3) COMPACITÉ DANS LES ESPACES DE FONCTIONS CONTINUES

Quelques rappels de topologie.

- Un espace topologique X est compact si de tout recouvrement de X par des ouverts on peut obtenir un sous-recouvrement fini.
- Un sous-ensemble A de X hérite naturellement d'une topologie, dite topologie induite. Les ouverts de cette topologie sont les intersections d'ouverts de X avec A.
- Un sous-ensemble A est dit compact s'il est compact lorsque muni de cette topologie induite.
- Si X est un espace métrique, alors un sous-ensemble $A \subset X$ est compact si et seulement si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ admet une sous-suite qui converge vers un point $x \in A$.
- Un sous-ensemble A est relativement compact si son adhérence est un sous-espace compact.
- L'adhérence d'un sous-ensemble $A \subset X$ est le plus petit fermé de X contenant A. C'est-à-dire
$$\text{adh A} = \cap\{F \,:\, F \text{ est fermé et } A \subseteq F\}.$$
On appelle parfois l'adhérence la fermeture de A. On la note aussi $\overline{A}$.
- Un espace topologique est séparable s'il admet un sous-espace dénombrable dense.

Exercice 1. *Montrez qu'un espace métrique compact est borné et séparable.*

Soit K un espace métrique compact. L'espace des fonctions continues sur K, $C(K) = C(K, \mathbb{R})$ est muni de la norme
$$\|f\| = \max_{x\in K} |f(x)|.$$
C'est un espace de Banach. On prouve ce fait de manière analogue à ce qui avait été fait au premier cours dans le cas particulier $K = [0, 1]$.

Dans ce cours nous donnerons une caractérisation des sous-ensembles relativement compacts de $C(K)$ en terme d'équicontinuité.

Définition 3.1. *Une famille de fonctions $A \subset C(K)$ est uniformément équicontinue si pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour chaque $f \in A$,*
$$d(x, y) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Exercice 2. *Une famille de fonctions $A \subset C(K)$ est équicontinue si pour chaque $x \in X$ et chaque $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour chaque $f \in A$,*
$$d(x, y) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$
Utilisez la compactité de K pour montrer que toute famille équicontinue est uniformement équicontinue.

Théorème 3.2 (Arzelà–Ascoli)**.** *Soit K un espace métrique compact. Un sous-ensemble A de $C(K)$ est relativement compact si et seulement s'il est borné et équicontinu.*

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Soit A un sous-ensemble relativement compact de $C(K)$. Il est borné. Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\overline{A} \subset \cup_{f \in A} B_\epsilon(f)$, on déduit de la compacité de $\overline{A}$ qu'il existe un nombre fini de fonctions $f_1, \cdots, f_n$ telles que $\overline{A} \subset \cup_{i=1}^n B_\epsilon(f_i)$. Chaque f_i est une fonction continue sur K. Elle y est donc uniformément continue puisque K est compact : il existe $\delta > 0$ tel que pour chaque $i = 1, 2, \cdots, n$

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon.$$

Soit $f \in A$. De la propriété de recouvrement de A on déduit qu'il existe i tel que $\|f - f_i\| < \epsilon$. On a donc pour chaque $x, y \in K$ tels que $d(x, y) < \delta$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \leq 3\epsilon.$$

La famille de fonctions A est donc équicontinue.

$\Longleftarrow$ On montrera que chaque suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comprise dans A admet une sous-suite convergente.

Comme K est un espace métrique compact, il est séparable : il existe une suite de points $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ dense dans K.

Par hypothèse, A est borné, il existe donc une sous-suite $(f_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(f_{1,n}(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. De cette sous-suite on peut extraire une nouvelle sous-suite $(f_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(f_{2,n}(x_2))_{n \in \mathbb{N}}$ converge à son tour. En répétant ce processus, on obtient pour chaque $k \in \mathbb{N}$ une sous-suite $(f_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(f_{k,n}(x_j))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour chaque $j = 1, 2, \cdots, k$. On considère la suite "diagonale" $g_n = f_{n,n}$. Il est clair que $(g_n(x_j))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour chaque $j \in \mathbb{N}$.

Soit $\epsilon > 0$. De l'équicontinuité des fonctions g_n, on déduit l'existence de $\delta > 0$ tel que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x, y) < \delta \Longrightarrow |g_n(x) - g_n(y)| < \epsilon.$$

La suite $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est dense dans K qui est compact, il existe donc $L \in \mathbb{N}$ tel que

$$K = \cup_{j=1}^L B_\delta(x_j).$$

Comme la suite $(g_n(x_j))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, elle est aussi de Cauchy : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $m, n \geq N$ implique $|g_n(x_j) - g_m(x_j)| < \epsilon$ pour chaque $j = 1, 2, \cdots, L$. En particulier, pour chaque $x \in K$, il existe $j \in \{1, 2, \cdots, L\}$ tel que $x \in B_\delta(x_j)$. Pour $m, n \geq N$ on a donc

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_i)| + |g_n(x_i) - g_m(x_i)| + |g_m(x_i) - g_m(x)| < 3\epsilon.$$

La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $C(K)$, qui est complet. Elle converge donc.

□

Corollaire 3.3. *Soit K un espace métrique compact. Un sous-ensemble de $C(K)$ est compact si et seulement s'il est fermé, borné et équicontinu.*

Exemple 3.4. *Soit* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une suite de fonctions continûment dérivables telles que pour chaque* $n \in \mathbb{N}$ *et chaque* $x \in [0,1]$

- $|f_n(x)| \leq 1$,
- $|f'_n(x)| \leq 1$.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une sous-suite qui converge uniformément.*

Exercice 3. *Construisez un sous-ensemble borné de* $C([0,1])$ *qui n'est pas relativement compact.*

Exercice 4. *Soit* K *un espace métrique compact.*

a) *Montrez que*

$$A = \{f : K \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ est lipschitzienne de constante } \leq M\}$$

n'est pas compact dans $C(K)$.

b) *Soit* $x_0 \in K$. *Montrez que*

$$\{f \in A \,:\, f(x_0) = 0\}$$

est compact dans $C(K)$.

3.1. **Opérateurs compacts.** Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire $T : E \to F$ est dite compacte si l'image de la boule unité

$$B_E := \{x \in X \,:\, \|x\| \leq 1\}$$

est relativement compacte dans Y.

Exercice 5. *Montrez qu'une application linéaire compacte est continue.*

Les opérateurs compacts les plus importants en analyse sont presque tous des opérateurs d'inclusion.

Proposition 3.5. *Soit* $E = C^1([0,1])$ *muni de la norme*

$$\|f\| = \sup|f(x)| + \sup|f'(x)|.$$

Soit $F = C([0,1])$ *muni de la norme* $\|f\| = \sup|f(x)|$. *L'inclusion* $i : E \to F$ *définie par* $if = f$ *est un opérateur compact.*

Démonstration. La condition $\|f\|_E \leq 1$ implique $|f'(x)| \leq 1$ pour chaque $x \in [0,1]$. On en déduit pour chaque $x, y \in [0,1]$ que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

En particulier, la famille $i(B_E) \subset F = C([0,1])$ est uniformément équicontinue. Commme elle est aussi bornée, le théorème d'Arzela–Ascoli implique que $i(B_E)$ est relativement compact. $\square$

Exercice 6. *Utilisez le théorème d'Arzelà–Ascoli pour montrer que l'opérateur intégral de Fredholm* $K : C([0,1]) \to C([0,1])$ *est compact.*