition, on construit les ensembles $E_i = \{x : l_{i-1} \leq f(x) < l_i\}$ qui induisent une partition du domaine de f. Les ensembles E_i de notre exemple sont :

$$\begin{aligned}E_1 &= \{x : l_0 \leq f(x) < l_1\} = [a, x_1[\cup]x_2, x_4[,\\E_2 &= \{x : l_1 \leq f(x) < l_2\} = [x_1, x_2] \cup [x_4, x_5[,\\E_3 &= \{x : l_2 \leq f(x) < l_3\} = [x_5, b[.\end{aligned}$$

Ensuite, on introduit ce qu'on appellera des sommes de Lebesgue. Pour ce faire, on utilise la fonction caractéristique d'un ensemble, qui se définit comme suit :

$$\chi_E(x) \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}.$$

On applique cette fonction aux ensembles E_i pour former, dans cet exemple, les trois fonctions simples suivantes :

$$\begin{aligned}s_1(x) &= l_0^* \ \chi_{E_1}(x),\\s_2(x) &= l_1^* \ \chi_{E_2}(x),\\s_3(x) &= l_2^* \ \chi_{E_3}(x).\end{aligned}$$

Ainsi, il est facile d'intégrer ces fonctions, car l'aire sous la courbe est obtenue en additionnant des rectangles (voir Figure 2). Par exemple,

$$\text{Aire}(R_1) + \text{Aire}(R_3) = l_0[(x_1 – a) + (x_4 – x_2)] = \text{Aire}(s_1),$$

d'où, en posant $m(E_1) = [(x_1 – a) + (x_4 – x_2)]$, nous obtenons :

$$\int_a^b s_1(x)dx = l_0 m(E_1).$$

Il en est de même pour les autres fonctions :

$$\text{Aire}(R_2) + \text{Aire}(R_4) = l_1[(x_2 – x_1) + (x_5 – x_4)] = l_1 m(E_2) = \int_a^b s_2(x)dx,$$

$$\text{Aire}(R_5) = l_2[(b – x_5)] = l_2 m(E_3) = \int_a^b s_3(x)dx.$$

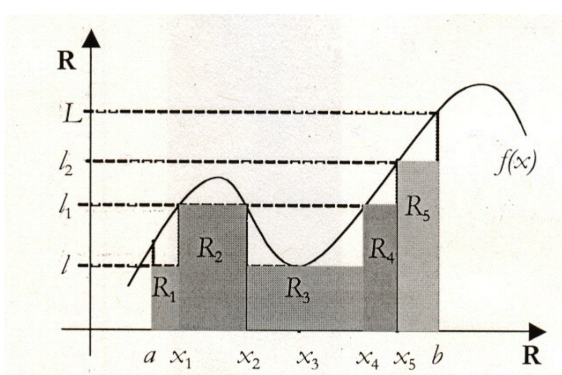

Figure 2 : Les sommes de Lebesgue.

On se rend compte que si on raffine la partition de l'image, on s'approchera de la valeur de l'aire sous la courbe, c'est-à-dire que les rectangles s'approcheront de la courbe $y = f(x)$ et à la limite, nous obtiendrons l'aire sous la courbe. D'où une fonction bornée est intégrable au sens de Lebesgue si la limite des sommes de Lebesgue existe :

$$I_L(f, a, b) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} l_{i-1} m(E_i).$$

3 La comparaison entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Cauchy-Riemann

Nous proposons de comparer l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Cauchy-Riemann selon la représentation graphique, le calcul numérique et analytique ainsi que les options offertes par ces notions.

3.1 La représentation graphique

La construction graphique des sommes de Lebesgue (Figure 2) est du même niveau de difficulté que la construction graphique des sommes de Cauchy-Riemann (Figure 3). De plus, dans le cas où la fonction est monotone, les sommes sont équivalentes.

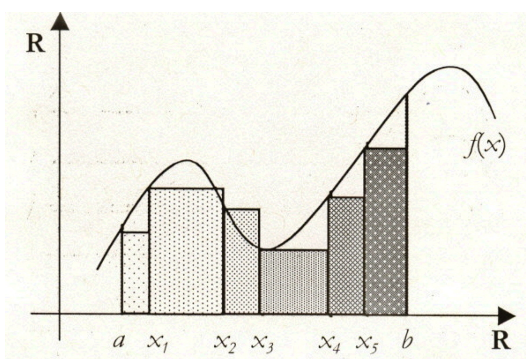

Figure 3 : Les sommes de Cauchy-Riemann.

Par contre, les sommes de Lebesgue induisent une partition du domaine de la fonction qui n'est plus ordonnée. Il faut alors regrouper des rectangles qui ne sont pas adjacents. De plus, un avantage des sommes de Cauchy-Riemann est qu'on peut faire varier la borne à laquelle on évalue la fonction, ce qui est moins évident pour les sommes de Lebesgue.

3.2 Le calcul numérique des sommes

Il est facile d'utiliser un chiffrier pour calculer numériquement les sommes de Cauchy-Riemann. En voici un exemple :

		Fonction	f(x)=	x^2	
Intervalle d'intégration			a=	2	
			b=	40	
Le nombre de sous-ensembles			n=	5	
Numéro du sous-intervalle	Borne de gauche	Borne d'évaluation (0 = Gauche)	Valeur de la fonction	Valeur du rectangle	Valeur de la somme de Riemann
1	2,00	0	4,00	30,40	15631,68
2	9,60	0	92,16	700,42	
3	17,20	0	295,84	2248,38	Valeur
4	24,80	0	615,04	4674,30	théorique
5	32,40	0	1049,76	7978,18	21330,67
6	40,00	0	1600,00	0,00	

Par contre, il faudrait utiliser un logiciel de calcul symbolique comme Maple pour calculer les sommes de Lebesgue. En effet, pour calculer une somme de Lebesgue, il faut construire ces ensembles :

$$E_i = \{x : l_{i-1} \leq f(x) < l_i\}.$$

Or, il n'est pas possible d'utiliser un chiffrier pour trouver $f^{-1}(l_i)$. De plus, ces ensembles sont respectivement connexes ou disjoints lorsque la fonction atteint un minimum ou un maximum (Figure 4). Il faudra donc faire l'étude de la croissance de la fonction pour trouver la partition induite dans le domaine de la fonction.

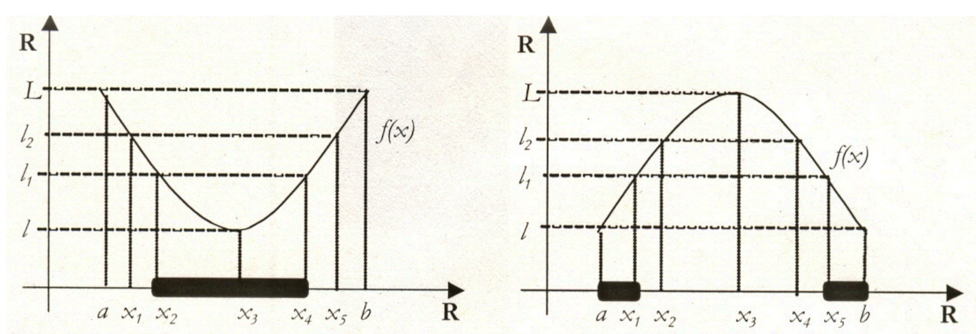

Figure 4 : L'impact de la concavité de la fonction sur les ensembles E_i.

3.3 Le calcul analytique des sommes

On peut calculer les sommes de Cauchy-Riemann pour des fonctions simples comme $f(x) = x$, $f(x) = x^2$. Par exemple, les sommes de Cauchy de la fonction $f(x) = x^2$ pour l'intervalle $[1, 2]$ sont :

$$S_C = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{(i-1)}{n}\right)^2.$$

On peut ensuite utiliser les résultats sur la somme des n premiers nombres ou des n premiers carrés pour éliminer le symbole de sommation et pour passer à la limite.

Il est plus difficile de calculer les sommes de Lebesgue pour la fonction $f(x) = x^2$. Considérons, par exemple, la partition $l_0 = 1, l_1 = 2, l_2 = 3, l_3 = 4$, dont les images inverses sont : $x_0 = 1$, $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = 2$. Ainsi, nous obtenons :

$$l_0^* m(E_1) + l_1^* m(E_2) + l_2^* m(E_3) = 1^*(\sqrt{2}–1) + 2^*(\sqrt{3}–\sqrt{2}) + 3^*(2–\sqrt{3}).$$

En généralisant, les sommes de Lebesgue deviennent :

$$S_L = \sum_{i=1}^{n} l_{i-1} m(E_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{3(i-1)}{n}\right)\left(\sqrt{1 + \frac{3i}{n}} - \sqrt{1 + \frac{3(i-1)}{n}}\right).$$

Les racines dans la sommation nous empêchent d'utiliser les formules de sommation et donc augmentent le niveau de difficulté.

Par contre, si on prend la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ et si on considère l'intervalle [1, 4], alors les niveaux de difficultés sont inversés. En effet, les sommes de Cauchy et les sommes de Lebesgue deviennent respectivement :

$$\begin{aligned} S_C &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{3(i-1)}{n}} \bullet \frac{3}{n}, \\ S_L &= \sum_{i=1}^{n} l_{i-1} m(E_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{3(i-1)}{n}\right)\left(\left(1 + \frac{3i}{n}\right)^2 - \left(1 + \frac{3(i-1)}{n}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Il est ainsi possible d'utiliser les résultats sur les sommations pour éliminer le symbole de sommation des sommes de Lebesgue, ce qui n'est plus possible pour les sommes de Cauchy.

3.4 Les options

Les options, ou les autres notions qui peuvent être enseignées dans le cadre du cours NYB, à la suite de l'introduction de l'intégrale définie, sont assez différentes. L'intégrale de Cauchy-Riemann nous permet de présenter le Théorème fondamental du calcul et d'autres techniques d'approximation, comme la méthode de Simpson et celle du trapèze.

Il est aussi possible de démontrer le Théorème fondamental du calcul en utilisant l'intégrale de Lebesgue, mais cette intégrale ouvre plutôt la porte aux théories de la mesure, dont certaines peuvent très bien être enseignées dans le cadre du cours NYB.

4 La notion d'intégrale au cégep

Nous avons donc présenté quatre façons de calculer l'intégrale et de comparer l'intégrale de Cauchy-Riemann à l'intégrale de Lebesgue. Nous en concluons que l'intégrale de Cauchy-Riemann est bien adaptée aux besoins du cours NYB. Il faudrait quand même faire une étude plus exhaustive et regarder comment il serait possible d'utiliser un logiciel de calcul symbolique pour introduire l'intégrale de Lebesgue. De plus, on pourrait se demander si l'intégrale de Lebesgue nous permet de donner des applications plus concrètes de la notion d'intégrale.

Références

[1] Borel, Émile, 1898, Leçons sur la théorie des fonctions : principes de la théorie des ensembles en vue des applications à la théorie des fonctions, 4e éd., Paris : Gauthier-Villars, 1950.

[2] Cauchy, Augustin Louis, 1823, « Résumé des Leçons sur le calcul infinitésimal » In *Œuvres complètes*, vol. 16, Paris : Gauthier-Villars, 1903.

[3] Dugac, Pierre, *Histoire de l'analyse*, Paris : Vuibert, 2003.

[4] Darboux, Gaston, 1875, « Mémoire sur la théorie des fonctions discontinues, » *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* (2) 4, p. 57-112.

[5] Dubois, Jacques, « À propos de l'intégration », *Bulletin AMQ*, Déc. 2003, p. 39-47.

[6] Hawkins, Thomas, 1975, *Lebesgue's theory of integration : its origin and development*, New York : Chelsea Publishing Company.

[7] Hawkins, Thomas, 1980, « The origins of modern theories of integration, » In *From Calculus to Set Theory* 1630-1910, éd Grattan-Guinness, London : Duckworth. p. 149-219.

[8] Hochkirchen, Thomas, 2003, « Theory of Measure and Integration form Riemann to Lebesgue, » In *A History of Analysis*, éd. Hans Niels Jahnke, Providence, RI : American Mathematical Society, p. 261-290.

[9] Lebesgue, Henri, 1901, « Sur une généralisation de l'intégrale définie », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 132, p. 1025-1028.

[10] Lebesgue, Henri, 1904, *Intégration des fonctions primitives*, 2e éd, Paris : Gauthier-Villars. 1928.

[11] Riemann, Bernhard, 1854, « La possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique, » *Bulletin des sciences mathématiques et astronomique*, Tome V, 1873, p. 225-279.

[12] Villeneuve, Jean-Philippe, 2008, *Les généralisations de la notion mathématique d'intégrale au 19e siècle*, [à venir sur le site Culture Maths].