1. On désigne par S la partie du plan $x+2y+z=2$ située dans le premier octant et par $\vec{v}$ le champ vectoriel $\vec{v}(x,y,z)=(1,z,3y)$. Calculer l'intégrale de surface

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS,$$

sachant que $\vec{n}$ est la normale dont la troisième composante est positive.

2. On désigne par $\vec{v}$ le champ vectoriel

$$\vec{v}(x,y,z)=(x^2+z,y+x,-2zx-z)$$

et par S la surface constituée de la portion du paraboloïde

$$x=4-(z^2+y^2)$$

situé dans $x>0$. Calculez le flux de $\vec{v}$ à travers S dans la direction de la normale pointant vers l'extérieur de la surface.

3. On désigne par S la partie de la surface du paraboloïde $z=x^2+y^2$ pour laquelle $z\in[0,1]$ et on considère le champ scalaire $\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Calculer le flux du champ de vecteurs $\nabla\phi$ à travers S dans la direction de la normale dont la troisième composante est négative.

4. Soit Σ la surface du cube $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$. Si $\vec{U}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$, calculer le flux de $\vec{U}$ à travers Σ dans la direction de la normale extérieure.

Suggestion: dans le cas du cube, on peut déterminer facilement la normale à chacune des faces. Par exemple, pour la face située dans le plan XY, le vecteur normal est $-\vec{k}=(0,0,-1)$. Il suffit maintenant de calculer $\vec{U}\cdot\vec{n}$ et $\iint_S \vec{U}\cdot\vec{n}\,dS$ pour chacune des faces.

5. Soit S la surface fermée constituée de la surface cylindrique

$$z^2+y^2=4,\qquad x\in[0,1]$$

et des deux disques

$$z^2+y^2\le 4,\quad x=0$$

et

$$z^2+y^2\le 4,\quad x=1.$$

Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{F}(x,y,z)=(x,x^2+y,x^2+y+z)$ à travers S, de l'intérieur vers l'extérieur.

6. Soit C, une courbe de classe C^1 par morceaux, simple, fermée et orientée positivement. Considérons D, le domaine délimité par C.

(a) Sachant que $A(D)$ représente l'aire du domaine D, montrer que

$$A(D) = -\int_C y\,dx.$$

(b) En utilisant (a), montrer que l'aire d'une ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

est πab.

7. On considère l'intégrale double

$$I = \iint_D (x^2 - y^2)\,dx\,dy,$$

où D est défini par $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0$ et l'intégrale curviligne

$$J = \int_\Gamma y^3\,dx + x^3\,dy,$$

où Γ est l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ parcourue positivement.

(a) Montrer qu'on peut ramener le calcul de J à celui de I.

(b) Calculer I.

8. Soit D, une mince plaque métallique de densité surfacique $\rho(x, y) \equiv 1$. Nous allons noter par ∂D, la frontière de D et nous supposerons que ∂D est une courbe de classe C^1 par morceaux, simple, fermée et orientée positivement.

(a) Dans le cas d'une plaque homogène de densité surfacique $\rho(x, y) \equiv 1$, on peut calculer le centre de gravité de la manière suivante:

$$\overline{x} = \frac{1}{A(D)} \iint_D x\,dx\,dy;$$
$$\overline{y} = \frac{1}{A(D)} \iint_D y\,dx\,dy.$$

Montrer que dans ce cas, on a

$$\overline{x} = \frac{1}{2A(D)} \int_{\partial D} x^2\,dy;$$
$$\overline{y} = -\frac{1}{2A(D)} \int_{\partial D} y^2\,dx.$$

(b) Dans le cas d'une plaque homogène de densité surfacique $\rho(x,y) \equiv 1$, on peut calculer les moments d'inertie de la manière suivante

$$I_x = \iint_D y^2\,dx\,dy;$$
$$I_y = \iint_D x^2\,dx\,dy.$$

Montrer que dans ce cas, on a

$$I_x = -\frac{1}{3}\int_{\partial D} y^3\,dx;$$
$$I_y = \frac{1}{3}\int_{\partial D} x^3\,dy.$$

9. On considère une plaque homogène D dont la densité surfacique est $\rho(x,y) \equiv 1$ et limitée par une courbe simple fermée $\mathcal{C}$ parcourue positivement. Exprimer l'intégrale curviligne suivante

$$J = \frac{1}{3}\int_{\mathcal{C}} x^2\,dy - xy\,dx$$

en fonction de l'aire A de la plaque D et de l'abscisse $\bar{x}$ du centre de gravité de D.

10. Soit $\vec{v}(x,y) = (y^2, x)$, calculer l'intégrale

$$I = \int_C \vec{v}\cdot d\vec{r}$$

où C est la courbe suivante :

(a) le bord du carré $[0,2]\times[0,2]$ parcouru positivement,

(b) le bord du carré $[-1,1]\times[-1,1]$ parcouru positivement,

(c) le cercle de rayon 2 centré en $(0,0)$ parcouru positivement,

(d) l'ellipse centrée en $(1,2)$ de demi-axe horizontal 1 et de demi-axe vertical 3 parcourue positivement.

Suggestion: Montrer que

$$I = \int_C \vec{v}\cdot d\vec{r} = A(D)(1-2\overline{y}),$$

où D est le domaine borné par la courbe C, $A(D)$ est l'aire de D et $\overline{y}$ est l'ordonnée à l'origine du centre de gravité de D. Pour calculer l'intégrale, il suffit de déterminer $A(D)$ et $\overline{y}$ dans chaque cas.

11. Calculer $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si C est la courbe $y = 1 - |1 - x|$ joignant $(0,0)$ à $(2,0)$ et $\vec{F}(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$.

12. Pour chacun des champs vectoriels suivants, calculer le rotationnel et la divergence.

(a) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, -2, yz)$.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (xz^3, 2y^4x^2, 5z^2y)$.

(c) $\vec{F}(x,y,z) = (e^{xy}, -\cos y, \sin^2 z)$.

13. Soit $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$. Calculer le flux de $\vec{F}$ à travers le bord du disque unité $x^2 + y^2 \leq 1$ dans la direction de la normale extérieure, en utilisant:

(a) la définition du calcul du flux

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds;$$

(b) le théorème de la divergence dans $\mathbb{R}^2$

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy.$$

Quelle serait la valeur de ce flux si on remplaçait le cercle par une courbe fermée quelconque qui tourne une fois autour de l'origine?

14. Soient $\vec{F}(x,y) = (x^2 + y, 4x - \cos y)$ et C est la frontière du domaine D qui est à l'intérieur du carré de sommets $(1,1), (5,1), (5,5), (1,5)$ mais à l'extérieur du rectangle de sommets $(2,2), (3,2), (3,4), (2,4)$. Calculer $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, où C est parcourue de telle sorte que le domaine se situe à gauche.