1) UN *ESPACE DE BANACH* EST UN ESPACE NORMÉ COMPLET

Le titre de ce premier cours est la définition d'un des concepts qui nous intéressera tout au long de cette session :

Un espace de Banach est un espace normé complet.

Rappelons le sens de cette phrase.

Un espace normé est un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$, qui sera toujours celui des nombres réels $\mathbb{R}$, ou des nombres complexes $\mathbb{C}$, muni d'une application $\|\cdot\| : E \to [0, \infty[$ vérifiant

(1) pour chaque $\lambda \in \mathbb{K}$ et chaque $x \in E$,
$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,$$
(2) pour chaque $x, y \in E$,
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$
(3) pour chaque $x \in E$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Une telle application $\|\cdot\|$ est appelée une norme.

Exercice 1.

a) *Rappelez la définition d'une distance et d'un espace métrique. Comment obtient-t-on un espace métrique à partir d'un espace normé ?*
b) *Rappelez la définition d'un espace topologique. Comment obtient-t-on un espace topologique à partir d'un espace métrique ?*

Rappelons aussi que dans un espace métrique (X, d), une une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que
$$m, n \geq N_\epsilon \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Un espace métrique est complet si toutes ses suites de Cauchy convergent.

Exercice 2.

a) *Donnez deux distances d_1 et d_2 induisant la même topologie sur un ensemble X, mais telles que (X, d_1) est un espace métrique complet alors que (X, d_2) est un espace métrique qui n'est pas complet. Ceci signifie que la propriété* être complet *est de nature métrique, pas topologique.*
b) *Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un même espace vectoriel E induisant la même topologie sont dites équivalentes. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes équivalentes sur un même espace vectoriel normé E. Montrez que $(E, \|\cdot\|_1)$ est complet si et seulement si $(E, \|\cdot\|_2)$ est complet.*

Exercice 3. *Soit E un espace vectoriel normé. Montrez que pour chaque $x, y \in E$,*

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|.$$

En déduire que l'application $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 4. *Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace de Banach. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. La restriction de $\| \cdot \|$ à F en fait un espace vectoriel normé. Montrez qu'il est complet si et seulement si F est un sous-espace fermé.*

1.1. **Quelques exemples.** Soit $1 \leq p < \infty$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Il découle de l'inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_n + y_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_n|^p \right)^{1/p},$$

que cette formule définit une norme. On peut aussi munir $\mathbb{R}^n$ de la norme

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}.$$

Proposition 1.1. *Pour chaque $p \in [1, \infty]$, $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\| \cdot \|_p$ est un espace de Banach.*

Exercice 5. *Pour $p = 1, 2, 10, \infty$, dessinez la boule unité de $(\mathbb{R}^2, \|.\|_p)$.*

Soit $1 \leq p < \infty$. L'espace des suites $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N})$ est composé de toutes les suites $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty.$$

Proposition 1.2. *Pour chaque $1 \leq p \leq \infty$, ℓ^p est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

La norme de $x \in \ell^p$ est définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Proposition 1.3. *L'espace vectoriel normé $(\ell^p, \|.\|_p)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Montrons, pour $1 \leq p < \infty$, que l'espace ℓ^p est complet. Soit $x^{(n)}$ une suite de Cauchy de ℓ^p. Étant donné $\epsilon > 0$, il existe N_ϵ tel que $m, n \geq N_\epsilon \Longrightarrow \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p < \epsilon$. En d'autres mots,

$$m, n \geq N_\epsilon \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p < \epsilon^p.$$

En particulier, étant donnés $m, n \geq N_\epsilon$, on a pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \epsilon$. La suite $(x_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Posons $y_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$. La suite $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est notre candidat pour la limite de $x^{(n)}$. Fixons $K \in \mathbb{N}$. Pour $m, n \geq N_\epsilon$,

$$\sum_{k=1}^{K} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p \leq \epsilon^p.$$

En passant à la limite $m \to \infty$ on obtient

$$\sum_{k=1}^{K} |x_k^{(n)} - y_k|^p \leq \epsilon^p.$$

Comme K est arbitraire, on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - y_k|^p \leq \epsilon^p.$$

Ceci montre que la suite $x^{(n)} - y = (x_k^{(n)} - y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un élément de ℓ^p. Comme ℓ^p est un espace vectoriel, la suite $y = x^{(n)} - (x^{(n)} - y)$ est aussi un élément de ℓ^p. De plus, l'inégalité précédente s'exprime aussi

$$\|x^{(n)} - y\|_p \leq \epsilon.$$

En d'autres mots, $x^{(n)} \to y$ dans ℓ^p. $\square$

Exercice 6. *On définit aussi ℓ^∞, l'ensemble des suites bornées, qu'on munit de la norme*

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_k| \;:\; k \in \mathbb{N}\}.$$

Montrez que ℓ^∞ est un espace de Banach.

Soit (K, d) un espace métrique compact. L'ensemble $C(K)$ des fonctions continues sur K peut-être muni de la norme

$$\|f\|_0 = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Proposition 1.4. *L'espace $C(K)$ muni de la norme $\|.\|_0$ est complet.*

Exercice 7. *Si $K = [a, b]$ on peut aussi définir une deuxième norme sur $C(K)$:*

$$\|f\| = \left(\int_a^b f(x)^2\, dx\right)^{1/2}.$$

a) *Montrez que c'est bien une norme.*
b) *Montrez que l'espace ainsi obtenu n'est pas complet.*

Exercice 8. *Soit* $E = C([0,1])$ *muni de la norme du suprémum. Soit* F *l'ensemble des fonctions polynomiales sur ce même intervalle. Est-ce que* F *muni de la norme du suprémum est un espace de Banach ?*