2) LINÉARITÉ ET CONTINUITÉ

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire $T : E \to F$ n'est pas nécessairement continue. Par exemple, munissons $E = C^\infty([0,1])$ de la norme définie par $\|f\|_0 = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. L'application $T : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$Tf = f'(0)$$

est linéaire, mais pas continue. En effet, la suite de fonction $x \mapsto f_n(x) = x^n/n$ converge vers 0, mais $Tf_n = 1$ pour chaque n.

Il est donc intéressant de caractériser les applications linéaires continues.

Proposition 2.1. *Considérons une application linéaire $T : E \to F$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(1) *L'application T est continue.*
(2) *Elle est continue en $0 \in E$.*
(3) *Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour chaque $x \in E$, $\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E$.*
(4) $\sup\{\|Tx\|_F \,:\, x \in E$ *et* $\|x\|_E = 1\} < \infty$.

En vue de la propriété (4), une application linéaire continue est aussi appelée une application linéaire bornée.

Proposition 2.2. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors la linéarité de T implique sa continuité.*

Pour montrer cette proposition nous utiliserons le

Lemme 2.3. *Soit E un espace normé de dimension finie. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Alors il existe une constante $C \geq 1$ telle que pour chaque $c \in \mathbb{R}^n$,*

$$\frac{1}{C}\|c\|_2 \leq \|c_1e_1 + \cdots + c_ne_n\|_E \leq C\|c\|_2.$$

Démonstration du lemme. L'application $\Phi : \mathbb{R}^n \to E$ définie par

$$\Phi(c) = \|c_1e_1 + \cdots + c_ne_n\|_E$$

est continue. Comme la sphère $S = \{c \in \mathbb{R}^n \,:\, c_1^2 + \cdots + c_n^2 = 1\}$ est compacte, Φ y atteint son minimum m et son maximum M. Le fait que $(e_1, \cdots, e_n)$ soit une base empêche m de s'annuler. Pour $0 \neq c \in \mathbb{R}^n$ quelconque,

$$\Phi(c) = \|c\|_2 \|\frac{1}{\|c\|_2}(c_1e_1 + \cdots + c_ne_n)\|_E \in [m\|c\|_2, M\|c\|_2].$$

Il suffit donc de prendre $C = \max\{M, 1/m\}$. $\square$

Démonstration de la Proposition 2.2. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour $x = c_1e_1 + \cdots + c_ne_n$ tel que $\|x\| = 1$, on déduit du Lemme précédent que $\|c\|_2 \leq C$. En particulier, $|c_i| \leq C$ pour chaque $i = 1, \cdots, n$. On a donc,

$$\|Tx\|_F \leq |c_1|\|T(e_1)\| + \cdots + |c_n|\|T(e_n)\| \leq C\left(\|T(e_1)\| + \cdots + \|Te_n\|\right).$$

$\square$

Corollaire 2.4. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors les normes sur E sont toutes équivalentes.*

Exercice 1. *Prouvez ce corollaire.*

L'ensemble des applications linéaires continues de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$. C'est un espace vectoriel. La formule

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\|_F \, : \, x \in E \text{ et } \|x\|_E = 1\}$$

définit une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$. On l'appelle la norme opérateur.

Proposition 2.5. *Si F est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme opérateur est un Espace de Banach.*

Démonstration. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Pour chaque $x \in E$, la suite $T_n(x)$ est aussi de Cauchy, dans F. Elle converge donc. On définit

$$T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$

L'application $T : E \to F$ est linéaire. Montrons qu'elle est continue. Comme la suite (T_n) est de Cauchy, elle est bornée. Soit $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|$. Étant donné $x \in E$, il découle de la continuité de la normme que

$$\|T(x)\| = \| \lim_{n\to\infty} T_n(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|\|x\| \leq C\|x\|.$$

D'après le point (4) de la proposition précédente, T est borné.

Il reste à voir que $T_n \to T$. On utilise la méthode maintenant habituelle. Comme (T_n) est une suite de Cauchy, $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$

$$m, n \geq N_\epsilon \implies \forall \|x\| = 1 \quad \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \epsilon.$$

En laissant $m \to \infty$ on obtient donc pour chaque x de norme un, $\|T_n(x) - T(x)\| \leq \epsilon$, dès que $n \geq N_\epsilon$. ☐

Exercice 2. *Soit $E = F = C([0, 1])$. On munit E de la norme*

$$\|f\|_0 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

et F de la norme

$$\|f\| = \left(\int_0^1 f^2(x)\, dx\right)^{1/2}.$$

Est-ce que les applications $\Phi : E \to F$ et $\Psi : F \to E$ définies par

$$\Phi(f) = f, \quad \Psi(f) = f$$

sont continues ? Quelles sont leurs normes ?

Dans le cas particulier où F est le corp de base $\mathbb{K}$, on note $E^\star = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Exercice 3. *Soit K un espace métrique compact. Considérons l'espace de Banach $E = C(K)$ muni de la norme du supremum. Étant donné un point $x \in K$, la fonction* évaluation en x, $e_x : C(K) \to \mathbb{R}$ *est définie par*

$$e_x(f) = f(x).$$

a) *Montrez que e_x est une application linéaire continue.*

b) *Calculez sa norme.*

c) *Si on munit $C([0,1])$ de la norme*

$$\|f\| = \left(\int_0^1 f^2(x)\, dx \right)^{1/2},$$

est-ce que la fonction évaluation en x est continue ?

Exercice 4. *Soit $c(\mathbb{N})$, l'ensemble des suites (x_n) réelles convergentes, muni de la norme du supremum.*

a) *Montrez que $c(\mathbb{N})$ muni de cette norme est un espace de Banach.*

b) *Montrez que l'application $l : c(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ définie par*

$$l(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

est un élément du dual de $c(\mathbb{N})$.

c) *Quelle est sa norme ?*

Opérateur intégral. Soit $E = C([0,1])$ muni de la norme du supremum. Étant donnée une fonction continue $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, on définit l'opérateur intégral de Fredholm $K : C([0,1]) \to C([0,1])$ par

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy.$$

Proposition 2.6. *L'opérateur K est borné et sa norme est*

$$\|K\| = \max_{0\le x\le 1} \int_0^1 |k(x,y)|\, dy.$$

Exercice 5. *Prouvez cette proposition dans le cas où $k(x,y) \ge 0$ pour chaque x, y.*